پوانکاره و توپولوژی*

پاول آلکساندروف
ترجمهٔ منوچهر میثاقیان

به این پرسش که رابطهٔ پوانکاره با توپولوژی چیست می‌توان در یك جمله پاسخ داد: او آن را آفرید. البته امکان آن هم هست که در یك دوره درس که قضایای بنیادی پوانکاره در توپولوژی را کم و بیش تشریح کند، به آن پاسخ گفت. از این دو نحوهٔ پاسخ، اولی را می‌توانم نادیده بگیرم، و برای دومی طبعاً فرصت ندارم؛ بنابراین من می‌مانم و راه‌حلی سازشکارانه و بینابینی، که همچون همهٔ موارد سازشکاری رضایت‌بخش نیست، اما با وجود این به دیدگاه نخست نزدیکتر است تا به دیدگاه دوم. این راه حل فقط می‌تواند کوششی باشد برای زنده کردن و نشان دادن احساس شعفی که از ابداعات با شکوه این هندسه‌دان بزرگ فرانسوی در حیطهٔ توپولوژی حاصل می‌شود، یعنی حیطه‌ای که نفوذش بر تمام دانش ریاضی نه تنها بیشتر از تمام توقعات آن زمان بوده است بلکه هنوز هم سال به سال در حال فزونی است.

پوانکاره در دوره‌ای رمانتیك از تاریخ دانش ریاضی می‌زیست؛ در این دوران، سازگاری هندسهٔ نااقلیدسی نخستین بار (توسط خودش و کلاین) ثابت شد و در نتیجه دیدگاههای هندسی ما و مفهوم فضای هندسی به صورتی زایدالوصف بسط یافت؛ همچنین اندیشه‌های جدید هندسی (بازهم در کارهای خود پوانکاره) در نظریهٔ نسبیت خاص کاربرد پیدا کردند ـ نظریه‌ای که برای دگرگون ساختن درك ما از جهان که از زمان گالیله و نیوتن به نظر تغییرناپذیر می‌آمد، کافی بود ـ و نیز در ژرفنای مجرد خود ریاضیات نظریهٔ مجموعه‌ها سر برآورد که به اعتقاد بسیاری از ریاضیدانان تراز اول در خارج از دانش ریاضیات، و شاید به طور کلی در خارج از دانش قرار داشت و باعث وقوع انقلابی در ریاضیات شد که اهمیتش در حد اهمیت انقلاب نظریهٔ نسبیت در فیزیك بود.

پوانکاره بنابر علائق شخصی خود در ریاضیات و سنتی که به ارث برده بود نمایندهٔ ریاضیات کلاسیك ـ یعنی نمایندهٔ مکتب بزرگ فرانسه در آنالیز ریاضی که توسط لاگرانژ، لاپلاس و کوشی بنیاد یافته بود ـ به شمار می‌رفت. او به آنالیز ریاضی به مفهوم عام آن، شامل نظریهٔ توابع، و همهٔ جنبه‌های معادلات دیفرانسیل و "فیزیك ریاضی" در وسیعترین معنی، پرداخت. جامعیت پوانکاره به عنوان ریاضیدان، در شیوهٔ او برای خلق حیطهٔ تازه‌ای از ریاضیات ـ توپولوژی ـ دقیقاً نمایان است. برای پوانکاره توپولوژی از ابتدا و در همه حال ابزاری قدرتمند برای حل مسائلی بود که در شاخه‌های کلاسیك ریاضیات مطرح می‌شدند؛ درمیان این شاخه‌ها، نظریهٔ توابع یك متغیر مختلط که ریمان روابط نزدیك آن را با هندسه به صورت ناقص بررسی کرده بود و پوانکاره نخستین بار این روابط را به طور عمیق درك کرد، و نظریهٔ معادلات دیفرانسیل که از دیدگاه پوانکاره از مکانیك سماوی و خود هندسه تفکیك‌ناپذیر بود، در مقام اول جای داشتند. پوانکاره با درك قدرت روشهای توپولوژیك در "ریاضیات کلاسیك" واغلب، با پیشگویی آنها در زمانی که این روشها را هنوز با تمام توانشان نمی‌شد به کار برد، درهای دنیای جدیدی از مسائل ـ مسائل "کیفی" یعنی واقعاً توپولوژیك ـ را به روی ریاضیات گشود، دنیایی که در اساس نه تنها از طریق روشها بلکه، شاید بتوان گفت، از طریق عالم ریاضیات "کلاسیك"، که در مرکزش فرمول و محاسبه قرار داشت، قابل دسترسی نبود. از این رو، پوانکاره نمایندهٔ عالی ریاضیات کلاسیك، برخلاف دیگران، سنتهای این نوع ریاضیات را از درون "زدود" و نه تنها روشهای تازهٔ پژوهشی، بلکه همچنین شیوه‌های تازه‌ای از فهم مطالب جالب را وارد آن کرد.

اجازه بدهید مطلب را روشنتر بیان کنم. همهٔ ابداعات ریاضی در تحلیل نهایی پایه در شهود (ریاضی) ما دارند. تفکر مداوم و متمرکز سرانجام (به صورت کم و بیش ناگهانی) به تشخیص اساس قوانین مربوطه، به تحقیق در آنچه کوشش و فکرمان معطوف به آن است، راه می‌برد. هدف بررسیهای بعدی که اغلب بسیار خسته‌کننده هم هستند، وارسی این تشخیص است، یعنی وارسی شهودمان (که اگر این وارسی آن را تأیید کند) نطفهٔ واقعی نتیجهٔ به دست آمده است. هیچ کس نتوانسته است این مکانیسم ابداع ریاضی را بهتر از پوانکاره در کتابهایش *دانش و روش* و *دانش و فرضیه* توصیف کند. اما سرشت شهود ریاضی به هیچ وجه در همهٔ حالات و نزد همهٔ ریاضیدانان یکسان نیست. شهود ژاکوبی همانند شهود هیلبرت نبود؛ شهود وایرشتراس نیز همانند شهود پوانکاره نبود.

