گروهها و گرافها*

گروههای عمل کننده بر درختها، پایانها، و نمودارهای حذفی

پال شوپ*
ترجمهٔ کامبیز محمودیان

اگر گروه G و مجموعهٔ مشخص X از مولدهای G مفروض باشد، می‌توان «تصویری از G رسم کرد». این «تصویر» را، که گراف یا نمودار کیلی G نسبت به X نامیده می‌شود، کیلی[۱] درسال ۱۸۷۸ توصیف کرد. صرفنظر از مقالهٔ مهمی که دن[1] نوشت، مفهوم گراف یک گروه تا اواخر دههٔ ۱۹۶۰ کاربرد اندکی داشت. دراین زمان سه نظریهٔ بسیار قدرتمند، که همگی ارتباط نزدیکی با نمودارهای کیلی داشتند، عرضه‌شدند. این نظریه‌ها عبارت‌اند ازنظریهٔ گروههای عمل کننده بر درختها که ژان-پیرسر (۱۹۶۸) آن را ارائه‌کرد و هیمن باس هم سهم مهمی در آن‌دارد؛ قضیهٔ ساختاری جان استالینگز (۱۹۶۸) درمورد گروههای متناهیاً تولیدشده‌ای که بیش از یک پایان دارند؛ و نظریهٔ نمودارهای حذفی که راجر لیندن (۱۹۶۶) آن را ابداع کرد.

این نظریه‌ها کاربردهای متعددی دارند. برای نمونه، نظریهٔ گروههای عمل کننده بر درختها توصیف زیبایی از گروههایی که ساختاری از یک نوع مشخص دارند برحسب عملهای این گروهها بر درختها ارائه می‌دهد. یکی‌ازنتایج اولیه‌ای که در این نظریه به‌دست می‌آید این است که گروه G آزاد است اگر و تنها اگر G «بر یک درخت به‌طور آزاد عمل کند». (تعریف این اصطلاحها در زیر داده‌خواهدشد.) یک نتیجهٔ مستقیم این مطلب این است که هر زیرگروه یک گروه آزاد، آزاد است، زیرا اگر G به‌طور آزاد بر درختی عمل کند، آنگاه هرزیرگروه G نیزچنین‌می کند. همچنانکه نتیجه‌ای که اکنون بیان‌شد نشان می‌دهد، نظریهٔ گروههای‌عمل کننده بر درختها روشی‌است قوی برای اثبات نتایجی درمورد ساختار زیرگروههای انواع مشخصی ازگروهها.

قضیهٔ ساختاری درمورد گروههای متناهیاً تولیدشده‌ای که بیش ازیک پایان دارند دوکاربرد شگفت‌انگیز دارد. سرحدس‌زده‌بود که اگر یک گروه بی‌تاب[1] G زیرگروه آزادی باشاخص متناهی داشته باشد آنگاه G آزاد است. ایلنبرگ[2] و جانا[3] حدس زده بودند که یک گروه با بعد کوهمولوژیک یک، آزاد است. استالینگز به عنوان کاربردی مستقیم از قضیهٔ ساختاری، درستی این‌حدسها را برای گروههای متناهیاً تولیدشده ثابت کرد. درستی هردوحدس برای گروههای دلخواه بعداً به‌وسیلهٔ سوان[4] ثابت شد.

نظریهٔ نمودارهای حذفی کاربردهای فراوانی داشته است اما موفقترین کاربرد آن «نظریهٔ حذفهای کوچک» است، که در زیر آن‌را توضیح می‌دهیم. این‌نظریه کاربردهایی‌دارد درمسائل تصمیم، مثلا حل‌مسألهٔ تزویج برای گروههای گرههای متناوب؛ در قضایای نشاندن، مثلا این نتیجه که هرگروه شمارا قابل نشاندن در یک خارج قسمت سادهٔ $SL_۲(Z)$ است؛ و در ساختن گروههای سادهٔ ناشمارایی که همهٔ زیرگروههای سرهٔ آنهاعدداصلی کوچکتر دارند.

ما گروهها را به‌وسیلهٔ نمایشها برحسب مولدها و روابط معرف توصیف می کنیم. مثلا، اگر بنویسیم $G = \langle x; x^{۶} = ۱ \rangle$، آنگاه G یک مولد x دارد که در رابطهٔ $x^{۶} = ۱$ صدق می‌کند، و هیچ‌رابطهٔ دیگری فرض نشده است. پس G باید گروه دوری از مرتبهٔ شش باشد. اگر بنویسیم $C = \langle x \rangle$، آنگاه C یک مولد دارد و C هیچ محدودیتی جز اینکه گروه‌است ندارد. پس C گروه دوری‌نامتناهی است. اگربنویسیم $A = \langle x, y; xy = yx \rangle$، آنگاه A دو مولد دارد وتنها این‌رابطه بر آنها تحمیل‌شده‌است که با یکدیگرتعویض می‌شوند. پس A گروه آبلی آزاد بر دو مولد است.

در حالت کلی، هر نمایش $G = \langle x_۱, x_۲ \dots ; r_۱ = ۱, \dots \rangle$ یک گروه به‌شکل‌زیرتعریف می کند. فرض‌می کنیم $X = \{x_۱, x_۲, \dots\}$ مجموعهٔ‌مفروض‌ازمولدهاو $X^{-۱} = \{x_۱^{-۱}, x_۲^{-۱}, \dots\}$ یک‌مجموعهٔ

---

1. Dehn

1. torsion-free
2. Eilenberg
3. Ganea
4. Swan

مجزا از X و در تناظر یك به‌یك با X باشد. قرار می‌دهیم $Y=X\cup X^{-1}$ و فرض می‌کنیم Y^* مجموعهٔ همهٔ واژه‌ها (دنباله‌های متناهی از علائم) با حروف Y باشد. واژهٔ تهی را با ۱ نشان می‌دهیم. آنگاه Y^* با عمل دنباله‌هم نوشتن واژه‌ها یك نیمگروه با عضو همانی ۱ است. از آنجا که می‌خواهیم G گروه باشد، لازم است که همهٔ روابط $x_i^{\epsilon}x_i^{-\epsilon}=1$، $\epsilon=\pm 1$ در G صادق باشند. این روابط «روابط بدیهی» نامیده می‌شوند و در نمایش نوشته نمی‌شوند. بدون از دست‌دادن کلیت موضوع، می‌توانیم فرض کنیم که همهٔ روابط معرف به‌شکل $r=1$ نوشته شده‌اند. اگر $r=1$ یك رابطهٔ معرف باشد، آنگاه r یك «رابط معرف» نامیده می‌شود. فرض می‌کنیم R مجموعهٔ رابطهای معرف بوده و $\approx$ همنهشتی بر Y^* باشد که با قرار دادن $urv\approx uv$، هر گاه $r\in R$ یا r یك رابط بدیهی باشد، تعریف می‌شود. در این صورت خارج قسمت $Y^*/\approx$ گروه G است.

