چند مسألهٔ قدیمی و نتیجهٔ تازه در مورد فرمهای درجه دوم•

ویلیام دوک*
ترجمهٔ مهدی مجیدی ذوالبنین

مقدمه

توصیف جوابهای صحیح یک معادلهٔ چندجمله‌ای با چند متغیر ممکن است مسأله‌ای دشوار و جالب باشد. برای نمونه، چه اعداد صحیحی را می‌توان با یک چندجمله‌ای درجه دوم نمایش داد؟ این سؤال تاریخچه‌ای غنی و پیچیده دارد و نظریه‌ای به‌وجود آورده است که امروز هم هنوز بالنده است. در این مقاله قصد دارم برخی از پیشرفتهای اخیر این نظریه، به‌ویژه در مورد فرمهای درجه دوم مثبت با سه متغیر را توصیف کنم و افراد غیرمتخصص را با بعضی از موضوعات اصلی این نظریه آشنا سازم. با یک مثال کلاسیک که شرح ساده‌ای دارد شروع می‌کنم.

ادعای فرما

در ۱۶۳۸ فرما اظهار داشت که هر عددی را می‌توان به‌صورت مجموع حداکثر سه عدد مثلثی، چهار عدد مربعی، پنج عدد پنج‌ضلعی و غیره نوشت.[۱] وی در نامه‌ای به پاسکال در ۱۶۵۴ از این گزاره به‌عنوان مهمترین نتیجه‌ای که تا آن زمان به‌دست آورده یاد می‌کند. ادعای فرما مبنی بر اثبات این گزاره، به‌خصوص برای حالت سه عدد مثلثی، بسیار مورد شک قرار گرفته است.[۲] دویست سال پیش، گاوس نوشتن یادداشتهای ریاضی روزانهٔ خود را آغاز کرد. یکی از نخستین مطالب ثبت شده، با اشاره به عبارت معروف ارشمیدس آغاز می‌شود و تاریخ ۱۰ ژوئیهٔ ۱۷۹۶ را دارد

$$**\, E\Upsilon PHKA \quad \mathrm{num} = \Delta + \Delta + \Delta$$

در اینجا گاوس می‌نویسد اثباتی برای این حکم که هر عدد صحیح مثبت m را می‌توان به‌صورت مجموع سه عدد مثلثی نوشت، یافته است. اعداد مثلثی عبارت‌اند از ۰، ۱، ۳، ۶، ۱۰، ۱۵، ...، $\frac{1}{2}n(n+1)$، ... بنابراین

۱. اعداد مثلثی عبارت‌اند از ۱، ۳، ۶، ۱۰، ...، $\frac{1}{2}(n^2+n)$، ...؛ مربعها عبارت‌اند از ۱، ۴، ۹، ۱۶، ...، n^2، ...؛ اعداد پنج‌ضلعی عبارت‌اند از ۱، ۵، ۱۲، ۲۲، ...، $\frac{1}{2}(3n^2-n)$، ...؛ و اعداد شش‌ضلعی عبارت‌اند از ۱، ۶، ۱۵، ۲۸، ...، $2n^2-n$ و... در حالت کلی، nاُمین عدد چندضلعی از مرتبهٔ k با چندجمله‌ای درجه دوم $\frac{1}{2}[(k-2)n^2-(k-4)n]$ مشخص می‌شود. برای ساده کردن گزاره‌ها، عدد ۰ را نیز یک عدد چندضلعی به حساب می‌آوریم.

۲. برای مشاهده یک بررسی موثق از تاریخ مراحل اولیه و دیدن مراجع، به [۲۴] مراجعه کنید.

گزارهٔ گاوس به این معنی است که هر عدد m به‌وسیلهٔ چندجمله‌ای درجه دوم و سه متغیری خاص زیر قابل نمایش است