احتمالاً چیزی به نام "شهود فرمولی" به معنای استعداد پیشگویی نتیجهٔ یك تبدیل پیچیده (مثلاً در آنالیز تانسوری) وجود دارد. همچنین شهودی با سرشت جبری ـ منطقی، یعنی توانایی تصور (و پیشگویی) روابط منطقی پیچیده (مثلاً در نظریهٔ مجموعه‌ها و

جبرمجرد) وجود دارد، و سرانجام (یا تقریباً قبل ازهرچیز) وجود شهود هندسی است که گاهی از آن به‌عنوان تنها شهود "حقیقی" در ریاضیات نام‌برده می‌شود. البته من فکرمی‌کنم که این‌درست‌نیست و واقعاً اشکال مختلفی ازشهود ریاضی ــ حتی علاوه برمثالهایی که من نام بردم ــ وجود دارد.

عموماً شهود "توپولوژیك" را حالت خاصی ازشهود هندسی معمولی می‌دانند ولی این حالت خاص چنــان صورتهای متنوع و متعددی دارد، و از سوی دیگر با اشکال دیگرشهود هندسی آنچنان متفاوت‌است که احتمالاً شایستهٔ قرارگرفتن در مقولهٔ خاصی‌است. شهود توپولوژی به‌خطوط مستقیم، تبدیلات پرسپکتیووسایرنگاره‌ها کــه برای هندسهٔ تصویری اهمیت اساسی دارند، مربوط نیست. شهود توپولوژیك، شهودی از صورت و وضع [جای] شکلهاست درهیأتی‌محض. این‌شهود، ازهمهٔ انواع شهود هندسی، هندسی‌تراست.

پوانکاره‌خداوندگار این نوع‌شهود در بین ریاضیدانان‌هم‌عصر خود و پیش از خود بود. شاید تنها ریمان را بتوان از این‌حیث با او مقایسه کرد، اگرچه ریمان نتوانست شهود توپولوژیك خود را چنان بپرورد و به‌کار گیرد که درحد شهود پوانکاره گستردگی و تنوع کاربرد داشته باشد.

شهود توپولوژیك در بیشتر مهمترین کارهای پوانکاره دخالت داشته‌است؛ ازجمله، درنظریهٔ توابع‌خودریخت ویکنواخت‌سازی[1] (که شاهکار رهیافت "ریمانی" به‌نظریهٔ توابع متغیرمختلط‌است.)، نظریهٔ کیفی معادلات دیفرانسیل، که شاید بهترین نمونه از توانایی پوانکاره درنگرش تازه به‌اکثرموضوعات کلاسیك ریاضیات و نیز نگرش بــه‌مسائل بی‌سابقه‌ای باشد که او توانست با آنها دست و پنجه نــرم کند، و سرانجام، مجموعــهٔ مبسوط کارهای توپولوژیك ناب او.

اینکه پوانکاره مفهوم همولوژی [مانستگی] را محور اساسی توسعهٔ توپولوژی درآینده‌می‌دید، جلوه‌ای‌ازظهورنبوغ‌توپولوژیك اوست. نخستین‌صورتبندی این مفهوم (در رسالهٔ اساسی۱۸۹۵ او تحت عنوان"تحلیل‌جا") ازتجسم هندسی مستقیم مایه می‌گرفت، و تنها چند سال بعد مبنایی اکیداً منطقی به‌خودگرفت.

دومین مفهوم بنیادی توپولوژیکی کــه پوانکاره عرضه کرد ــ مفهوم گروه بنیادی ــ هرچند به دقت صورتبندی شده بود ولــی بازهم مبتنی برشهود بود. پوانکاره با ابداع این‌مفهوم شالودهٔ رشد عظیم توپولوژی هموتوپیك را ریخت که پیشرفتهای بعدی‌آن با نام براوئر وسپس هوپف، هورویتس، و فهرست طویلی ازریاضیدانان دیگر، همراه‌است. دراینجا باید خاطرنشان کرد که تعریف گروههای هموتوپی، یعنی گروههایی که مفهوم گروه بنیادی را به‌ابعاد دلخواه تعمیم می‌دهنــد، نخست در ۱۹۳۲ توسط توپولوژیدان معروف چك، ای. چك[2] ارائه شد، هرچندکه او موضوع را مورد بررسی بیشتر قرارنداد وهمان‌طورکه می‌دانیم این‌افتخار بعداً به‌هورویتس تعلق گرفت.

قابل ذکرترین و قدیمیترین بخشهای توپولــوژی هموتوپیك به‌نظریهٔ میدانهای برداری (وچند برداری) وتکنیکهای آنهامربوط می‌شود که رابطهٔ بسیار نزدیکی با نظریــهٔ نقاط ثابت نگاشتهای

1. uniformization 2. E. Čech

پیوسته دارد. بانی این‌نظریه بازهم خود پوانکاره است. اودردهٔ هشتاد و پیش ازآفرینش آثار توپولوژیك‌ناب خود، درتحقیقاتش درزمینهٔ نظریهٔ کیفی معادلات دیفرانسیل، نخستین تعاریف ومفاهیم بنیادی نظریــهٔ میدانهای برداری را بنا نهاد، و مخصوصاً مفهوم بنیادی شاخص تکینی میدان برداری را معرفی کرد.