اگر بنویسیم $F=\langle x,y\rangle$، آنگاه F گروه آزاد بر دو مولد است. (هیچ رابطه‌ای جز روابط بدیهی موجود نیست.)

یك نکتهٔ اساسی دربارهٔ F این است که هر عنصر F نمایش یکتایی به‌صورت یك واژه «تحویل یافتهٔ» w، یعنی واژه‌ای که هیچ زوج وارون یکدیگر به‌شکل $x_i^{\epsilon}x_i^{-\epsilon}$ را شامل نباشد، دارد.

برای بحث در مورد گرافها، نمادها و اصطلاحات خود را مشخص می‌کنیم. از نظر صوری، یك گراف Γ تشکیل شده است از یك مجموعهٔ V از «رئوس»، یك مجموعهٔ E از «یالها»، و دو نگاشت

$$E\to V\times V,\quad e\mapsto(o(e),\tau(e))$$

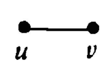
$$E\to E,\quad e\mapsto e^{-1}.$$

اگر e یك یال باشد، رئوس $o(e)$ و $\tau(e)$ به‌ترتیب «رأس آغازی e» و «رأس پایانی e» هستند. یال e^{-1} «وارون» یال e است. لازم است که نگاشتها به‌ازای هر یال e در شرایط زیر صدق کنند

$$(e^{-1})^{-1}=e,\ e\neq e^{-1},\ o(e^{-1})=\tau(e),\ \tau(e^{-1})=o(e).$$

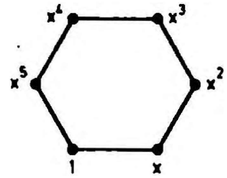
یك مسیر α در Γ دنباله‌ای از یالهای $e_1,\dots,e_n$ است به طوری که به‌ازای $1\leqslant i<n$، $o(e_{i+1})=\tau(e_i)$. مسیر α «بسته» است اگر $\tau(e_n)=o(e_1)$ و α «ساده» است اگر رئوس $o(e_1),\dots,o(e_n)$ همگی متمایز باشند. مسیر α «تحویل یافته» است اگر هیچ e_{i+1} برابر با e_i^{-1} نباشد. «مدار»، یك مسیر بستهٔ سادهٔ تحویل یافته است.

هنگامی که گرافی را در صفحه «رسم می‌کنیم»، هر رأس با یك نقطهٔ توپر مشخص می‌شود. همان‌طور که معمول است، برای هر زوج $\{e,e^{-1}\}$ از یالها تنها یك کمان رسم می‌کنیم. ما e و e^{-1} را به‌عنوان نمایشگرهای کمان با دو جهت مخالف تلقی می‌کنیم. بنابر این گرافی با ضوابط $V=\{u,v\}$، $E=\{e,e^{-1}\}$، $u=o(e)$ و $v=\tau(e)$ را چنین نمایش می‌دهیم



اگر G گروهی مفروض با نمایش $G=\langle X;R\rangle$ باشد، گراف یا نمودار کیلی G عبارت است از $\Gamma(G,X)$ که چنین تعریف می‌شود: رئوس $\Gamma\langle G,X\rangle$ عناصر G هستند. برای هر $g\in G$ و هر $y\in Y=X\cup X^{-1}$ یك یال $e=(g,gy;y)$ با رأس آغازی g و رأس پایانی gy وجود دارد. وارون e، $e^{-1}=(gy,g;y^{-1})$ است. (گراف حاصل تا حد زیادی به نمایش انتخاب شده برای گروه بستگی دارد.) کیلی یالهای مربوط به مولدهای مختلف را به‌رنگهای مختلف در نظر می‌گرفت. حال گراف گروهها و نمایشهای مذکور در بالا را بررسی می‌کنیم. برای گروههای با مولدهای x و y، به‌جای رنگهای مختلف از خط پر و خط‌چین استفاده می‌کنیم.

برای $G=\langle x;x^6=1\rangle$، گراف خیلی ساده است

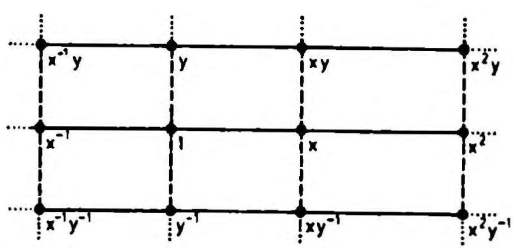


شکل ۱

برای گروه دوری نامتناهی $C=\langle x\rangle$، $\Gamma(C,\{x\})$ عبارت است از مسیر از دو طرف نامتناهی زیر

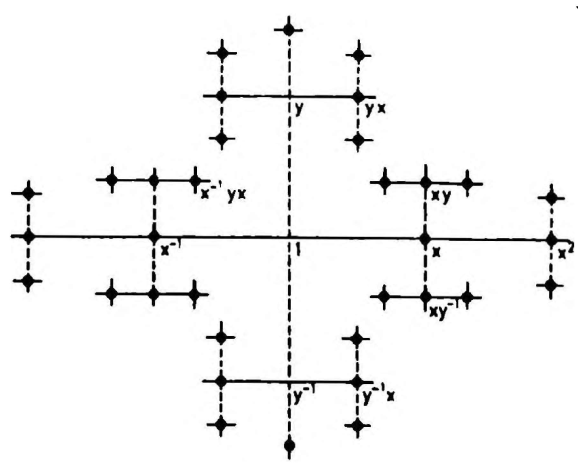
شکل ۲

برای گروه آبلی آزاد بر دو مولد $A=\langle x,y;xy=yx\rangle$، گراف $\Gamma(A,\{x,y\})$ عبارت است از «یك شبکهٔ نامتناهی که رأسهایش نقاط با مختصات صحیح هستند».



شکل ۳

برای گروه آزاد $F=\langle x,y\rangle$، $\Gamma(F,\{x,y\})$ عبارت است از



شکل ۴

درخت، یك گراف همبند ناتهی است که هیچ مداری ندارد. چون هر واژهٔ تحویل یافته عضو یکتایی از F را نشان می‌دهد درمی‌یابیم که $\Gamma(F,\{x,y\})$ درخت است. به‌طور کلی اگر $F=\langle X\rangle$ گروه آزاد بر مجموعهٔ X باشد، $\Gamma(F,X)$ درخت است.

اگر G یك گروه و Γ یك گراف باشد، یك عمل G روی Γ همریختیی از G به گروه خودریختهای Γ است. اگر $g\in G$ و v یك رأس Γ باشد، تصویر v تحت g را با gv نشان می‌دهیم. همین‌طور تصویر یال e تحت خودریختی مربوط به g را به‌صورت ge می‌نویسیم. اگر $G=\langle X;R\rangle$ و $\Gamma=\Gamma(G,X)$، آنگاه یك عمل طبیعی G بر Γ هست که چنین تعریف می‌شود: g، رأس h را (که عضوی از G است) به‌حاصلضرب gh می‌فرستد و $g(h,hx^{\epsilon};x^{\epsilon})=(gh,ghx^{\epsilon};x^{\epsilon})$.