$$m = \frac{n_1^2+n_1}{2} + \frac{n_2^2+n_2}{2} + \frac{n_3^2+n_3}{2}$$

که n_1 و n_2 و n_3 اعداد صحیح نامنفی هستند. این هم‌ارز است با معادلهٔ زیر

$$8m+3 = (2n_1+1)^2 + (2n_2+1)^2 + (2n_3+1)^2.$$

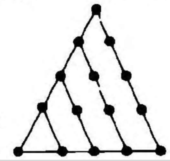
بدین ترتیب، گزارهٔ گاوس هم‌ارز این گزاره است که هر عددی به شکل $8m+3$ مجموع سه عدد مربع فرد است. قضیهٔ کلایتر، حاکی از اینکه یک عدد دقیقاً هنگامی مجموع سه مربع است که به شکل $4^b(8m+7)$ به‌ازای $b \geq 0$ نباشد، نخستین بار در ۱۷۹۸ به‌وسیلهٔ لژاندر انتشار یافت و گاوس در کتاب تحقیقات حسابی خود اثبات قاطعی برای این قضیهٔ اساسی ارائه داد. اینکه هر عددی مجموع چهار مربع است پیش از آن در ۱۷۷۲ به‌دست لاگرانژ و برپایهٔ کارهای اویلر اثبات شده بود. در ۱۸۱۳ کوشی اولین اثبات را برای حالت کلی ادعای فرما ارائه کرد و آن را به روشی مقدماتی (اما دشوار) از قضیهٔ سه عدد مثلثی نتیجه گرفت. قضیهٔ کوشی دقیق است، به این معنی که اعدادی وجود دارند که با کمتر از k عدد چندضلعی از مرتبهٔ k قابل نمایش نیستند، برای نمونه $2k-1$ چنین است.

مدتی بعد دیریکله فرمول زیبایی برای تعداد نمایشهای مختلف عدد m به‌صورت مجموع سه عدد مثلثی عرضه کرد. در حالت خاصی که $8m+3$ عددی اول است، این فرمول می‌گوید که این تعداد برابر است با فزونی تعداد مانده‌های مربعی (مربعها به پیمانهٔ $8m+3$) نسبت به نامانده‌های مربعی به پیمانهٔ $8m+3$ در فاصلهٔ بین ۱ تا $4m+1$.[۱] عدد مثلثی مثالی است از عدد چندضلعی از مرتبهٔ سه. nاُمین عدد چندضلعی از مرتبهٔ k را می‌توان به‌صورت مجموع n جملهٔ نخست یک تصاعد حسابی که اولین جمله‌اش ۱ و قدر

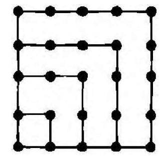
۱. برای مثال وقتی $m=2$ و لذا $8m+3=19$، مانده‌های مربعی به پیمانهٔ ۱۹ تا $4m+1=9$ عبارت‌اند از ۱، ۴، ۵، ۶، ۷، ۹ و نامانده‌ها عبارت‌اند از ۲، ۳ و ۸. بنابراین فزونی در اینجا ۳ است که برابر تعداد نمایشهای مختلف ۲ به‌صورت مجموع سه عدد مثلثی است:

$$2 = 1+1+0 = 1+0+1 = 0+1+1$$

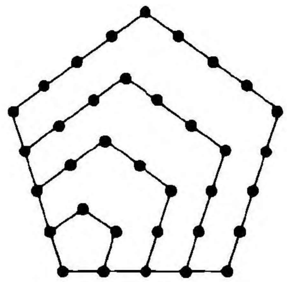
عددهای مثلثی از شمارش تعداد نقطه‌ها در یک آرایهٔ مثلثی به‌دست می‌آیند.



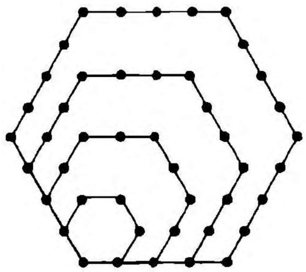
پس دنبالهٔ عددهای مثلثی چنین است:
۱، ۳، ۶، ۱۰، ۱۵، . . .



همین‌طور، دنبالهٔ عددهای مربعی عبارت است از ۱، ۴، ۹، ۱۶، ۲۵، . . .



عددهای پنج‌ضلعی: ۱، ۵، ۱۲، ۲۲، ۳۵، . . .



عددهای شش‌ضلعی: ۱، ۶، ۱۵، ۲۸، ۴۵، . . .

nاُمین عدد چندضلعی از مرتبهٔ k از فرمول $\frac{1}{2}[(k-2)n^2-(k-4)n]$ به‌دست می‌آید.

شکل ۱ عددهای چندضلعی نقش مهمی در مسائل نظریهٔ اعداد در دوران باستان داشتند.

نسبت آن $k-2$ است تعریف نمود. بدین ترتیب این عدد توسط چندجمله‌ای درجه دوم $\frac{1}{2}[(k-2)n^2-(k-4)n]$ مشخص می‌شود. اعداد چندضلعی همان‌طور که از نامشان برمی‌آید منشأ هندسی دارند. این را می‌توان در شکل ۱ مشاهده کرد. در آغاز، سروکار بخش زیادی از نظریهٔ اعداد با خواص مختلف این اعداد و سایر دنباله‌های عددی بود که با هندسه ارتباط دارند [۴].