در حال حاضر مشکل بتوان اهمیت اساسی اندیشه‌ها ونتایج پوانکاره را در تمام پیشرفتهای بعدی نظریــهٔ معادلات دیفرانسیل و نیز آنالیز ریاضی نوین، کاملاً ارزیابی کرد.

مخصوصاً در مورد قضیه‌های وجود نقاط ثابت، تحت این یا آن نگاشت پیوسته، باید گفت کــه پوانکاره اهمیت این قضیه‌ها را در اثبات قضیه‌های وجودی آنالیز دریافته بود. این موضوع از کوششهای فراوان او برای اثبات "آخرین قضیهٔ هندسی"اش درباب وجود نقطهٔ ثابت برای رده‌ای مفروض‌ازنگاشتهای پیوستهٔ یك ناحیهٔ طوقی‌شکل[1] صفحه درخودش، آشکاراست. باید بگویم که این آخرین‌کار پوانکاره تأثیری غم‌انگیز برخواننده می‌گذارد. نویسنده در مقدمهٔ کوتاهی برآن می‌نویسدکه هرگز کاری اینچنین ناقص‌را منتشر نکرده‌است ــ در واقع اونتوانسته بود برای‌نتیجه‌ای بنیادی (آخرین‌قضیهٔ هندسی‌پوانکاره) که اثربه‌آن اختصاص‌داشت، اثباتی‌بیابد. با این‌حال پوانکاره، هم به‌لحاظ مشکل‌بودن موضوع وهم به‌خاطر اینکه، به‌گفتهٔ خود او، درآن سن وسال نمی‌توانست خیلی امیدوار باشدکه راه‌حل‌کامل مسأله را به‌دست آورد، انتشار نتایج جزئی به‌دست آمده را ممکن و لازم تشخیص داده بود. در آن زمان پوانکاره تنها ۵۷ سال داشت. در واقع مسألهٔ اصلی، سن وسال او نبود بلکه بیماری سختی بودکه او ازقبل به‌آن مبتلا بود (ودرآن زمان کار ازمرحلهٔ عمل جراحی هم گذشته بود) به‌طوری که یکسال بعد به‌علت آن بیماری در گذشت.

صورت کلی "آخرین قضیهٔ هندسی پوانــکاره" مدت زمــان کوتاهی‌بعد از مرگ او توسط ریاضیدان آمریکایی‌جوان آن‌زمان، جورج بیرکاف، ثابت‌شد و بیرکاف بی‌درنگ به‌خاطراین‌کارشهرت یافت. اما امروز برای ما مهم‌است که توضیح دهیم پوانکاره باچه دید ژرفی اهمیت قضیه‌های توپولوژیك از نوع قضیه‌های "نقطهٔ ثابت" را برای آنالیز و مکانیك سماوی پیش‌بینی کرد و خود را به‌عنوان بانی "روش نقطهٔ ثابت" جاودان ساخت.

نیروی شهود هندسی پوانکاره، گاهی او را به‌چشم‌پوشی از وسواسهای عالمانه در اثباتها سوق می‌داد. البته در این مورد نظر دیگری هم هست: پوانکاره‌که ذهنش دائماً درمعرض هجوم ایده‌ها در حوزه‌های بسیار متنوعی از ریاضیات بود، "فرصت دقیق شدن را نداشت"، واغلب به‌محض اینکه شهودش او را متقاعدمی‌ساخت که فلان قضیه را می‌توان با دقت منطقی کاملی ثابت‌کرد، راضی می‌شد و کامل کردن اثبات را به‌دیگران وامی‌گذاشت. در میان "دیگران" که ریاضیدانان بلندمرتبه‌ای بودند، یکی براوئر بود که من‌می‌خواهم نامه‌ای‌را از پوانکاره به‌اونقل‌کنم (این‌نامه درآخرین سال زندگی پوانکاره نوشته شده و تا آنجا که من می‌دانم پیشتر هرگزمنتشرنشده‌است) که به‌نظرمن‌شرح خوبی‌است از اینکه‌چگونه فکر به‌عمل در می‌آید.

1. annular

نامهٔ پوانکاره به براوئر

همکار عزیزم

از نامه‌ات بسیار سپاسگزارم. نمی‌دانم چرا شك داری که تناظر بین این‌دو خمینه تحلیلی است. مدولوسهای رویه‌های ریمانی را می‌توان به‌طور تحلیلی و به صورت توابعی از ثابتهای گروههای فوشی بیان کرد؛ در واقع تنها باید به‌متغیرهای معینی مقادیر حقیقی داد، اما توابع این متغیرهای حقیقی نیز حافظ ماهیت تحلیلی آنها هستند.

یا اینکه ممکن است مشکل را در این امر ببینی که یکی از خمینه‌ها نه به‌ثابتهای گروه بلکه به‌ناورداهای وابسته است. اگر درست به‌خاطر آورم، من خمینه‌ای وابسته به‌ثابتهای جانشانیهای بنیادی[1] گروه را در نظر گرفته‌ام و به‌یك گروه، بی‌نهایت گسسته‌ای از نقاط این خمینه را نظیر کرده‌ام. سپس، این خمینه را به‌زیرخمینه‌ها چنان تقسیم کرده‌ام که به‌یك گروه، یك تك نقطه از هر زیرخمینه نظیر شود (به‌همان روشی که صفحه را به‌متوازی‌الاضلاعهایی با تناوب، یا دور اصلی را به‌چندضلعیهای فوشی تقسیم می‌کنند). به‌نظر من نمی‌آید که ماهیت تحلیلی تناظر تغییر کند.