اگر G گروهی مفروض، عمل کننده بر یك گراف Γ باشد، می‌گوییم G بدون وارون‌سازی، عمل می‌کند اگر برای هر یال e از Γ داشته باشیم $ge\neq e^{-1}$. در بحث از عمل یك گروه بر یك گراف همواره فرض می‌کنیم که عمل بدون وارون‌سازی است. G به‌طور آزاد بر Γ عمل می‌کند اگر (بنابر قراردادمان G بدون وارون‌سازی عمل کند و) برای هر $g\neq 1$ و همهٔ رئوس v از Γ، $gv\neq v$. (هر عضو نابدیهی همهٔ رئوس را حرکت دهد.) گوییم G بدون نقطهٔ ثابت بر Γ عمل می‌کند اگر هیچ رأسی از Γ توسط همهٔ عناصر G ثابت نگهداشته نشود.

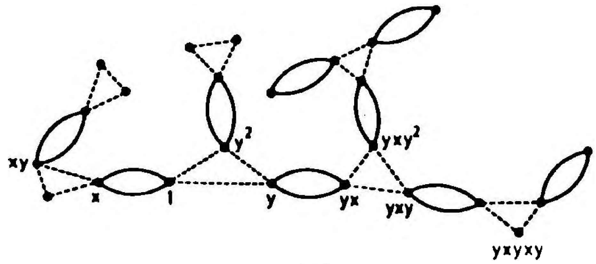
توجه کنید که $G=\langle X;R\rangle$ بر نمودار کیلی‌اش، $\Gamma\langle G,X\rangle$، به‌طور آزاد عمل می‌کند. پس اگر F گروهی آزاد باشد، بر یك درخت به‌طور آزاد عمل می‌کند. اولین نتیجهٔ اساسی نظریهٔ سر این است که عکس این مطلب نیز درست است. (مرجع تمام حکمهایی که دربارهٔ گروههای عمل کننده بر درختها بیان می‌کنیم رسالهٔ سر [۴] است.)

قضیهٔ I. گروه G آزاد است اگر وتنها اگر G بر یك درخت T به‌طور آزاد عمل کند.

اگر G بر یك گراف به‌طور آزاد عمل کند، هر زیر گروه G نیز چنین می‌کند. پس یك نتیجهٔ مستقیم قضیه این است که زیر گروه یك گروه آزاد، آزاد است.

برای اینکه تعداد بیشتری از نتایج را مورد بحث قرار دهیم احتیاج به تعریف چند ساختمانِ مبتنی بر نظریهٔ گروهها داریم. تصور کنید $H=\langle X_1;R\rangle$ و $K=\langle X_2;S\rangle$ گروههایی باشند که در آنها X_1 و X_2 مجزا هستند. حاصلضرب آزاد H و K، گروه $H*K=\langle X_1\cup X_2;R\cup S\rangle$ است. یك نکتهٔ اساسی این است که هر عنصر غیرهمانی w از حاصلضرب آزاد، نمایش منحصر به فردی به شکل حاصلضرب $w=g_1\dots g_n$ دارد که در آن هر g_i مخالف ۱ است، هر g_i عنصری از H یا K است، وعناصر متوالی g_i و g_{i+1} متعلق به گروههای مختلف‌اند. فرض کنید C_n گروه دوری از مرتبهٔ n را نشان دهد. بخشی از گراف گروه $G=\langle x,y;x^2=1,y^3=1\rangle$، که حاصلضرب آزاد C_2*C_3 است، در زیر نشان داده شده‌است.

در توصیف نمایشها قراردادهای زیر را می‌پذیریم. فرض کنید نمایشی برای گروه G انتخاب شده است. نماد $\langle G,y_1,\dots;s_1=1,\dots\rangle$ همهٔ مولدها و روابط تعریف کنندهٔ G را همراه با تمامی مولدها و روابط تعریف کنندهٔ اضافی که مشخص



شکل۵

شده‌اند نشان می‌دهد. فرض می‌شود که هر مولد اضافی متمایز از مولدهای G باشد.

می‌توان مفهوم حاصلضرب آزاد را به‌طریق زیر تعمیم داد. فرض کنید H و K گروههایی باشند با زیر گروههای $A\subseteq H$ و $B\subseteq K$، و $\varphi:A\rightarrow B$ یك یکریختی باشد. حاصلضرب آزاد H و K که زیرگروههای A و B را طبق یکریختی φ ادغام می‌کند، عبارت است از گروه

$$G=\langle H*K;a=\varphi(a),a\in A\rangle.$$

حاصلضرب آزاد معمولی حالت خاصی از این حاصلضرب است که در آن، A و B زیر گروههای همانی هستند. گفته می‌شود گروه G به‌طور نابدیهی یك حاصلضرب آزاد با ادغام است هر گاه A و B به‌ترتیب زیر گروههای سرهٔ H و K باشند. نکتهٔ اساسی (و غیر بدیهی) دربارهٔ حاصلضربهای آزاد باادغام این است که H و K به‌وسیلهٔ نگاشتهای بدیهی $h\mapsto h$ و $k\mapsto k$ در G نشانده می‌شوند.

حال فرض می‌کنیم یك گروه H با زیر گروههای A و B و یکریختی $\varphi:A\rightarrow B$ در دست داریم. گروه

$$G=\langle H,t;t^{-1}at=\varphi(a),a\in A\rangle$$

را در نظر می‌گیریم. این گروه با افزودن یك مولد جدید t و روابطی که t، A را با B برطبق یکریختی φ مزدوج می‌کند، به‌دست آمده است. گروه G یك توسیع HNN از H خوانده می‌شود و کلمهٔ HNN اول اسامی سه نفری[1] است که این ساختمان را اولین بار مورد مطالعه قرار دادند. گروه H به‌وسیلهٔ نگاشت $h\mapsto h$ در G نشانده می‌شود. زیر گروههای A و B زیرگروههای مرتبط نامیده می‌شوند. حال معرفی ساختمان توسیع HNN وحاصلضرب آزاد باادغام، که در بخشی از نظریهٔ گروههای نامتناهی بسیار مطرح‌اند، به‌انجام می‌رسد و به گروههای عمل کننده بر گرافها بازمی‌گردیم.