اخیراً گای [۱۱] خاطرنشان کرده است که بعضی از مسائل جالب و دشوار در مورد نمایش اعداد صحیح به‌صورت مجموع اعداد چندضلعی، هنوز حل نشده‌اند. بدون ورود به جزئیات، می‌خواهم به توصیف یک نمونه از این مسائل قدیمی بپردازم که اخیراً پیشرفتی در حل آن حاصل شده است. لژاندر در ویرایش سوم کتاب نظریهٔ اعدادش در ۱۸۳۰، با ابزارهای مقدماتی ثابت کرد که هر عدد بزرگتر از ۱۷۹۱ مجموع چهار عدد شش‌ضلعی است. سؤالی که مطرح شد این بود که آیا واقعاً سه عدد شش‌ضلعی کفایت نمی‌کند؟ با کاربرد قضیهٔ ۱ از [۱۰]، پاسخ زیر نتیجه می‌شود:

قضیه. هر عدد به اندازهٔ کافی بزرگ، مجموع سه عدد شش‌ضلعی است.

از آنجاکه nاُمین عدد شش‌ضلعی برابر $n(2n-1)$ است و این عدد، $(2n-1)$اُمین عدد مثلثی نیز هست، نتیجهٔ بالا، به نوعی، تقویت‌کنندهٔ قضیهٔ سه عدد مثلثی گاوس است. ولی اشکالش این است که کارآمد نیست، بدین معنی که در حال حاضر نمی‌توان به‌طور صریح کرانی برای بزرگترین عددی که مجموع سه عدد شش‌ضلعی نیست تعیین کرد، مگر اینکه بخواهیم حدسهایی مانند فرضیهٔ ریمان را بپذیریم. ما بعداً منشأ این اشکال را خواهیم دید.

پیش از پرداختن به مسألهٔ کلی نمایش و برخی از روشهای به‌کار گرفته شده برای مطالعه این مسأله، قصد دارم دو نتیجهٔ جدید دیگر در مورد فرمهای درجه دوم را با توجه به جایگاه تاریخی آنها تشریح کنم.

مقاله‌ای از رامانوجان

در ۱۹۱۷ رامانوجان مقاله‌ای [۱۶] منتشر ساخت که تأثیر بزرگی روی تحقیقات بعدی در زمینهٔ نمایش اعداد با فرمهای درجه دوم برجای گذاشت. وی این مسأله را بررسی کرد: همهٔ اعداد صحیح $0 \leq a \leq b \leq c \leq d$ را پیدا کنید که هر عدد صحیح مثبتی را بتوان بر حسب آنها به‌صورت

$$ax_1^2 + bx_2^2 + cx_3^2 + dx_4^2$$

نمایش داد. یک بررسی حالت به حالت مقدماتی (و سرگرم‌کننده) مشخص می‌کند که اعداد ۱، ۲، ۳ و ۵ هنگامی قابل نمایش هستند که سه جمله اول (a, b, c) اینها باشند: (۱، ۱، ۱)، (۲، ۱، ۱)، (۳، ۱، ۱)، (۲، ۲، ۱)، (۳، ۲، ۱)، (۴، ۲، ۱) و یا (۵، ۲، ۱). هیچ‌کدام از فرمهای سه‌تایی $ax_1^2 + bx_2^2 + cx_3^2$ متناظر با این مقادیر، همهٔ اعداد را نمایش نمی‌دهند. کوچکترین موارد استثناء به‌ترتیب عبارت‌اند از ۷، ۱۴، ۶، ۷، ۱۰، ۱۴ و ۱۰. بدین ترتیب ۵۵ فرم چهارتایی ممکن باقی می‌ماند و رامانوجان بر اساس قواعد ساده‌ای که به‌طور تجربی در مورد اعداد صحیح قابل نمایش به‌وسیلهٔ سه‌تایی‌های بالا کشف کرده بود نتیجه گرفت که در واقع این ۵۵ فرم تمام اعداد را نمایش می‌دهند.[۱] تعمیم مسألهٔ رامانوجان به سایر فرمهای درجه دوم کاری است طبیعی. یک فرم درجه دوم مثبت mتایی با مقادیر صحیح (یا به‌طور خلاصه یک فرم) عبارت است از یک چندجمله‌ای همگن درجه دوم $Q(x) = Q(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ با ضرایب صحیح که به‌ازای $x \neq 0$ حقیقی در شرط $Q(x) > 0$ صدق می‌کند. چنین فرمی را می‌توان با نمادگذاری ماتریسی به‌صورت $Q(x) = x^t Ax$ نمایش داد که در آن $A = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 Q(x)}{\partial x_i \partial x_j}$ یک ماتریس متقارنِ مثبت است. اگر درآیه‌های ماتریس A صحیح باشند، آنگاه $Q(x)$ را می‌توان یک فرم با ماتریس صحیح نامید، برای مثال فرم قطری $ax_1^2 + bx_2^2 + cx_3^2 + dx_4^2$ چنین است. شاید حرف آخر را در زمینهٔ فرمهایی که همهٔ اعداد مثبت را نمایش می‌دهند اخیراً کانوی و اشنیبرگر زده باشند. آنها قضیهٔ زیبای زیر را به‌دست داده‌اند.