درمورد خمینهٔ رویه‌های ریمانی، اگر رویه‌ها را به‌روش ریمان در نظر بگیریم ممکن است دچار مشکل شویم. مثلاً آدم می‌تواند ازخودش بپرسد که آیا مجموعهٔ این رویه‌ها دوخمینهٔ جدا ازهم تشکیل نمی‌دهند؟ اگر این رویه‌ها برطبق دیدگاه آقای کلاین در نظر گرفته شوند مشکل از بین می‌رود، پیوستگی، فقدان تکینیها، امکان گذر از یك رویه به‌رویهٔ دیگر به‌طریقی پیوسته، و آنگاه رسیدن به‌حقایق تقریباً شهودی.

من از شیوهٔ درهم و برهم و ناپیوستهٔ این توضیحات پوزش می‌خواهم. امیدوار نیستم که این توضیحات شما را راضی کند، زیرا آنها را بسیار سطحی برای شما بیان کردم، اما فکر می‌کنم که به‌شما کمك خواهد کرد تا نکاتی را که موجب ایجاد اشکال برای شما شده‌اند، روشن سازید و بنابراین بعداً بتوانم شما را کاملاً متقاعد کنم. خوشحالم که فرصت یافتم تا با مردی به‌شایستگی شما تماس پیدا کنم.

همکار بسیار صمیمی شما
پوانکاره

به‌تاریخ (براساس مهر پستخانه) ۱۵ دسامبر ۱۹۱۱

این نامه نه‌تنها از این نظر جالب است که بعضی جنبه‌های روش ابداع پوانکاره را نشان می‌دهد، بلکه همچنین نشان می‌دهد که پوانکاره اعتقاد زیادی به‌کارهای ریاضی، یعنی کارهای توپولوژیك، براوئر داشته‌است. مضمون این نامه تنها به‌کارهای سالهای ۱۹۰۹ــ ۱۹۱۱ براوئر مربوط می‌شود. روشن است که پوانکاره نه‌تنها از این کارها در پایان ۱۹۱۱ (هنگامی که نامه نوشته شده‌است) اطلاع داشت، بلکه عمق آنها را هم درك کرده بود. درحالی که مقاله‌های توپولوژیك براوئر درنهایت پیچیدگی نوشته شده بودند وحداقل به‌سبك کلاسیك هم نبودند. بنابراین، پوانکاره حتی در آخرین سال زندگیش آن‌قدر انرژی و کنجکاوی داشت که برقضایا و روشهایی تسلط یابد که شیوهٔ ابداع آنها با شیوهٔ خودش کاملاً تفاوت داشت و این خصیصه‌ای است که فقط محققان بسیار بزرگ دارند. پوانکاره این خصیصه را در تمام زندگی ازخود نشان داد. در ۱۸۸۳ کانتور مجموعه‌ای ساخت که (دریك بازه) کاملاً ناپیوسته‌است و نام اورا برخود دارد ("گسستار کانتور"). این کشف، کشفی برخاسته از نبوغ بود، نه‌تنها به‌دلیل اهمیتی که مجموعهٔ کانتور درکل ریاضیات کسب کرد، بلکه همچنین به‌این دلیل که ساختار کاملاً تازه‌ای را وارد ریاضی کرد که تا آن زمان کسی نظیرش را درعالم ندیده بود. کانتور تصویری هندسی را درنظر گرفت که خارج ازمحدوده‌ای بودکه وابسته به‌شهود هندسی قلمداد شود، و به‌این ترتیب، قلمرو این نوع شهود و همهٔ تصورات ما از فضا را به روشی بی‌نظیر گسترش داد. اوپیش ازهرچیز نشان دادکه این تصورات را می‌توان به‌تبدیلاتی در ارتباط با نظریهٔ مجموعه‌ها تعمیم داد، نظریه‌ای که ریاضیدانان معروف وصاحب نام (مثلاً کرونکر) حتی شك داشتند که اصلاً به ریاضیات تعلق داشته باشد. پوانکاره نه‌تنها یکی از نخستین ریاضیدانانی بودکه کشف کانتور را پذیرفت بلکه قطعاً نخستین کسی بودکه آن را در آنالیز به‌کار برد؛ یعنی این نوزاد جدید ریاضی‌که آن‌قدر غیرعادی بود ودر تمام دانش قدیم نظیری نداشت، درست در لحظهٔ تولدش مورد استفادهٔ پوانکاره قرار گرفت.

بسیاری از ریاضیدانان تراز اول ساختمانهای خاص وجالب متعددی را در راستای شهود هندسی جدیدی که توسط کانتور وضع شده بود ساختند. براوئر نخستین مثالهایش را از پیوستارهای تجزیه‌ناپذیر[1] ساخت، آنتوان کمانهای جالبش راکه برای آنها گروه بنیادی فضای مانده‌ای[2] نابدیهی است ارائه داد، الکساندر کره‌های "شاخدار"[3] را، و بسیاری نمونه‌های دیگر. اما گام نخست را کانتور برداشت،و پوانکاره نخستین کسی بود که نه‌تنها اهمیت این نخستین گام را بلکه بارآوری آن را برای آنالیز ریاضی و به‌تبع برای تمام ریاضیات دریافت.و بالاخره همانگونه‌که آخرین مقالهٔ پوانکاره نشان می‌دهد، باید به‌تسلط بسیار زیاد او درآخر عمرش به جنبه‌های هندسی نظریهٔ مجموعه‌ها تا آن حد که تا آن زمان تکامل یافته بود، توجه کنیم.