فرض می‌کنیم یك گروه G بر یك گراف Γ عمل می‌کند. (مانند همیشه فرض می‌کنیم که G بدون وارون‌سازی عمل می‌کند.) می‌توانیم گراف خارج قسمت Γ/G را به‌صورتی که شرح آن می‌آید تشکیل دهیم. رابطه‌ای هم‌ارزی روی رئوس Γ به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم: $v_1\sim v_2$ اگر به‌ازای یك $g\in G$، $v_2=gv_1$، یعنی $v_1\sim v_2$ اگر v_1 و v_2 تحت عمل G در یك مدار قرار گیرند. همین‌طور برای یالها، تعریف می‌کنیم $e_1\sim e_2$ اگر به‌ازای یك $g\in G$، $e_2=ge_1$. توجه کنید که چون G بدون وارون‌سازی عمل می‌کند، هرگز $e\sim e^{-1}$

1. G. Higman, B. H. Neumann, Hanna Neumann

برقرار نیست. ساختار خارج قسمت Γ/G تحت این روابط هم‌ارزی به‌طور واضح یک گراف است.
پاره‌خط، عبارت است از گراف

متشکل از یک زوج $\{e, e^{-1}\}$ از یالها با نقاط انتهایی متمایز. حلقه، گرافی است دارای فقط یک رأس و یک زوج $\{e, e^{-1}\}$ از یالها

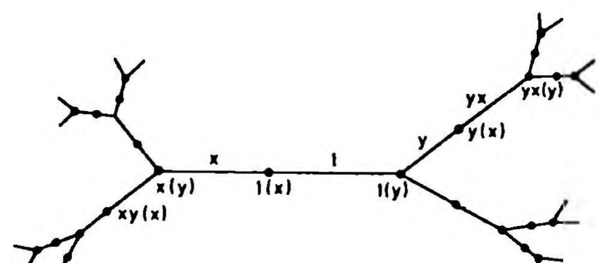
سر قضیهٔ مشخص‌سازی زیر را ثابت می‌کند.

قضیهٔ II. (۱) گروه G به‌طور نابدیهی یک حاصلضرب آزاد باادغام است اگر و تنها اگر درختی چون T وجود داشته باشد که G بر آن بدون نقطهٔ ثابت عمل کند به‌طوری که گراف خارج قسمت T/G یک پاره‌خط باشد.

(۲) گروه G یک توسیع HNN است اگر و تنها اگر درختی چون T وجود داشته باشد که G بر آن عمل کند به‌طوری که گراف خارج قسمت T/G یک حلقه باشد.

رابطهٔ بین G و T از آنچه در قضیهٔ فوق بیان شده بسیار خاص‌تر است. اگر G بر درختی چون T عمل کند به‌طوری که T/G یک پاره‌خط باشد، یک یال e از T با نقاط انتهایی u و v را اختیار می‌کنیم. فرض می‌کنیم $H=\mathrm{Stab}(u)$، یعنی H پایدارساز u تحت عمل G و به عبارت دیگر زیرگروه G متشکل از عناصری که u را ثابت نگاه می‌دارند، باشد. نیز فرض می‌کنیم $K=\mathrm{Stab}(v)$ و $A=\mathrm{Stab}(e)$. در این‌صورت تجزیهٔ G به حاصلضرب آزاد با ادغام عبارت است از $G=\langle H*K\,;A=A\rangle$. (اگر هر یک از H و K تمام G باشد، آنگاه u یا v به‌وسیلهٔ G ثابت می‌ماند و تجزیه بدیهی است.)

به‌عکس، فرض کنیم یک گروه G همراه با یک تجزیه به حاصلضرب آزاد با ادغام، $G=\langle H*K\,;A=\varphi(A)\rangle$، به ما داده باشند. درخت مطلوب T چنین به‌دست می‌آید. فرض می‌کنیم G/H مجموعهٔ هم مجموعه‌های H در G را نشان دهد، و نماد مشابهی برای هم‌مجموعه‌های K و A اختیار می‌کنیم. از نماد $\amalg$ برای نمایش اجتماع مجزای دو مجموعه [اجتماع دو مجموعهٔ مجزا] استفاده می‌کنیم. مجموعهٔ رئوس T اجتماع مجزای $G/H \amalg G/K$ است. مجموعهٔ یالهای T اجتماع مجزای $G/A \amalg \overline{G/A}$ است که در آن $\overline{G/A}$ نسخهٔ دیگری از G/A است. وارون یال gA، $\overline{gA}$ است. رأس آغازی gA، gH است و رأس پایانی gA، gK. بخشی از T در حالت $G=\langle x\,;x^2=1\rangle * \langle y\,;y^3=1\rangle$ در شکل بعدی نمایش داده شده است.



شکل ۶

ثابت می‌شود که اگر G گروهی شمارا باشد که متناهیاً تولید شده نباشد، درختی چون T وجود دارد که G بر آن بدون نقطهٔ ثابت عمل می‌کند. اما در مورد گروههای متناهیاً تولیدشده قضیهٔ زیر برقرار است.

قضیهٔ III. گروه متناهیاً تولیدشدهٔ G بر درخت T بدون نقطهٔ ثابت عمل می‌کند اگر و تنها اگر G یا به‌طور نابدیهی یک حاصلضرب آزاد باادغام باشد و یا یک توسیع HNN.

نظریهٔ گروههای عمل کننده بر درختها روشی بسیار قدرتمند برای نشان دادن این مطلب است، که گروههای $\mathrm{SL}_2(R)$ یا $\mathrm{GL}_2(R)$ حاصلضرب آزاد با ادغام هستند، که در آنها R زیرحلقهٔ مناسبی از یک هیأت K با ارزهٔ گسستهٔ v است. مثلاً می‌توان قضیهٔ زیر را که متعلق به ناگائو[1] است به‌دست آورد. فرض می‌کنیم k هیأتی باشد و $G=\mathrm{GL}_2(k[t])$، که در آن t یک مجهول بر k است. قرار می‌دهیم

$$B=\left\{\begin{pmatrix} a & f\\ 0 & d\end{pmatrix} \,\middle|\, a,d\in k^*, f\in k[t]\right\}$$

و فرض می‌کنیم C عبارت باشد از $\mathrm{GL}_2(k)$، و قرار می‌دهیم

$$A=\left\{\begin{pmatrix} a & b\\ 0 & d\end{pmatrix} \,\middle|\, a,d\in k^*, b\in k\right\}.$$

در این‌صورت $\mathrm{GL}_2(k[t])=\langle B*C\,;A=A\rangle$.

ازسوی دیگر، سر نشان می‌دهد که تحت هر عمل $\mathrm{SL}_3(\mathbf{Z})$ بر یک درخت، لزوماً یک نقطهٔ ثابت وجود دارد. بنابراین $\mathrm{SL}_3(\mathbf{Z})$ تجزیه‌ای به‌صورت حاصلضرب آزاد باادغام یا به‌صورت توسیع HNN ندارد.

هرگاه G بر درختی چون T عمل کند، هر زیرگروه G نیز بر T عمل می‌کند. نظریهٔ گروههای عمل کننده بر درختها روش قدرتمندی است برای اثبات قضایایی در مورد ساختار زیرگروههای حاصلضربهای آزاد با ادغام یا توسیعهای HNN، اما در اینجا بحثی ازجزئیات نمی‌توانیم بکنیم.

