اصول موضوع عددهای اصلی بزرگ، و استقلال: نگاهی دوباره به مسألهٔ پیوستار*

و. هیو وودین*
ترجمهٔ عطاءالله تقاء

چند فرشته بر سر یک سوزن جا می‌گیرند؟ برای بسیاری از ما، این یکی از نخستین پرسشهایی است که نمی‌توان بر مبنای اصول موضوع بدان پاسخ گفت.

اصول موضوعی برای توصیف اتومبیلتان بنویسید. این اصول موضوع مثلاً می‌توانند مطالب دفترچهٔ راهنمای اتومبیل شما باشند. چه بسا که رنگ اتومبیل شما را نشود از این اصول بەدست آورد؛ و از آن محتمل‌تر اینکه تعداد دفعاتی که اتومبیل شما روشن شده از اصول موضوع شما استنتاج‌پذیر نباشد. اینها نمونه‌های پیش‌پا افتادهٔ استقلال [از اصول موضوع]هستند. گودل در دههٔ ۱۹۳۰ ثابت کرد که در هر دستگاه نابدیهی قابل شمارش از اصول موضوع، گزاره‌هایی وجود دارند که براساس آن اصول موضوع، قابل اثبات یا ابطال نیستند. نخستین باری که این مطلب اهمیت عملی یافت ۳۰ سال بعد بود که کوهن نشان داد فرضیهٔ پیوستار در نظریهٔ مجموعه‌ها را نمی‌توان بااستفاده از اصول موضوع نظریهٔ مجموعه‌ها ثابت کرد. منظور ما از اصول موضوع نظریهٔ مجموعه‌ها، دستگاه اصول موضوع استاندهٔ تسرملو ـ فرنکل به‌علاوهٔ اصل موضوع انتخاب (ZFC) است. گودل ۲۰ سال پیش از آن ثابت کرده بود که فرضیهٔ پیوستار را نمی‌توان با استفاده از این اصول موضوع رد کرد. همان‌طور که رنگ اتومبیل شما از توصیف مکانیکی اتومبیل معلوم نمی‌شود، فرضیهٔ پیوستار نیز از طریق اصول موضوع نظریهٔ مجموعه‌ها قابل حصول نیست.

گودل، که پیش‌بینی می‌کرد استقلال ناگزیر خواهد بود، قبل از کار کوهن این موضوع را پیش کشید که شاید اصول موضوع عددهای اصلی بزرگ بتوانند به پرسشهایی در نظریهٔ مجموعه‌ها پاسخ دهند که جز از طریق آنها نشود به آن پرسشها جواب داد. متأسفانه، با روش توانمندی که کوهن کشف کرد، می‌شد نشان داد که حتی اصول موضوع عددهای اصلی بزرگ [این اعداد در این مقاله اغلب به‌اختصار ع.ا.ب. نامیده می‌شوند. ـ م.] هم نمی‌توانند کمکی به حل معضل فرضیهٔ پیوستار بنمایند. این بحث را نخستین‌بار لوی و سالووی ـــ مستقل از همـــ اندک زمانی بعد از کار کوهن پیش کشیدند.

آیا این پایان ماجراست؟ اکنون به‌نظر می‌رسد که پاسخ به‌وضوح منفی است. در واقع این، **تازه اول ماجراست.**

فرضیهٔ پیوستار را به طرق بسیاری صورتبندی کرده‌اند. ازجمله اینکه: برای هر زیرمجموعهٔ نامتناهی A از $\mathbb{R}$، یا تابعی دوسویی بین A و $\mathbb{N}$، یعنی مجموعهٔ اعداد طبیعی، وجود دارد یا تابعی دوسویی بین A و $\mathbb{R}$، یعنی

مجموعهٔ اعداد حقیقی.

به دوصورت *کارامد* از فرضیهٔ پیوستار که در زیر می‌آید، توجه کنید. به‌یاد آورید که مجموعه‌ای از اعداد حقیقی *بورل* است اگر بتوان آن را از گردایهٔ بازه‌های باز با تشکیل اجتماعها و اشتراکهای شمارا به‌دست آورد. مجموعه‌های افکنشی [تصویری]، مجموعه‌هایی هستند که با بستن گردایهٔ مجموعه‌های بورل تحت عملهای به‌دست‌آوردن تصویر پیوسته و گرفتن متمم تولید می‌شوند. از این‌رو، اگر $A \subset \mathbb{R}$ یک مجموعهٔ افکنشی باشد، آنگاه $\mathbb{R}\setminus A$ و $f(A)$ هم چنین‌اند، که $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تابعی پیوسته است. هر مجموعهٔ افکنشی را می‌توان به‌طور یکتا با یک مجموعهٔ بورل و تعدادی متناهی از توابع پیوسته مشخص کرد. در این مورد، تصور این است که در باغ وحش نظریهٔ مجموعه‌ای، مجموعه‌های افکنشی به‌نسبت رام هستند.