1. fundamental substitutions

1. non - decomposable 2. residual space 3. horned

اکنون برمی‌گردیم به‌مفهوم هومولوژی [مانستگی] که توسط پوانکاره ایجاد شد. همچنانکه پیشتر گفتیم این‌مفهوم به‌شکل‌شهودی در نخستین مقالهٔ توپولوژیك پوانکاره، مقالهٔ مشهور "تحلیل‌جا"، ارائه شد. ولی‌دراین مورد، رهیافت او که به‌اندازهٔ‌کافی دقیق‌نبود، به‌اصطلاح نتایـج عملی در پی داشت، زیـرا مبنای انتقـاد جدی ریاضیدان نروژی، هیگارد، قرار گرفت. واقعیت این است کـه پوانکاره در نخستین مقاله‌اش به‌پدیدهٔ تاب[1] که اساساً به‌وسیلهٔ‌اعداد بتی محدود می‌شود، توجه‌کافی نکرد. اما در مقالهٔ بعدیش در باب توپولوژی (در "یادداشت تکمیلی بـر تحلیل‌جا") این خـلاء را به‌طرز خیره‌کننده‌ای پر کرد. در اینجا پوانکاره بـا اتخاذ دیدگاه ترکیبیاتی، مفهوم تجزیـهٔ سادکی (مثلثی‌کردن) یك خمینه، یعنی مفهوم مجتمع سادکی[2] را ارائـه کرد، و بنابراین، روش بنیادی توپولوژی ترکیبیاتی را ابداع کرد. احتمالاً پوانکاره این مطلب را به‌طور شهودی واضح می‌دانست که مشخص‌سازی هومولوژیك یك خمینه (و به طور کلی، یك چند وجهی[3]) که او در توپولوژی مطرح کرد، نمی‌تواند به‌نحوهٔ مثلثی‌کردن چندوجهی وابسته باشد. اما همچنانکه می‌دانیم،این‌مطلب قضیه‌ای مشکل‌وعمیق‌در توپولوژی است. برای‌اثبات این‌موضوع، علاوه برمفهوم زیرتقسیم به‌دلخواه کوچك‌یك مثلثی‌شدهٔ مفروض که‌پوانکاره درنظر گرفته بود،‌همچنین به‌مفهوم (مبتنی بر آن زیرتقسیم) تقریب زدن سادکی (یعنی قطعه‌قطعه خطی) نگاشت پیوسته (که تعمیمی از تقریب زدن‌خم‌پیوسته به‌وسیلهٔ خط شکستهٔ محاط در آن‌است) و یك مفهوم مربوط به‌درجهٔ یك نگاشت (یعنی، تعداد دفعاتی که، تحت یك‌نگاشت پیوسته مثلاً از سادك X به‌روی سادك Y یا از خمینهٔ X به‌روی خمینهٔ دیگر Y با همان بعد، Y توسط تصویر X پوشیده شود) یا مفهومی هم‌ارز آن، نیز نیـاز داریم. این دو مفهـوم را بـراوئر در ۱۹۱۱، درست پیش از مرگ پوانکاره ارائه کرد و براوئر به‌کمك‌آنها قضیه‌های معروفش را دربارهٔ ناوردای توپولوژیك تعداد ابعاد یك خمینهٔ nبعدی، وناوردایی نقاط درونی مجموعه‌های واقع‌در آنها، قضیهٔ کلی ژوردان (درحالت nبعدی)، قضیه‌های نقاط ثابت وغیره، ثابت کرد. بـا وجود این، براوئـر قضیهٔ ناوردایی مشخصه‌هـای هومولوژیك خودچندوجهی‌را ثابت‌نکرد،اگرچه همهٔ ابزارهای‌لازم را برای چنین اثباتی در اختیار داشت. این‌کار نخست در ۱۹۱۵ توسط توپولوژیـدان معـروف امریکایـی، الکسانـدر، انجـام گرفت.

اثبات قضیهٔ ناوردایی نخستین گام اساسی در گسترش بیشتر نظریهٔ هومولوژی بود که پوانکاره‌آن را ابداع کرده بود. گام بعدی برخلاف گام نخست، به‌ازمیان بردن‌اشکالات ریاضی‌خاصی‌مربوط نبود، اما ارزش‌نظری زیادی داشت. این گام را جبردان معروف، امی‌نوتر (در ۱۹۲۵–۱۹۲۶) برداشت و عبارت بود از تعویض مشخصه‌های هومولوژیك عددیی که توسط پوانکاره ارائه شده‌بودند، اعداد بتی و ضرایب تاب، با یك مفهوم واحد یعنی گروه بتی (یا آن گونه‌که‌اکنون ترجیح می‌دهیم بگوییم، گروه هومولوژی). بعضی از توپولوژیدانان مشهور، مثلاً لفشتس،درابتدا برخورد بدبینانه‌ای نسبت به‌ابداعات تازهٔ امی‌نوتر داشتند و این ابداعات را صرفـاً صوری می‌دیدند (درواقع به‌نظرمی‌رسیدکه تفاوتی‌اساسی‌دراینکه به‌طور سرراست از گروه بتی چندوجهی حرف زده شود یـا از مجموعهٔ‌کاملاً معین مشخصه‌های‌عددیش،یعنی،رتبه‌اش‌که همان عدد بتی‌است و ضرایب تابش، وجود ندارد.) با وجود این بررسیهای دقیقتر نشان دادکه این ابداعات، حرف بی‌محتوایی‌نیست.