اینک به‌مفهوم تعداد پایانهای یک گراف بازمی‌گردیم. فرض کنیم Γ گراف همبندی با تنها تعدادی متناهی یال متلاقی در هر رأس باشد، و یک رأس v_0 به‌عنوان مبدأ انتخاب شده باشد. نیز فرض کنیم Γ_n نشان دهندهٔ تمامی یالها و رئوسی باشد که توسط مسیری با طول نابیشتر از n به v_0 متصل شده‌اند و c_n تعداد مؤلفه‌های نامتناهی $\Gamma\setminus\Gamma_n$ باشد. واضح است که $c_{i+1}\geqslant c_i$. تعداد پایانهای Γ عبارت است از $e(\Gamma)=\lim_{n\to\infty} c_n$.

اگر G یک گروه متناهیاً تولیدشده باشد، $G=\langle X\,;R\rangle$ که در آن X متناهی است، فرض می‌کنیم $\Gamma=\Gamma(G,X)$ گراف G نسبت به این نمایش باشد. تعداد پایانهای G را به‌عنوان تعداد پایانهای $\Gamma(G,X)$ تعریف می‌کنیم. تعداد پایانهای G مستقل از نمایش متناهیاً تولیدشدهٔ انتخابی است.

محاسبهٔ تعداد پایانهای گروههایی که گرافشان را به‌عنوان مثال به‌کار بردیم آسان است. تعداد پایانهای یک گروه متناهی به‌وضوح صفر است. در مورد گروه دوری نامتناهی C، برای هر $n\geqslant 1$، $\Gamma\setminus\Gamma_n$ دقیقاً دو مؤلفه دارد؛ پس $e(C)=2$. در مورد گروه آبلی

1. Nagao

آزاد A بر دو مولد، $\Gamma\backslash\Gamma_n$ همواره یك مؤلفه دارد، پس $e(A)=1$. برای گروه آزاد F بر دو مولد (شکل ۴)، تعداد مؤلفه‌های $\Gamma\backslash\Gamma_n$ با افزایش n افزایش می‌یابد. (تعداد مؤلفه‌های $\Gamma\backslash\Gamma_n$ برابر است با $(4\cdot 3^{n-1})$.) پس $e(F)=\infty$. از روی گراف حاصلضرب آزاد $C_2 * C_2$ (شکل ۵) درمی‌یابیم که $C_2 * C_2$ نیز تعدادی نامتناهی پایان دارد.

مراجع در مورد تمامی نتایجی که در بارهٔ پایانهای گروهها ذکر می‌کنیم، رساله‌های استالینگز [۵] و کوهن [۲] هستند. ثابت می‌شود که اگر G گروهی متناهیاً تولیدشده و نامتناهی باشد، آنگاه تعداد پایانهای G، یك، دو، یا بینهایت است. نیز، اگر H زیر گروهی از G با ضابطهٔ $[G:H]<\infty$ باشد، آنگاه تعداد پایانهای H و G مساوی است.

تعریف دیگری از تعداد پایانهای G را به طور خلاصه بیان می‌کنیم. فرض می‌کنیم $\mathcal{B}(G)$ مجموعهٔ همهٔ زیرمجموعه‌های G باشد، و $\mathcal{B}(G)$ را به‌صورت یك حلقهٔ بولی تحت اعمال تفاضل متقارن (که با + مشخص می‌شود) و اشتراك درنظر می‌گیریم. رابطهٔ هم‌ارزی تقریباً مساوی را بر $\mathcal{B}(G)$ به‌صورت $A\doteq B$، اگر تفاضل متقارن $A+B$ متناهی باشد، تعریف می‌کنیم. حال G بر $\mathcal{B}(G)$ با ضرب از سمت راست عمل می‌کند؛ عنصر g مجموعهٔ A را به Ag می‌فرستد. زیر مجموعهٔ A از G تقریباً ناورداست اگر برای هر $g\in G$، $A\doteq Ag$. مجموعهٔ $\mathcal{A}(G)$ متشکل از همهٔ زیر مجموعه‌های تقریباً ناوردای G زیرحلقه‌ای از $\mathcal{B}(G)$ است. نیز $\mathcal{A}(G)$ دربرگیرندهٔ مجموعهٔ $\mathcal{F}$ متشکل از همهٔ زیر مجموعه‌های متناهی G است و $\mathcal{F}$ ایده‌آلی از حلقهٔ $\mathcal{A}(G)$ است. می‌توانیم خارج قسمت $\mathcal{E}(G)=\mathcal{A}(G)/\mathcal{F}$ را تشکیل دهیم. حال $\mathcal{E}(G)$ یك فضای برداری بر هیأت دوعنصری $Z/2Z$ است، و تعداد پایانهای G، بعد $\mathcal{E}(G)$ است.

به یك معنا، «اغلب» گروههای نامتناهی متناهیاً تولیدشده تنها یك پایان دارند. استالینگز قضیهٔ ساختاری زیر را درمورد گروههای متناهیاً تولیدشده با بیش از یك پایان ثابت کرد.

قضیهٔ IV. گروه متناهیاً تولیدشدهٔ G بیش از یك پایان دارد اگر و تنها اگر G یا به‌طور نابدیهی حاصلضرب آزادی، باادغام باشد یا یك توسیع HNN باشد که درآن، زیرگروههای ادغام شده یا مرتبط، متناهی باشند.

فرض می‌کنیم $G=\langle X;R\rangle$. در اثبات قضیهٔ ساختاری فوق، گراف $\Gamma=\Gamma\langle G,X\rangle$ نقشی اساسی دارد. یك زیرمجموعهٔ $B\subseteq G$ را می‌توان به‌عنوان مجموعه‌ای از رئوس Γ درنظر گرفت. «دوگان مرز B»، که به‌شکل $\delta(B)$ نشان داده می‌شود، عبارت است از مجموعهٔ یالهایی که دقیقاً یك رأس در B دارند. نکتهٔ مهم این است که B تقریباً ناورداست اگر و تنها اگر $\delta(B)$ متناهی باشد. کاربردهای این قضیهٔ ساختاری درمقدمه موردبحث قرار گرفتند.

استالینگز مفهوم ترکیبیاتی زیر را ارائه کرد. یك ساختار دوقطبی بر یك گروه G، افرازی چون G به پنج زیر مجموعهٔ مجزای $A, EE, EE^*, E^*E, E^*E^*$ است که در اصول موضوع زیر صدق می‌کنند. (حروف X، Y، Z به‌جای حروف E یا E^* به‌کار می‌روند با این قرارداد که $X=(X^*)^*$ و غیره.)

(۱) A زیر گروهی از G است.

(۲) اگر $a\in A$ و $g\in XY$، آنگاه $ga\in XY$.

(۳) اگر $g\in XY$، آنگاه $g^{-1}\in YX$.

(۴) اگر $g\in XY$ و $h\in Y^*Z$، آنگاه $gh\in XZ$.

(۵) G به‌وسیلهٔ عناصری چون g که تحویل‌ناپذیرند تولید می‌شود. منظور از تحویل‌ناپذیری g این است که آن را نمی‌توان به‌شکل حاصلضرب $g=hk$ با ضابطهٔ $h\in XY$، $k\in Y^*Z$ نوشت.