مجموعهٔ $P \subset \mathbb{R}$ بیکاست است اگر بسته باشد و شامل هیچ نقطهٔ منفردی نباشد. اینکه اگر $P \subset \mathbb{R}$ مجموعه‌ای بیکاست باشد آنگاه تابعی دوسویی بین P و $\mathbb{R}$ وجود دارد، موضوع معروفی است. پس مثالهای ناقض فرضیهٔ پیوستار نمی‌توانند مجموعه‌هایی بیکاست باشند. حکمی که اندکی دشوارتر است آن است که هیچ مثال ناقضی نمی‌تواند بورل باشد. درواقع، اگر $A \subset \mathbb{R}$ یک مجموعهٔ بورل ناشمارا باشد، آنگاه A یک زیرمجموعهٔ بیکاست دارد. اگر A مجموعهٔ دلخواهی از اعداد حقیقی باشد که شامل یک زیرمجموعهٔ بیکاست است، آنگاه تابعی دوسویی بین A و $\mathbb{R}$ وجود دارد. حال دو صورت کارامد فرضیه پیوستار را ذکر می‌کنیم:

۱. فرض کنید که $A \subset \mathbb{R}$ یک مجموعهٔ افکنشی ناشماراست. بین A و $\mathbb{R}$ یک تابع دوسویی وجود دارد.

۲. فرض کنید که $A \subset \mathbb{R}$ یک مجموعهٔ افکنشی ناشماراست. A شامل یک مجموعهٔ بیکاست است.

طبق صورت نخست، برای فرضیهٔ پیوستار هیچ مثال ناقض آسانی وجود ندارد (اگر تعریف مجموعه‌های افکنشی را آسان تلقی کنیم). صورت دوم، احتمالاً اندکی ظریفتر است. لبّ مطالب آن این است که برای فرضیهٔ پیوستار هیچ مثال ناقض آسانی وجود ندارد که آن را به‌دلیل ساده‌ای نقض کند. فرضیهٔ پیوستار به وضوح مستلزم (۱) است، ولی مستلزم (۲) نیست.

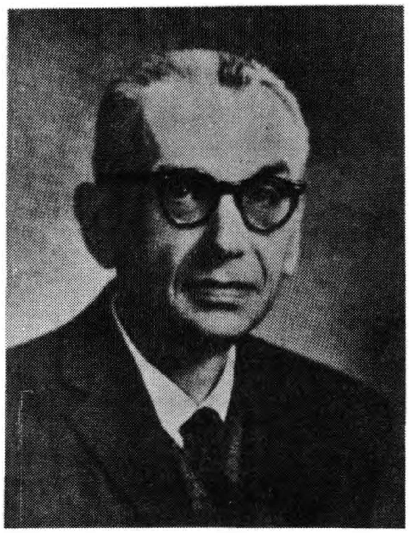
همچون خودِ فرضیهٔ پیوستار، این صورتهای کارامد آن هم بر مبنای اصول موضوع نظریهٔ مجموعه‌ها قابل حل و فصل نیستند. ولی برخلاف فرضیهٔ پیوستار، اگر برخی اصول موضوع ع.ا.ب. را بپذیریم، اثبات‌پذیر می‌شوند. پس گودل تا حدودی حق داشته است. در واقع، شاید عواقب استفاده از این اصول، ظریفتر و جالب توجه‌تر از حدی باشند که حتی گودل می‌توانسته انتظار داشته باشد.

اصول موضوع ع.ا.ب. چه هستند؟ هر اصل موضوع ع.ا.ب. بیانگر وجود یک مجموعهٔ نامتناهی بسیار عظیم است. تعریف رسمیی برای آن وجود ندارد، ولی فهرست طویلی از اصول موضوعی که عموماً آنها را اصول موضوع ع.ا.ب. به‌حساب می‌آورند، داریم. ذیلاً دو تا از چنین اصول موضوعی آمده‌اند. کاردینال κ، طبق تعریف، *قویاً دسترس‌ناپذیر است*، اگر

(الف) هرگاه X مجموعه‌ای باشد و $|X| < \kappa$، آنگاه $|Y| < \kappa$، که Y مجموعهٔ همهٔ زیرمجموعه‌های X است؛

(ب) هیچ مجموعه‌ای با عدد اصلی κ برابر با اجتماع کمتر از κ مجموعه که عدد اصلی هر یک کمتر از κ است، نمی‌باشد.