مخصوصاً ومهمتر ازهمه، براساس دیدگاه قدیم وبدون‌مفهوم گروههای‌هومولوژی، گسترش‌یکی‌ازمهمترین‌نظریه‌های‌توپولوژیك یعنی نظریهٔ دوگانی‌توپولوژیك،که مبانی‌آن‌را خود پوانکاره‌وضع کرد، غیرممکن بود. این نظریه بعدها درجهتها و هیأتهای تازه‌ای توسط الکسانـدر و سپس در تمامی جهات توسط پونتریاگین و ریاضیدانان دیگر گسترش یافت.

بدون مفهوم گروه بتی، تصور دوپیشرفت اساسی‌دیگردرنظریهٔ هومولـوژی غیرممکن بود. اولـی، انتقال مفهومهـای هومولوژیك به‌اشیای هندسی‌کلیتر ازچندوجهیها، وپیش ازهمه به‌فشرده[1]هاست، که بـا تقریب‌زدن صورتبندیهـای توپولوژیك پیچیده (فشرده‌ها، دو - فشرده‌ها[2]، و حتی‌فضاهای‌توپولوژیك‌کلیتر) توسط ساختمانهای ترکیبیاتی-توپولوژیك به‌کمك مجتمعها میسرشد؛ من این‌کار را در ۱۹۲۶ با استفاده ازطیفهای تصویری[3](که بعداً‌تعمیمها وصورتهای گوناگونی‌یافت) شروع کردم. این‌فرایند تقریب‌زدن متکی برمفهوم تاروپود[4] یك پوشش فضای مفروض‌است‌که من‌آن را معرفی کردم و امکان می‌دهد تا مفهومهای بنیادی توپولوژی ترکیبیاتی راعملاً به‌همهٔ فضاهای توپولوژیك انتقال دهیم.[5]

دومین پیشرفت اساسی در نظریهٔ هومولوژی، معرفی‌هومولوژی "عالی" به‌وسیلهٔ الکساندر و آندری‌کولموگوروف در ۱۹۳۴–۱۹۳۵ بودکه اکنون‌کوهومولوژی نامیـده می‌شود. از گروههای هومولوژی وکوهومولوژی‌که قلمروتعریف وکاربردشان همواره در حال توسعه‌است، درنهایت نظام ریاضی جدیدی حاصل آمد،یعنی جبر هومولوژیك،که اساساً مشخص‌کنندهٔ چهرهٔ بخش قابل توجهی از ریاضیات نوین است.

در این قسمت از صحبت امروزم، نمی‌توانم از کنار مقالـهٔ عامه‌فهم و قابل بحث پوانکاره، "چرا فضا سه بعد دارد؟" که در مجلهٔ معروف فرانسوی بررسی متافیزیك و اخلاق[6] چاپ‌شده‌است، بگذرم.

اهمیت این مقاله، که شیوهٔ بیان آن بیشترادبی‌است تا صرفاً علمی، دراین‌است‌که ایدهٔ یکی ازمفاهیم اساسی‌توپولوژی‌عمومی ــ یعنی تعریف استقرایی‌کلی بعد ــ را مورد بحث قرار می‌دهد و مسألهٔ مربوط به‌آن رامطرح می‌کند. ایدهٔ پوانکاره این بودکه‌اگر

1. torsion
2. simplicial complex
۳. من اصطلاح "چندوجهی" را دراینجا به‌معنای امروزیش به‌کار می‌برم، یعنی مجموعه‌ای که به‌سادکها قابل‌تجزیه است؛ پوانکاره خودش کلمهٔ "چندوجهی" را به‌معنایی به‌کار برده است‌که امروزه ما برای "مجتمع" به‌کار می‌بریم.

1. compacta
2. bicompacta
3. projection spectra
4. nerve
۵. البته، منشأ نخستین مفهوم من از تاروپود در آنچه‌کـه پوانکاره "چندوجهی متقابل" نامیده‌است، جای دارد.
6. *Revue de Métaphysique et de Morale*

فضا دارای n بعد باشد می‌توان آن‌را به‌وسیلهٔ زیرفضاهای ۱ — n بعدی به بخشهایی (به قدر دلخواه کوچك) تقسیم کرد. نخستین ریاضیدانی که این عقاید ساده و نادقیق پوانکاره را به‌شکلی دقیق و خوش‌بنیاد[1] درآورد، براوئر بود (در مقاله‌ای در ۱۹۱۳). از این‌رو براوئر بنیانگذار مبحث وسیع توپولوژی عمومی است که منگرو (ازلحاظ اصول) اوریسون آن را عرضه‌کرده‌اند و امروزه به‌عنوان نظریهٔ کلی بعد شناخته می‌شود. با این‌حال، در اینجا مهم است تأکیدکنم که فکر مفهوم کلی بعد از آن پوانکاره است و این دلیل دیگری‌است برتوان استثنایی شهود هندسی‌او، که دراین‌مورد، مبحث توپولوژی عمومی را شامل می‌شود. در خاتمه، خوب است توجه‌کنیم که نظریهٔ کلی بعد، پس از آنکه من در ۱۹۲۸—۱۹۳۲ آنچه راکه به‌عنوان نظریهٔ همولوژیك بعد می‌شناسیم ارائه کردم، به‌مرحلهٔ کمال رسید. نظریـهٔ همولوژیك بعد، مفهوم بعد را بـه همولوژی وابسته می‌کند و بنابراین شامل نظریهٔ بعد درتوپولوژی همولوژیك عمومی است.