(۶) $EE^*\neq\varnothing$.

این اصول موضوع ممکن است مرموز به‌نظر برسند ولی با توجه به حالتی که G یك حاصلضرب آزاد، مثلاً $G=H*K$، است انگیزهٔ انتخاب آنها معلوم می‌شود. همان‌طور که قبلاً اشاره شد، هر عنصر $w\neq 1$ از G نمایش یکتایی به‌شکل حاصلضرب $w=g_1\dots g_n$ دارد که درآن هر g_i در یکی از زیر گروههای H یا K است، هر g_i مخالف ۱ است و هردو g_i و g_{i+1} متوالی از گروههای مختلف می‌آیند. فرض می‌کنیم $A=\{1\}$ و، اگر w مثل بالا باشد، قرار می‌دهیم $w\in XY$ که در آن

$X=E$ اگر $g_1\in H$ درحالی که $X=E^*$ اگر $g_1\in K$،

$Y=E$ اگر $g_n\in H$ درحالی که $Y=E^*$ اگر $g_n\in K$.

خوانندهٔ آشنا با حاصلضرب آزاد به‌آسانی می‌تواند این اصول موضوع را تحقیق کند. در حالت کلی، قضیهٔ مشخص‌سازی زیر برقرار است.

قضیهٔ V. گروه G یك ساختار دوقطبی دارد اگر و تنها اگر G یا به‌طور نابدیهی یك حاصلضرب آزاد با ادغام باشد ویا یك توسیع HNN.

هم نظریهٔ پایانها وهم نظریهٔ گروههای عمل‌کننده بردرختها نظریه‌هایی فراگیر [سراسری] هستند. ارتباطی بین گروه G و یك گراف «بزرگ» Γ برقرار می‌شود که از روی آن می‌توان نتایجی در بارهٔ G به‌دست آورد. به نظریهٔ نمودارهای حذفی باز می‌گردیم، که نظریه‌ای «موضعی» است.

به‌جای نوشتن نمایشها به‌شکل $G=\langle X; r_1=1, r_2=1,\dots\rangle$ اینك می‌نویسیم $G=\langle X; r_1, r_2,\dots\rangle$ ومی‌گوییم که هر r_i یك رابطه معرف است. از این نماد دریافت می‌شود که G با مساوی یك قرار دادن هر r_i تعریف می‌شود. هر r_i عنصری از گروه آزاد $F=\langle X\rangle$ است و اگر N بستار نرمال $R=\{r_1,r_2,\dots\}$ در F باشد، آنگاه $G=F/N$. عنصری چون w از F عضو همانی G را نمایش می‌دهد اگر وتنها اگر $w\in N$، واین‌چنین است اگر و تنها اگر w حاصلضربی از مزدوجهای عناصر $R^{\pm 1}$ باشد.

دراینجا مسألهٔ فنی کوچکی پیش می‌آید. عنصر u از F به‌طور دوری تحویل یافته است اگر اولین و آخرین حروف u وارون یکدیگر نباشند. واضح است که هر واژهٔ F با یك عنصر به‌طور دوری تحویل یافته (یکتا) مزدوج است. اگر فرض کنیم همهٔ مجموعه‌های R از روابط معرفی که ما بررسی می‌کنیم متقارن شده هستند کارمان راحت‌تر خواهد بود. منظور از اینکه R متقارن شده است، این است که اگر $r\in R$ آنگاه r به طور دوری تحویل یافته

است و همهٔ جایگشتهای دوری r و r^{-1} متعلق به R هستند. پس یك واژهٔ w در بستار نرمال N از R است اگر و تنها اگر w حاصلضربی از مزدوجهای عناصر R باشد، یعنی به‌ازای $r_i\in R$ داشته باشیم

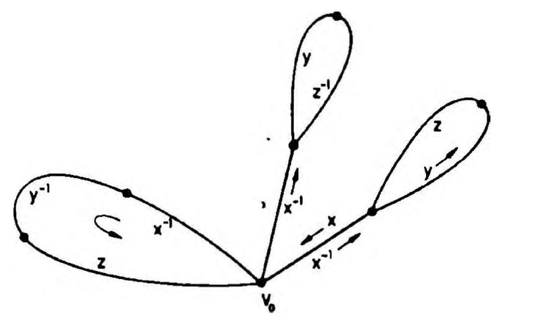
$$w=c_1r_1c_1^{-1}\cdots c_nr_nc_n^{-1}. \qquad (*)$$

می‌خواهیم نموداری چون M رسم کنیم که نشان دهد چگونه واژهٔ خاص w با حاصلضرب خاص (*) در گروه آزاد F برابر است. نمودار را برای مثال $F=\langle x,y,z\rangle$ و

$$w=(x^{-1}yzx)(x^{-1}z^{-1}yx)(x^{-1}y^{-1}z) \qquad (**)$$

رسم می‌کنیم.

نمودار M را در صفحه بدین‌صورت رسم می‌کنیم: یك نقطهٔ پایهٔ v_0 در صفحه انتخاب می‌کنیم. برای هر جملهٔ $c_ir_ic_i^{-1}$ در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت یك «ساقه» که از v_0 به یك رأس v_i برود و یك حلقه در v_i اختیار می‌کنیم. ساقه‌را با عنصر c_i و حلقه را با r_i نامگذاری کرده یالها را طوری تقسیم می‌کنیم که هر یال با یك مولد یا وارونش نامگذاری شده باشد. قرارداد نامگذاری ما طوری است که اگر یال e نام u دارد، آنگاه نام e^{-1}، u^{-1} خواهد بود. در مورد مثال ما نمودار چنین است.

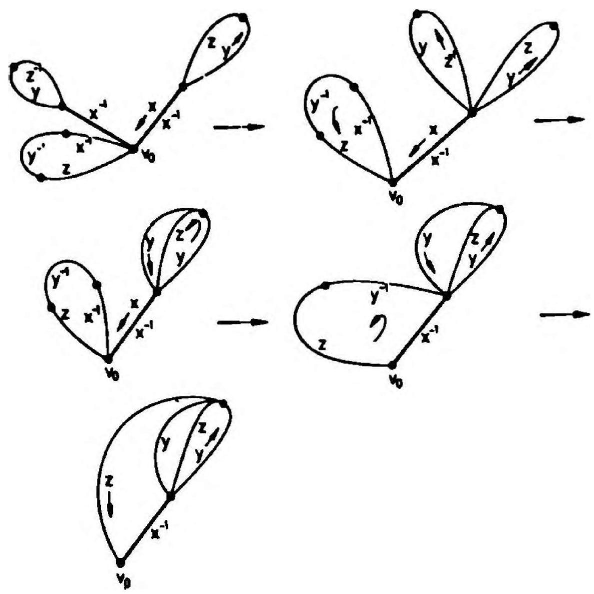


شکل۷

(اگر عنصر تزویج کننده c_i عنصر همانی باشد، پایهٔ حلقه مربوط به r_i در v_0 خواهد بود.)