صفر قویاً دسترس‌ناپذیر است (اصول فوق به انتفای مقدم برای ۰ صادق‌اند).



گودل

کوچکترین عدد ترتیبی نامتناهی، ω، نیز قویاً دسترس‌ناپذیر است. اصل موضوعی که می‌گوید یک عدد اصلی ناشمارای قویاً دسترس‌ناپذیر وجود دارد، نخستین مثال ماست.

اکنون مثالی دیگر می‌آوریم. عدد اصلی κ *اندازه‌پذیر* است اگر یک فراپالایهٔ غیراصلی بر روی κ وجود داشته باشد به‌طوری که U، κ-کامل باشد؛ یعنی، اشتراک کمتر از κ مجموعه در U، خود نیز در U باشد. باز ω یک عدد اصلی اندازه‌پذیر است. اصل موضوعی که حاکی از وجود یک عدد اصلی اندازه‌پذیر ناشماراست، دومین مثال ما از اصول موضوع ع.ا.ب. است.

شاید در نظر اول واضح نباشد که یک عدد اصلی اندازه‌پذیر، در واقع، به معنایی بزرگ است. ولی اگر κ یک عدد اصلی اندازه‌پذیر (ناشمارا) باشد، آنگاه قویاً دسترس‌ناپذیر است و، علاوه بر آن، لزوماً تعداد فراوانی عدد اصلی قویاً اندازه‌پذیر وجود دارند، که از κ کوچکترند. نتیجه می‌شود که وجود یک عدد اصلی اندازه‌پذیر مستلزم سازگاری وجود یک عدد اصلی قویاً دسترس‌ناپذیر است. بنابراین (و این ادعای ضعیفتری است)، اگر نظریهٔ

$$\mathrm{ZFC} + \text{یک عدد اصلی اندازه‌پذیر وجود دارد}$$

سازگار باشد، آنگاه نظریهٔ

$$\mathrm{ZFC} + \text{یک عدد اصلی قویاً دسترس‌ناپذیر وجود دارد}$$

نیز چنین است.

این امر، ترتیب جزئی ذیل را برای اصول موضوع ع.ا.ب. به ذهن القا می‌کند. فرض کنید که ϕ_1 و ϕ_2 اصول موضوع ع.ا.ب. باشند. گوییم

$$\phi_1 \preceq \phi_2$$

اگر سازگاریِ $\mathrm{ZFC} + \phi_2$ مستلزم سازگاری $\mathrm{ZFC} + \phi_1$ باشد.

حال به‌نظر می‌رسد که اگر $\phi_1 \preceq \phi_2$ و $\phi_2 \not\preceq \phi_1$، آنگاه به‌ازای هر عدد اصلی κ که در ϕ_2 صدق کند، عددهای اصلی δ، که $\delta < \kappa$، یافت می‌شوند که در ϕ_1 صدق کنند. این موضوع به‌طور قطع در مورد عددهای اصلی قویاً دسترس‌ناپذیر و عددهای اندازه‌پذیر برقرار است.

موضوع جالب توجهی که از تجربه برمی‌آید، این است که ترتیب جزئیی که در بالا تعریف شد ترتیبی کلی برای اصول موضوع ع.ا.ب. است، و از آن گذشته یک خوش‌ترتیبی است. این ادعا برای تمامی اصول موضوع ع.ا.ب. که تا این زمان عرضه شده‌اند ثابت نشده است؛ ولکن شواهد قانع‌کننده‌ای در دست است که چنین برهانی در نهایت به‌دست خواهد آمد. در نتیجه، بسیار محتمل است که تمامی عددهای اصلی بزرگ فعلی تشکیل یک سلسله مراتب خوش‌ترتیب بدهند.

در این بحث، به‌طور ضمنی فرض کردیم که اصول موضوع نظریهٔ مجموعه‌ها سازگارند. دربارهٔ اصول موضوع ع.ا.ب. نیز چنین فرض می‌کنیم. طبق نتایج کوهن و گودل، هم سازگاری فرضیهٔ پیوستار و هم سازگاری نقیض آن را می‌توان بااستفاده از سازگاری اصول موضوع نظریهٔ مجموعه‌ها ثابت کرد.