صحبتم را با ذکر این نکته آغازکردم که پوانکاره درعصری می‌زیست که اندیشه‌های‌جدیدی درریاضیات پدیدآمدند که قدرت تأثیرشان در درك ما از جهان و نیزقدرتشان در گسترش ناگهانی افقهای خود ریاضیات و بالاخره زیبایی و کمال درونیشان، ذهن انسان را به‌شگفتی وامی‌داشتند.

اندیشه‌های ریاضیی که در دوران ما پدید می‌آیند (دست‌کم) به‌همان قدرتمندی و شاید به‌همان زیبایی هستند. با این‌حال اگر چارچوبی چون کشفیات پوانـکاره وجود نمی‌داشت، شاید این اندیشه‌ها هرگز پدید نمی‌آمدند.

لاپلاس در رسالهٔ مشهورش "تشریح نظام عالم"[2] گفته‌است که اخترشناسی به‌واسطهٔ وسعت موضوعش وکمال نظریه‌اش بلندترین قله‌ای است که درك آدمی به‌آن رسیده و زیباترین نشانـهٔ هوش آدمی‌است.

ریاضیدانانی چون پوانکاره ما را برآن می‌دارند کـه گفتهٔ لاپلاس‌را به‌ریاضیات تعمیم دهیم و این رشته را از لحاظ وسعت موضوع و مسلماً کمال نظریه‌اش،همتایی برای اخترشناسی به‌حساب آوریم.

پیوست

دربارهٔ نامهٔ پوانکاره به‌براوئر

و. ك. زورین

متأسفانه به‌نامه‌ای از براوئر کـه پوانکاره به‌آن پاسخ داده‌است، دسترسی نداریم اما با بررسی‌نامهٔ پوانکاره ازیك‌سو وموضوعات مقالات براوئر [۱—۴] از سوی دیگر می‌توان بـا اطمینان نسبی به‌مضمون نامهٔ براوئرپی‌برد.

مقالهٔ براوئر [۳] دراین مورد می‌تواند راهگشا باشد. اوآن را در ۲۷ سپتامبر ۱۹۱۱ در همایش انجمن ریاضی آلمان ارائه کرده است و مقاله اختصاص دارد به‌تدوین مبنایـی برای "روش پیوستگی" در نظریهٔ توابع خودریخت. براوئرمی‌نویسد:

"... پوانکاره ([۷] صص۳۶۸—۳۷۰) اثباتی از وجود یك تابع بـه‌طور خطی چندریخت بر رویـهٔ ریمانی، به کمك روش پیوستگی ارائه می‌کند و دو قضیهٔ زیر را بدون بحث می‌پذیرد:

قضیهٔ ۱ [هم‌ارزی هندسی]. رده‌های یك رویهٔ ریمانی از گونهٔ g، یك خمینهٔ $(6g-6)$بعدی بدون تکینی تشکیل می‌دهند.

قضیهٔ ۲. تصویر یك به‌یك وپیوستهٔ یك حوزهٔ[1] nبعدی دریك خمینهٔ nبعدی بازهم یك‌حوزه است.

با تغییرکوچکی در روش می‌توانیم از به‌کارگیری قضیهٔ ۱ اجتناب کنیم... وبنابراین،کافی‌است توجیهی برای قضیهٔ۲ بیاوریم، یعنی قضیهٔ ناوردایی حوزه‌ها که اثباتی از آن را درآینده‌ای‌ازدیك منتشرخواهم‌کرد. [۴]"

بنابراین، آشکار است‌که براوئر برای توضیحاتی در مورد روش پیوستگی که پوانکاره در [۷] به‌کاربرده‌است، با او تماس می‌گیرد.

برای توضیح پاسخ پوانکاره، ابتدا مناسب است چندکلمه‌ای دربارهٔ روش پیوستگی بگوییم.

این روش که بـه‌لحاظ بداهت هندسیش و درعین‌حال کلیت زیادش بسیارجالب‌است، در قله‌های نظریهٔ توابع خودریخت یك متغیر مختلط، زاده شد. کلاین و پوانکاره همزمان به‌آن پرداختند.

فریك در [۵] دراین‌باره می‌نویسد: "کلاین اندیشه‌هایش را در باب اثبات پیوستگی در مقاله‌اش ([۶] ص۷۰۴) شرح‌داد. از سوی دیگر پوانکاره (در[۷] ص۳۲۹) همین مسأله را موردبحث قرارداد، و درنخستین بررسی دقیق خود ازاساس موضوع به‌عمق و دشواری فوق‌العادهٔ این نوع اثبات پی‌برد و در عین‌حال برای رفع دشواریها ایده‌هایی عرضه‌کرد."

در اینجا شرح واضحی از ایـدهٔ روش پیوستگی را به قلم پوانکاره‌می‌آوریم ([۷] ص ۳۳۰):

"فرض کنیم‌که هرنقطهٔ m از (خمینهٔ)S را در تناظر بـا یك نقطهٔ m' از(خمینهٔ)S' قراردهیم به‌طوری‌که مختصات m' توابعی تحلیلی‌از مختصات mباشند، به‌شرطی‌که اگر S مرزی داشته‌باشد، m برمرز S واقع نباشد. تصورکنیم کـه به‌هر نقطهٔ S' بیش از یك نقطهٔ S نظیرنشود. اگر S یك خمینهٔ بسته باشدآنگاه می‌توانیم مطمئن باشیم‌که به‌هرنقطهٔ S' نقطه‌ای ازS نظیر می‌شود. ولی اگر S یك‌خمینهٔ بـاز مرزدار باشد، نمی‌توان چیزی گفت... و این واقعیتی‌است‌که‌کلاین نادیده گرفته است. در اینجا مشکلاتی هست که نمی‌توان درچندکلمه برطرفشان‌کرد."