براساس نحوهٔ ترسیم نمودار، اگر ازنقطهٔ پایهٔ v_0 آغاز کنیم و مرز M یعنی ∂M را درخلاف جهت عقربه‌های ساعت بپیماییم و با اولین یال e_0 برای جملهٔ $c_1r_1c_1^{-1}$ شروع کنیم، متوالیاً $c_1r_1c_1^{-1}$ وغیره را خواهیم خواند. حال حاصلضرب (*) بدون حذف لزوماً تحویل یافته نیست. در چنین حالتی یالهای متوالی e و f در ∂M با نامهای وارون وجود دارند. حذف از لحاظ هندسی عبارت است از یکی گرفتن یالهای متوالی با نامهای وارون. بنابراین برای اجرای عمل حذف ما نمودار را مانند شکل ۸ «می‌دوزیم». درنمودار نهایی، روی مرز M شکل تحویل یافتهٔ w را می‌بینیم.

خواننده توجه خواهد کرد که نامها روی مرزهای نواحی با تقریب جایگشت دوری حفظ می‌شوند. حتی مثال ساده‌ای که ارائه شد نشان می‌دهد که حذف عملی «دوبعدی» است. ناحیهٔ مربوط به رابط $y^{-1}z$ هیچ یالی در مرز نمودار نهایی ندارد. با وجود این، این ناحیه جزئی از نمودار است و می‌توان دربارهٔ‌اش بحث کرد.



شکل ۸

وضعیت دیگری نیز امکان دارد که در مثال ما پیش نیامد. می‌توانیم یالهای متوالی e و f در مرز M را یکی کنیم و باز هم نموداری در صفحه داشته باشیم به شرطی که ef یك مسیر بسته نباشد. اگر درساختمان نمودار نهایی، دو یال متوالی e و f با نامهای وارون وجود داشته باشد به‌طوری که ef مسیری بسته چون λ باشد، کافی است λ وهرچیز درون λ را از نمودار حذف کنیم.

برای توصیف خلاصه‌تر این ساختمان چند اصطلاح را معرفی می‌کنیم. فرض کنید R یك زیرمجموعهٔ متقارن شدهٔ گروه آزاد F باشد. R-نمودار M، یك ۲-مجتمع همبند متناهی است که درصفحه نشانده شده است و در دو شرط زیر صدق می‌کند. اول اینکه هر یال e از M با عنصری چون $\varphi(e)\neq 1$ از گروه آزاد F نامگذاری شده باشد. دوم اینکه اگر D ناحیه‌ای از M باشد و $e_1,\ldots,e_n$ مسیری باشد که به‌ترتیب یالهای مرز D را بپیماید، آنگاه $\varphi(e_1),\ldots,\varphi(e_n)$ بدون حذف تحویل یافته وعنصری از R باشد. اگر M همبند ساده باشد می‌گوییم w یك نام مرزی M است اگر مسیری چون $e_1,\ldots,e_n$ وجود داشته باشد که به ترتیب یالهای ∂M را بپیماید و $\varphi(e_1),\ldots,\varphi(e_n)$ بدون حذف تحویل یافته و برابر w باشد.

مرجع ما درمورد نتایج مربوط به‌نمودارهای حذفی رسالهٔ [۳] است. این نتیجه‌را در این زمینه داریم:

قضیهٔ VI. فرض کنید $F=\langle X\rangle$ یك گروه آزاد باشد، ونیزفرض کنید $G=\langle X;R\rangle$ که در آن، R متقارن شده است. یك واژهٔ تحویل‌یافته w از F عنصرهمانی G را نمایش می‌دهد اگروتنها اگر یك R-نمودار همبند سادهٔ M با نام مرزی w در صفحه وجود داشته باشد.

می‌توان نمودار M را به‌عنوان «برش» بسیارکوچکی از نمودار کیلی کامل $\Gamma(G,X)$ درنظر گرفت. مقدار اطلاعاتی که M در بر دارد آنقدرکوچك هست که بتواند درصفحه قرار بگیرد.

ازآنجاکه شیوهٔ ترسیم ما کاملاً کلی است نمی‌توانیم امیدوار

باشیم که برای بررسی خواص گروه $G = \langle X;R \rangle$ نمودارهای حذفی را به‌کار گیریم مگر آنکه فرضهایی درمورد R موجود باشد کــه در خصوصیات هندسی R-نمودارها منعکس شود. گرچه نمودارها برای بررسی انواع گوناگونی از گروهها به‌کار رفته‌اند، موفقترین کاربرد آنها در قلمروی «نظریهٔ حذفهای کوچك» بوده است که اینك به‌توضیح آن می‌پردازیم. فرضهایی کــه اتخاذ مــی‌شود تــا هنگامی که تعبیر هندسیشان ملاحظه نشده است ممکن است قــدری عجیب به‌نظر آیند.

فرض می‌کنیم $F = \langle X \rangle$ گروه آزاد بر X بــاشد. اگــر w واژهٔ تحویل یافته‌ای از F بــاشد، می‌نویسیم $w \equiv uv$ هرگاه w حاصلضرب بدون حذف زیر واژه‌هایش، u و v، باشد. نیز فرض می‌کنیم R زیــر مجموعهٔ متقارن‌شده‌ای از F بــاشد. اگــر عناصر $r_1 \equiv b_1 c^{-1}$ و $r_2 \equiv cb_2$ از R با ضابطهٔ $r_2 \neq r_1^{-1}$ مــوجــود باشند، آنگاه c یك قطعه (نسبت به R) نامیده می‌شود. برای عدد صحیح مثبت p تعریف می‌کنیم

شرط $C(p)$: هیچ عنصری از R حاصلضرب تعدادی کمتر از p قطعه نیست.

بی‌درنگ به‌معنای هندسی فرض $C(p)$ بازمی‌گردیم. تصور کنید M یك R-نمودار باشد. در ساختن نمودارها مناسب بود که هر یال را با یك مولد یا وارونش نامگذاری کنیم. اینك مــی‌خواهیم همهٔ رئوس غیر لازم را حذف کنیم. فرض می‌کنیم M رأسی چون v از درجهٔ دو داشته باشد که یالهای e و f بــا نــامهای، به‌ترتیب، b و c را ازهم جدا کند. در این‌صورت می‌تــوانیــم رأس v را حذف کنیم و e و f را به‌یك یال با نام (bc) تبدیل کنیم. بنابراین از این بــه‌بعد فرض مــی‌کنیم که M هیچ رأسی از درجهٔ دو ندارد.

اینك نــام c بــر یك یــال درونی e از M را بــررسی می‌کنیم.