ولکن، از هر اصل موضوع ع.ا.ب. نتیجه می‌شود که اصول موضوع نظریهٔ مجموعه‌ها سازگارند، و از این‌رو طبق دومین قضیهٔ ناتمامیت گودل نمی‌توانیم امیدوار باشیم که سازگاری اصول موضوع ع.ا.ب. را ثابت کنیم، حتی اگر فرض کنیم که اصول موضوع نظریهٔ مجموعه‌ها سازگارند. این نکتهٔ مهمی است و نمایانگر تفاوتی ذاتی بین اصول موضوع ع.ا.ب. و اصول موضوعی همچون فرضیهٔ پیوستار است. اعتقاد به اصول موضوع ع.ا.ب. لزوماً اعتقادی مبتنی بر ایمان است.

ساختاری که در نتیجهٔ بررسی ع.ا.ب. پدید آمده، دلیل قانع‌کننده‌ای به‌دست می‌دهد که قطعهٔ آغازینی از این اصول موضوع سازگارند. اصول موضوعی در مورد ع.ا.ب. ارائه شده‌اند که معلوم شده ناسازگارند. با این‌حال، همواره ناسازگاریها به نسبت ساده بوده‌اند. بدیهی است که هیچ دلیل پیشینی[1] وجود ندارد که یک ناسازگاری نتواند عمیق و دشوار باشد، و فقط وقتی حاصل شود که قبلاً یک نظریهٔ غنی برای ساختارها پدید آمده باشد، مثل «تناقض» موجود در یک نوار موبیوس.

مفهومی که در ارتباط با سلسله مراتب ع.ا.ب. مطرح می‌شود، سلسله مراتب استقلال است. یکی از طرق تعریف این سلسله مراتب آن است که ترتیب جزئی اصول موضوع ع.ا.ب. را به گزاره‌های دلخواه دربارهٔ مجموعه‌ها تعمیم دهیم. یعنی اگر ψ_1 و ψ_2 گزاره باشند، تعریف می‌کنیم

$$\psi_1 \preceq \psi_2$$

اگر سازگاری $ZFC + \psi_2$ مستلزم سازگاری $ZFC + \psi_1$ باشد. این، سلسله مراتبِ *قوت سازگاری* است. عقیده بر آن است، و این دیدگاهی بسیار موفق بوده، که اصول موضوع ع.ا.ب. در این ترتیب جزئی همپایان‌اند. ولی براساس شواهد موجود حکمی بسیار فراتر از این می‌توان ارائه کرد:

> اگر گزارهٔ ψ داده‌شده باشد، یا نظریه‌های $ZFC + \psi$ و ZFC هم‌ارزند یا یک اصل موضوع ع.ا.ب. چون ϕ وجود دارد به‌طوری که
>
> $$\phi \preceq \psi \quad \text{و} \quad \psi \preceq \phi$$
>
> یعنی، نظریه‌های $ZFC + \psi$ و $ZFC + \phi$ از نظر سازگاری وضع یکسانی دارند.

1. a priori

ممکن است در حال حاضر بعید به‌نظر آید، ولی قطعاً غیرقابل تصور نیست که اصول موضوع مربوط به مجموعه‌ها در اثبات قضیه‌هایی در نظریهٔ اعداد مفید واقع شوند. شاید عددهای اصلی بزرگ کلید اثبات فرضیهٔ ریمان باشند. فرضیهٔ ریمان، حدس گلدباخ، و حتی حدس پوانکاره، احکامی از نظریهٔ اعدادند. در واقع، بسیاری از مسأله‌های حل‌نشدهٔ کلاسیک ریاضیات یا صراحتاً و یا به‌طور ضمنی گزاره‌هایی از نظریهٔ اعداد هستند.

فرض کنید که ϕ گزاره‌ای دربارهٔ مجموعه‌ها باشد. به ϕ گردایهٔ همهٔ قضیه‌هایی از نظریهٔ اعداد را نسبت می‌دهیم که بتوان با پذیرفتن ϕ به‌عنوان اصل موضوعی اضافه (بر اصول موضوع ZFC برای نظریهٔ مجموعه‌ها) آنها را ثابت کرد. فرض کنیم این گردایه T_ϕ باشد. T_{ZFC} را مجموعهٔ گزاره‌هایی در نظریهٔ اعداد می‌گیریم که در نظریهٔ مجموعه‌ها قابل اثبات‌اند. حال یک ترتیب جزئی دیگر را به‌صورت زیر برای گزاره‌ها تعریف می‌کنیم

$$\phi_1 \leq \phi_2 \quad \text{اگر و تنها اگر} \quad T_{\phi_1} \subset T_{\phi_2}$$

با اطلاعاتی که تاکنون دربارهٔ اعداد اصلی بزرگ به‌دست آمده، معلوم شده است که برای اصول موضوع ع.ا.ب.، این ترتیب با ترتیب $\preceq$ که پیشتر تعریف کردیم تطابق دارد.