نمونه‌ای از دشواریهای کاربرد روش پیوستگی در نظریـهٔ توابع خودریخت اثباتی است‌که‌کلاین ([۶] ص۷۰۴) در مورد تحلیلی‌بودن تناظری‌که خود ساخته‌است، ذکرمی‌کند. اومی‌نویسد ([۶] ص۷۰۴): "برای بحث زیر نیازمند به‌گزاره‌ای هستم‌که در درستی آن شك ندارم اگرچه نمی‌توانم اثبات جمع و جوری از آن ارائه‌کنم. مهم این‌است‌کـه ارتباط بین دوخمینهٔ M_1 و M_2

1. well-founded

2. Exposition du système du monde

1. domain

تحلیلی است. شك ندارم که این موضوع با پیشرفت بیشتر این گونه اثباتهای وجودی ثابت خواهد شد... اگر مشکلاتی در اینجا بخواهد بروز کند می توان از فرمولی که پوانکاره برای ارتباط بین دو خمینه M_1 و M_2 به‌دست آورده است استفاده کرد.»

با مقایسهٔ مطالبی که از مقالهٔ براوئر نقل کردیم با دیدگاههای پوانکاره و کلاین می توان دریافت کـه مسألهٔ بنیادیی که براوئر به‌خاطرش با پوانکاره تماس می گیرد، تحلیلی بودن نگاشت است. نخستین بخش نامهٔ پوانکاره، پاسخ این پرسش است. این پرسش از دیدگاه توپولوژی اساساً این است کـه آیا نگاشتی که در روش پیوستگی به‌کار می رود بازاست؟

در بخش دوم نامهٔ پوانکاره (کـه به‌واقع رابطهٔ نزدیکی با بخش اول دارد) قضیهٔ ۱ براوئر (قضیهٔ فوق) شرح داده می‌شود؛ بنا بر گفتهٔ کلاین و خود پوانکاره، هر رویـهٔ ریمانی S می توانـد همدیسانه بر روی فضای خارج قسمت K/Γ نگاشته شود، که در آن K یك دایره، یك صفحه، یـا یك کره است و Γ گروه تبدیلات کسری خطی K یکریخت با $\pi_1(S)$ است. در اینجا فضاهای K/Γ_1 و K/Γ_2 همدیسانه هم‌ارزند اگر و تنها اگر Γ_1 و Γ_2 زیرگروههای مزدوج گروه تبدیلات کسری خطی K باشند. با استفاده از این نمایش رویهٔ ریمانی، مشخص کردن تعداد رده‌های متفاوت رویه‌های ریمانی فشرده از گونهٔ g که به $6g-6$ پارامتر حقیقی وابسته‌اند و به‌طور همدیس هم‌ارز نیستند کار مشکلی نیست.

به‌جای اصطلاح "جانشانی" که پوانکاره به‌کار برده است، امروزه غالبـاً می گوییم تبدیـل "خطی" یا "کسری خطی". "جانشانیهای بنیادی" پوانکاره مولدهای گروه مفروض Γ از تبدیلات خطی کسری است که توسط آن خارج قسمت K/Γ حاصل می‌شود.

در پایان خاطرنشان می کنم که مسألهٔ توپولوژیك ناب ناوردایی حوزه و تعداد ابعاد که حل دقیق آن تنها به‌وسیلهٔ براوئر در ۱۹۱۱–۱۹۱۲ [۴] انجام شد، در چهارچوب نظریهٔ هندسی توابع تحلیلی و درخلال کوششهایی برای ارائهٔ یك بنیاد کامل منطقی برای روش پیوستگی به‌وجود آمد.

مراجع

1. L. E. J. Brouwer, Über die topologischen Schwierigkeiten des Kontinuitätsbeweises der Existenz- Theoreme eindeutig umkehrbar polymorpher Funktionen auf Riemannschen Flächen, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen No.5(1912), 603-606.
2. L.E.J. Brouwer, Über die Singularitätenfreiheit der Modulmannigfaltigkeit, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen No.7 (1912), 803-806.
3. L.E.J. Brouwer, Über den Kontinuitätsbeweis für des Fundamentaltheorem der automorphen Funktionen in Grenzkreisfalle, Jber. Deutsch. Math. - Verein **21** (1912), 154-157.
4. L.E.J. Brouwer, Beweis der Invarianz des n-dimensionalen Gebiets, Math. Ann. **71** (1911), 305-313.
5. R. Fricke, Beiträge Zum Kontinuitätsbeweise der Existenz linear-polymorpher Funktionen auf Riemannschen Flächen, Math. Ann. **59** (1904), 449-513.
6. F. Klein, Neue Beiträge zur Riemannschen Funktionentheorie, Gesammelte Mathematische Abhandlungen, vol. III, Springer-Verlag, Berlin 1923, 531-710.
7. H. Poincaré, Sur les groupes des équations linéaires, Oeuvres, vol. II, Gauthier-Villars, Paris 1916, 300-401.

● این مقاله از روی ترجمهٔ انگلیسی اصل مقاله به فارسی برگردانده شده است. اصل مقاله، متن سخنرانی مؤلف در یکی از کنگره‌های بین‌المللی ریاضیات (۱۹۵۴) به مناسبت صدمین سالگرد تولد پوانکاره است. مشخصات متن انگلیسی این است:

P. S. Aleksandrov, "Poincare and topology," *Russian Mathematical Surveys*, (1)**27** (1972) 157-168.