تصور کنید e برمرز دوناحیهٔ متمایز D_1 و D_2 قرار گرفته باشد. دراین‌صورت D_1 یك نام مرزی $r_1 \equiv b_1 c^{-1}$ و D_2 یك‌نام مرزی $r_2 \equiv cb_2$ دارد. پس c بنابرتعریف یك‌قطعه است، مگر در حالتی که احیاناً $r_2 = r_1^{-1}$. اگر این حــالت پیش آید، حــذف یال e ناحیه‌ای چون D را نتیجه می‌دهدکه دارای نام مرزی برابر با ۱ در F است. آنگاه می‌توانیم مرز D را «بدوزیم» و نمودار M' را به‌دست آوریم که مرزش همان مرز M است ولی نواحی کمتری دارد. بنابراین می‌توانیم تنهــا نمودارهایی را در نظر بگیریم که تحــویل یــافته‌اند بــه‌این‌معناکه نام هــر یال درونی یك قطعه است.

فرض می‌کنیم M یك R-نمودار باشد به‌طوری که R در شرط $C(p)$ صدق کند. دیده‌ایم که می‌توانیم فرض کنیــم M رأسی از درجهٔ دو ندارد و نام هر یال درونی، یك قطعــه است. حال معنای هندسی شرط $C(p)$ روشن است. اگر مرز یك ناحیــهٔ درونی D از M بــه‌تــرتیب بــا مسیر $e_1, \ldots, e_k$ پیمــوده شــود، آنگــاه $\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_k)$ یك‌تجزیهٔ نام‌مرزی به‌شکل حاصلضرب قطعه‌هاست و در نتیجه $k \geqslant p$. درجهٔ یك ناحیهٔ D از M تعــداد یالهای مرز M است. هر ناحیهٔ درونی D از M دارای درجــهٔ ناکمتر از p است. برای مشخص‌شدن موضوع فرض کنیــد R در $C(6)$ صدق می‌کند. اگرخواننده چند نقشهٔ مسطح‌رسم‌کندکه در آنها همهٔ رئوس درونی از درجهٔ حداقل سه باشند و همــهٔ نواحی درونی حداقــل درجهٔ شش داشته‌باشند، خواهد دیدکه چنین نقشه‌هــایی به‌سرعت «به‌سمت مرزگسترش می‌یابند». این پیشروی به‌سوی مرز است‌که امکان می‌دهد احکامی را درمورد گروههایی که نمایشهایی صادق‌در یك شرط مربوط به‌حذفهای کوچك دارند ثابت‌کنیم.

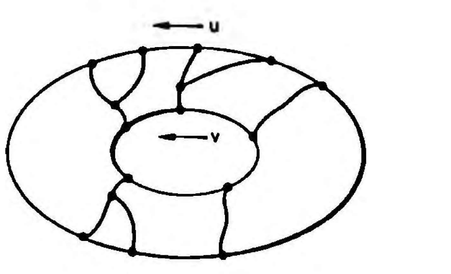
یك ویژگی اصلی کار با نقشه‌های واقع در صفحــه، دوگانی صفحه‌ای است. مثلا ممکن است حدس بزنیم که فرضی «دوگان» $C(p)$ وجود داردکــه تضمین می‌کندکه درجــهٔ هر رأس درونی حداقل q است. حقیقتاً نیز چنین است، و این فرض را می‌توان به طور جبری چنین فرمولبندی کرد

شرط $T(q)$: اگر $r_1, \ldots, r_h$ عناصری از R باشند به طوری کــه $3 \leqslant h < q$ و هر $r_{i+1} \neq r_i^{-1}$ (اندیسهــا به‌پیمانهٔ h گرفته شده‌اند) آنگاه حداقل یکی از حاصلضربهای $r_i r_{i+1}$ بدون حذف تحویل یافته است.

شرط $T(3)$ پوچ است چراکــه مــی‌توانیم فرض‌کنیم کــه درجهٔ هر رأس درونی حداقل سه‌است.

سه فرض مینیمال که تحت‌آنها می‌توان‌نظریهٔ حذفهای کوچك را «به‌کار بست» عبارت‌اند از $C(p)$ و $T(q)$ که (p, q) جوابی از $1/2 = 1/p + 1/q$ بــاشــد، یعنــی یکــی از زوجــهــای $(3,6), (4,4), (6,3)$. پس‌این‌فرضهای‌مینیمال‌در تناظر یك‌به‌یك‌اند با سه خانه‌بندی منتظم صفحه و ویژگیهای پیشروی R-نمودارهای متناظر، تعمیم‌های ترکیبیاتی ویژگیهای زیر نقشه‌های متناهــی از خانه‌بندیهای منتظم هستند.

نمودارهای حذفی برای تحقیق درمسائل دیگری نیز مفیدند. نمودار M در صفحه را طوقی نامیم هرگاه همبنــد باشد و مکمل M دقیقاً دو مؤلفــه داشته باشد. فرض می‌کنیــم u و v دو واژه در گروه $G = \langle X;R \rangle$ باشند وهیچکدام‌مساوی ۱ نباشد. دراین‌صورت، u و v عناصر مــزدوجی از G را نمــایش می‌دهند اگر و تنها اگر R-نمودار طوقی M موجود باشدطوری‌که مرزبیرونی M نام u و مرز درونی M نام v داشته‌باشد. (شکل ۹ را ببینید.) نمودار M یك نمودار تزویجی برای u و v نامیده می‌شود.



شکل ۹

انواع دیگــری از مسائل، به‌نمودارهــا بر رویه‌های فشرده

می‌انجامند. مثلا این سؤال که چه عناصری در G با یکدیگر تعویض می‌شوند، مربوط می‌شود به‌وجود خانه‌بندیهای چنبره توسط R-نمودارها. مسألهٔ یکتایی ریشه‌های دوم در G مربوط می‌شود به‌خانه‌بندیهای بطری کلاین با R- نمودارها.

بحث ما دربارهٔ نظریهٔ حذفهای کوچک بر یک گروه آزاد F بود. همچنین می‌توان نظریهٔ حذفهای کوچک را بر حاصلضربهای آزاد، حاصلضربهای آزاد باادغام، یا بر توسیعهای HNN انجام داد. برای برخی‌ازکاربردهایی که درمقدمه ذکر شد، نیاز به‌مطالعه دراین‌زمینهٔ عمومیتر داریم.

مراجع

1. Cayley, A.: The theory of groups: Graphical representations. *Amer. J. Math.* 1, 174-176 (1878).
2. Cohen, D. E.: *Groups of cohomological dimension one*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 245, Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1972.
3. Lyndon, R. C.: Schupp, P. E.: *Combinatorial group theory*. Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1977.
4. Serre, J.-P.: *Arbres, amalgames, et* SL_2. Astérique 46, Paris: Société Mathématique de France 1977.
5. Stallings, J.: *Group theory and three-dimensional manifolds*. Yale Monographs 4 New Haven: Yale University Press 1971.

* ** ** ** ** ** ** *

• Paul E. Schupp, "Groups and graphs," *Math. Intelligencer*, (4) **1** (1979) 205-214.

★ پال شوپ، دانشگاه ایلینوی در اربانا، آمریکا