به‌علاوه، در بسیاری از مواردی که استقلال گزاره‌ای چون ϕ از ZFC نشان داده شده، داریم

$$T_\phi = T_{ZFC}$$

یا

$$T_\phi = T_\psi$$

که ψ یک اصل موضوع ع.ا.ب. است.

این موضوع بسیار جالب توجه است. درواقع، به‌ازای ردهٔ بزرگی از گزاره‌هایی که دربارهٔ مجموعه‌ها هستند، اگر $\psi_1 \preceq \psi_2$، آنگاه

$$T_{\psi_1} \subset T_{\psi_2}$$

و از این‌رو، در این رده قوت سازگاری یک گزاره، همهٔ قضیه‌های نظریهٔ اعداد را که می‌توان بااستفاده از آن گزاره ثابت کرد تعیین می‌کند. به‌علاوه، در هر مورد، قضیه‌هایی از نظریهٔ اعداد که می‌توان اثباتشان کرد همان قضیه‌هایی هستند که بااستفاده از یک اصل موضوع ع.ا.ب. مناسب اثبات‌پذیرند. پس، اگر یک اصل موضوع نظریهٔ مجموعه‌ای اضافی برای اثبات فرضیهٔ ریمان لازم باشد، آنگاه، چه بسا که یک اصل موضوع ع.ا.ب. کلید آن اثبات باشد.

در اینجا چند مثال می‌آوریم.

$$T_{CH} = T_{\neg CH} = T_{ZFC}$$

فرض کنید ϕ_1 این حکم باشد که هیچ مجموعهٔ افکنشی نیست که مثال ناقض فرضیهٔ پیوستار باشد. و نیز فرض کنید ϕ_2 این حکم باشد که هر مجموعهٔ افکنشی ناشمارا یک زیرمجموعهٔ بیکاست را دربردارد. ϕ_1 و ϕ_2 همان صورتهای کارآمد فرضیهٔ پیوستار هستند که دربارهٔ آنها بحث کردیم.

از احکامی که گودل و سالووی به‌دست آورده‌اند، نتیجه می‌شود که

$$T_{\phi_1} = T_{\mathrm{ZFC}}$$

و

$$T_{\phi_2} = T_{\psi}$$

که ψ یک اصل موضوع ع.ا.ب. است حاکی از اینکه یک عدد اصلی (ناشمارای) قویاً دسترس‌ناپذیر وجود دارد. پس نتیجه می‌شود که

$$\boldsymbol{\phi_1 < \phi_2}$$

در اینجا اثرات تداخلی جالبی مشاهده می‌شود. فرض کنید ϕ گزارهٔ $\phi_1 + \neg\mathrm{CH}$ باشد. پس ϕ حاکی از آن است که فرضیهٔ پیوستار کاذب است ولی هیچ مثال ناقض آسانی برای آن وجود ندارد.

$$\boldsymbol{T_{\phi} = T_{\phi_2} = T_{\psi}}$$

در حال حاضر گزاره‌های بسیاری هستند که تعیین اصل موضوع ع.ا.ب. معادل با آنها بسیار دشوار و نیازمند ابزارهای فنی فراوان است.

اما توجه داشته باشید که این موضوع محدودیتهای آشکاری دارد. برای نمونه، آنچه در بالا آمد نمی‌تواند برای گزاره‌هایی حاکی از اینکه فلان اصل موضوع ع.ا.ب. ناسازگار است، برقرار باشد. گذشته از آن، در برخی از موارد تعبیر آزادانه‌تری از اینکه یک اصل موضوع ع.ا.ب. چه‌چیزی است، لازم می‌آید.

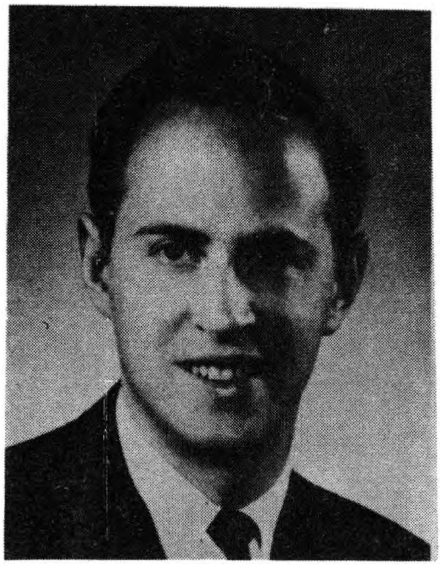
با این همه، درجه‌بندی استقلال به‌وسیلهٔ ع.ا.ب. بدین شیوه، فوق‌العاده موفقیت‌آمیز بوده است. گودل روح مطلب را درست دریافته بود: اصول موضوع ع.ا.ب. واقعاً کلید استقلال‌اند.

تفاوتی اساسی ــ ناشی از طرز نگرش جامعهٔ ریاضیدانان ــ بین نظریهٔ اعداد و نظریهٔ مجموعه‌ها وجود دارد. به‌نظر می‌رسد که پذیرش افلاطونگرایی در نظریهٔ اعداد آسانتر باشد تا در نظریهٔ مجموعه‌ها. کثرت نتایج مربوط به استقلال در نظریهٔ مجموعه‌ها به‌طور قطع تیشه به ریشهٔ هر مفهوم ممکنی از یک جهان متعارف برای مجموعه‌ها می‌زند. هنگامی‌که تعمیم روش کوهن به مدلهای نظریهٔ اعداد انجام شود، این موضوع دربارهٔ نظریهٔ اعداد نیز صادق خواهد بود.

اگر، برای مثال، نشان داده شود که حدس مربوط به اعداد اولِ توأمان قابل اثبات یا ابطال نیست، آنگاه کسی *از پیش* دلیلی نخواهد داشت که معتقد باشد این حدس صادق است یا کاذب. این مثال به‌طور مشخص با گزاره‌هایی همچون قضیهٔ آخر فرما فرق می‌کند. اگر نشان داده می‌شد که قضیهٔ آخر فرما قابل اثبات یا ابطال نیست، می‌توانستیم چنین استدلال کنیم که این گزاره صادق است. هر مثال ناقضی برای قضیهٔ آخر فرما خیلی راحت برهانی برای کاذب بودن آن به‌دست می‌داد.

سلسله مراتب ع.ا.ب. و درجه‌بندی استقلال به‌وسیلهٔ آن، گویی که مفهومی ذاتی و مطلق همچون مفهوم خودِ اعداد طبیعی است. از دید من، این درجه‌بندی یکی از اکتشافات سترگ نظریهٔ مجموعه‌ها در طول ۳۰ سال اخیر بوده است. این کشف از بررسی تعداد کثیری از نتایج حاصل می‌آید؛ هیچ نتیجه‌ای به‌تنهایی آن را نمی‌نماید.

البته، امکان آن وجود دارد که جمله‌هایی بسازیم که نتوان آنها را برحسب



کوهن

قوت سازگاری با یکدیگر سنجید، اما به‌نظر می‌رسد هر تکنیکی که بتواند نشان دهد گزاره‌هایی در نظریهٔ مجموعه‌ها را نمی‌توان بدین‌طریق با هم سنجید، محتاج تعمیمی از روش کوهن به مدلهایی برای نظریهٔ اعداد است.

این پیش‌بینی گودل هم که شاید واقعاً به کمک ع.ا.ب. تکلیف پرسشهایی روشن شود که جز به کمک آنها پاسخ‌ناپذیرند، تحقق یافته است. بهترین مثالهای این موضوع را در نظریهٔ کارآمدِ پیوستار می‌توان یافت.

برای روشن‌شدن این مطلب بحثمان دربارهٔ مجموعه‌های افکنشی اعداد حقیقی را پی می‌گیریم. در این زمینه بسیاری از پرسشهایی را که ممکن است به‌طور طبیعی پیش بیاید نمی‌توان پاسخ داد. ما تا اینجا دربارهٔ یک چنین پرسشی گفتگو کرده‌ایم: آیا مجموعه‌های افکنشی ناشمارا (لزوماً) زیرمجموعه‌هایی بیکاست دارند؟ حال یک پرسش دیگر. آیا مجموعه‌های افکنشی، اندازه‌پذیرِ لبگ هستند؟

تحت تأثیر مباحث مربوط به ع.ا.ب.، نظریه‌ای به‌راستی غنی درباب مجموعه‌های افکنشی پدیدآمده است. این نظریه نخست بر مبنای مجموعه‌ای از اصول موضوع کاملاً متفاوت، موسوم به *اصول موضوع تعیینگر*، بررسی و تحلیل شد.

من به‌طور خلاصه این اصول موضوع را که نخستین‌بار میسیلسکی و اشتاین‌هاوس [۳] بیش از ۳۰ سال پیش مطرح کردند موردبحث قرار می‌دهم. فرض کنید $A \subset \mathbb{R}$. ما به مجموعهٔ A یک بازی G_A به‌شرح زیر نسبت می‌دهیم. دو بازیکن داریم. هرکدام از این دو در هر حرکت خود که پس از حرکت حریف صورت می‌گیرد، یا ۰ و یا ۱ را برمی‌گزیند؛ حرکت نخست ازآنِ بازیکن شمارهٔ ۱ است. بعد از تعداد نامتناهی حرکت، یک دنبالهٔ نامتناهی

$$< n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots >$$

از دو رقم صفر و یک، پدید می‌آید، که در آن n_{2i-1} و n_{2i} به‌ترتیب بازیهای iام بازیکن‌های ۱ و ۲ هستند. فرض کنید

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n_k}{2^k}$$

عددی حقیقی باشد که با این بازی تعریف شده است. بازیکن ۱ به‌شرطی برنده است که $x \in A$، و در غیر این‌صورت بازیکن ۲ برنده است.

یک *استراتژی*، تابعی چون

$$\tau : \mathrm{Seq} \to \{0, 1\}$$

است، که Seq مجموعهٔ تمام دنباله‌های متناهی مرکب از صفر و یک می‌باشد. فرض کنید τ یک استراتژی باشد. یک دست بازی G_A که در آن بازیکن ۱ از استراتژی τ پیروی می‌کند عبارت است از یک دنبالهٔ نامتناهی

$$< n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots >$$

از صفر و یک اگر $n_1 = \tau(\varnothing)$ و برای هر $i \in \mathbb{N}$ که $i > 1$، داشته باشیم $n_{2i-1} = \tau(n_1, \cdots, n_{2i-2})$. استراتژی τ یک *استراتژی بُرد* برای بازیکن ۱ است، اگر بازیکن ۱ در هر دست از بازی که از τ پیروی کند برنده شود. همین‌طور یک استراتژی τ برای بازیکن ۲ استراتژی بُرد است اگر بازیکن ۲ هر دست بازی را که در آن بنابه τ بازی کند بِبَرد. واضح است که، تنها یکی از بازیکنها می‌تواند استراتژی بُرد داشته باشد. بااستفاده از اصل انتخاب می‌توان مجموعهٔ Aیی ساخت که به‌ازای آن هیچ‌یک از دو بازیکن در بازی G_A استراتژی برد نداشته باشند. با این حال توجه داشته باشید که به‌ازای بسیاری از مجموعه‌های خاص برای یکی از بازیکنها استراتژی برد وجود دارد. برای مثال، اگر $A = [0, \frac{1}{2}]$، آنگاه بازی G_A «معین» است. کافی است بازیکن ۱ در نخستین حرکت خود ۰ را برگزیند. این امر برد بازیکن ۱ را، صرف‌نظر از آنکه حرکتهای بعدی دو بازیکن چه باشد، تضمین می‌کند. پس در این بازی برای بازیکن ۱، یک استراتژی برد بدیهی وجود دارد.

بازی G_A *معیّن* است اگر برای یکی از دو بازیکن استراتژی برد وجود داشته باشد. *تعیّن افکنشی* عبارت است از این حکم که بازی G_A به‌ازای هر مجموعهٔ افکنشی A معین است. با پذیرش فرضیهٔ تعین افکنشی نظریهٔ مفصلی دربارهٔ مجموعه‌های افکنشی پدید آمده است [۲]. برای مثال، با فرض تعین افکنشی، نتیجه می‌شود که هر مجموعهٔ افکنشی ناشمارا یک زیرمجموعهٔ بیکاست دربردارد. پس جملهٔ ϕ_2 صادق است. تعین افکنشی همچنین مستلزم آن است که مجموعه‌های افکنشی اندازه‌پذیر لبگ باشند.

شواهد و قرائن پیشینیِ چندانی در دست نیست که تعین افکنشی، یک اصل موضوع قابل قبول یا حتی یک اصل موضوع سازگار باشد. واکن، نظریهٔ حاصل از پذیرش تعین افکنشی چنان غنی است که به‌طور پسینی[1] [مؤخر بر تجربه]، این اصل موضوع هم سازگار است و هم صادق. این موضوع یک درس مهم به‌ما می‌دهد: لازم نیست که اصول موضوع به‌طور پیشینی صادق باشند.

در نگاه اول، به‌نظر نمی‌رسد که اصل موضوع تعین افکنشی مشترکات زیادی با اصول موضوع ع.ا.ب. داشته باشد، ولی در طول ۱۰ سال اخیر نظریهٔ واحدی برای ع.ا.ب. و تعین پدید آمده‌است. به‌ویژه، اصول موضوعی در مورد ع.ا.ب. هستند که تعین افکنشی را نتیجه می‌دهند. بنابراین، با فرض آنکه عددهای اصلیِ به‌اندازهٔ کافی بزرگ وجود داشته باشند، هر مجموعهٔ افکنشی ناشمارا مجموعهٔ بیکاستی دربردارد. این یکی از اثرات قابل‌توجه وجود ع.ا.ب. بر مجموعه‌های نسبتاً کوچک است. شایان ذکر است که تمامی برهانهای موجود برای این حکم کم‌وبیش پیچیده‌اند (تاکنون تقریباً سه برهان متفاوت برای آن به‌دست آمده است). در اینجا درس دیگری می‌آموزیم: نتایج پایه‌ایِ اصول موضوع لازم نیست سرراست باشند.

یک نکته. یکی از پیامدهای وحدت‌یابی ع.ا.ب. و تعین، این واقعیت تجربی است که: هر اصل موضوع ع.ا.ب. که نتیجه دهد هر مجموعهٔ افکنشی ناشمارا مجموعه‌ای بیکاست را دربردارد، درواقع مستلزم تعین افکنشی هم هست [۱].

نکته‌ای دیگر. برای ردهٔ وسیعی از گزاره‌هایی مانند ψ، اگر سازگاری $(\mathrm{ZFC} + \psi)$ مستلزم سازگاریِ (تعین افکنشی + ZFC) باشد، آنگاه ψ درواقع تعین افکنشی را نتیجه می‌دهد. این موضوع برای چند گزارهٔ نابدیهی نشان داده شده است. البته محدودیتهای آشکاری وجود دارد؛ ولی این پدیده به‌طور کلی پدیده‌ای اصیل است.

اما مسألهٔ فرضیهٔ پیوستار همچنان به‌قوت خود باقی است. تجربهٔ حاصل از بررسی عددهای اصلی بزرگ به‌وضوح نشان می‌دهد که جستجوی اصول موضوع جدید به زحمتش می‌ارزد؛ *و نیز این انتظار به‌وضوح انتظار معقولی است که فهم ما از مجموعه‌ها به مرحله‌ای برسد که بتوان تکلیف فرضیهٔ پیوستار را روشن کرد.*

نتایج فراوانی در طی چند سال گذشته به‌دست آمده که این دیدگاه را تأیید می‌کند. برای مثال، معلوم شده است، که در حوزهٔ ع.ا.ب.، فرضیهٔ پیوستار تمام پرسشهایی را که به‌اندازهٔ فرضیهٔ پیوستار پیچیده‌اند «پاسخگو است». در اینجا «پیچیدگی» مفهومی صوری است که از تحلیل سورها به‌دست می‌آید.

مثال دیگر، نتیجهٔ جدیدی است که برای نخستین‌بار یک مدل متعارف را مشخص می‌کند که در آن فرضیهٔ پیوستار کاذب است. این مدل ریشه در ملاحظاتی درباب عددهای اصلی بزرگ و تعین دارد.

مراجع

1. D. Martin and J. Steel, Iteration trees. *J. Amer. Math. Soc.* 7 (1994), 1-75.
2. Y. N. Moschovakis. *Descriptive Set Theory*: Studies in Logic and the Foundations of Math. Vol. 100: Amsterdam: North-Holland (1980).
3. J. Mycielski and H. Steinhaus. A mathematical axiom contradicting the axiom of choice, *Bull. Pol. Acad.* 10 (1962), 1-3.

******

• W. Hugh Woodin, "Large cardinal axioms and independence: the continuum problem revisited", *Math. Intelligencer*, (3) 16 (1994) 31-35.

1. a posteriori

* و. هیو وودین، دانشگاه کالیفرنیا در برکلی