قضیه [۲]. اگر یک فرم درجه دوم مثبت با ماتریس صحیح، هر یک از اعداد

$$1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 14, 15$$

را نمایش دهد، آنگاه همه اعداد صحیح مثبت را نمایش خواهد داد.

۱. ده سال بعد دیکسن [۵] پی برد که یکی از این فرمها، یعنی فرم متناظر با (۵، ۵، ۲، ۱) عدد ۱۵ را نمایش نمی‌دهد، اما ثابت کرد که در سایر موارد، به‌ویژه در مورد قواعد مربوط به سه‌تایی‌های خاص، رامانوجان درست گفته است.

حدس. اگر یک فرم درجه دوم مثبت با مقادیر صحیح، هریک از اعداد

$$۱, ۲, ۳, ۵, ۶, ۷, ۱۰, ۱۳, ۱۴, ۱۵, ۱۷, ۱۹, ۲۱, ۲۲, ۲۳, ۲۶,$$
$$۲۹, ۳۰, ۳۱, ۳۴, ۳۵, ۳۷, ۴۲, ۵۸, ۹۳, ۱۱۰, ۱۴۵, ۲۰۳, ۲۹۰$$

را نمایش دهد، آنگاه همهٔ اعداد صحیح مثبت را نمایش خواهد داد.

این گزاره‌ها دقیق هستند بدین معنی که فرم $x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 5x_4^2$ همهٔ اعداد بجز ۱۵ را نمایش می‌دهد و

$$4x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + x_2x_3 + 2x_3^2 + 29x_4^2 + 29x_4x_5 + 29x_5^2$$

همهٔ اعداد بجز ۲۹۰ را. کانوی و اشنیبرگر انتظار دارند حدسشان به‌زودی تبدیل به قضیه شود.

رامانوجان در مقاله‌اش [۱۶] مسأله زیر را نیز مطرح می‌کند: پیدا کردن $ax_1^2 + bx_2^2 + cx_3^2 + dx_4^2$ای که همهٔ اعداد صحیح به اندازهٔ کافی بزرگ را نمایش دهد. وی از این مسأله به‌عنوان مسأله‌ای بسیار دشوارتر و جالبتر یاد می‌کند. این مسأله را کلوسترمن [۱۴] در ۱۹۲۶ اساساً حل کرد. مقالهٔ کلوسترمن نشانگر یک پیشرفت مهم است، زیرا وی در این مقاله روش دایره را بهبود بخشید و این امکان را به‌دست آورد که به کمک برآوردی مشخص برای آنچه که اکنون مجموع کلوسترمن نام دارد، به یک نتیجه‌گیری کیفی در مورد نمایش اعداد به‌وسیلهٔ فرمهای چهارتایی بپردازد. این مجموع در ساده‌ترین شکلش یک مجموع متناهی به‌صورت زیر است

$$K(n,p) = \sum_{d=1}^{p-1} e^{2\pi i n(\overline{d}+d)/p}$$

که p عددی اول و n عددی صحیح است که بر p بخشپذیر نیست و $\overline{d}$ وارون ضربی d به پیمانهٔ p است. برآورد کلوسترمن برای کاربرد در فرمهای درجه دوم چهارتایی کافی بود، اما بعداً برآورد ویل که بهترین برآورد ممکن است آن را کنار زد:

$$|K(n,p| \leq 2\sqrt{p}$$

این برآورد به‌صورت نتیجه‌ای از فرضیهٔ ریمان برای خمها به‌دست آمد.

مقالهٔ رامانوجان همچنین انگیزه‌بخش کارهای زیادی در مورد نظریهٔ دشوارتر فرمهای سه‌تایی بوده است. وی در یک زیرنویس چنین نوشت: اعداد زوجی که به شکل $x^2 + y^2 + 10z^2$ نیستند، اعداد $4^{\lambda}(16\mu + 6)$ هستند در حالی‌که اعداد فردی که به این شکل نیستند، یعنی اعداد

$$۳, ۷, ۲۱, ۳۱, ۳۳, ۴۳, ۶۷, ۷۹, ۸۷, ۱۳۳, ۲۱۷,$$
$$۲۱۹, ۲۲۳, ۲۵۳, ۳۰۷, ۳۹۱, \ldots$$

ظاهراً از قاعدهٔ ساده‌ای پیروی نمی‌کنند. دیکسن با استدلالی ساده مشاهدهٔ رامانوجان در مورد اعداد زوج را تأیید کرد اما این مسأله که آیا تعداد اعداد فردی که نمایش داده نمی‌شوند نامتناهی است یا نه، تا همین اواخر حل نشده بود. از [۱۰] قضیهٔ زیر نتیجه می‌شود

قضیه. مجموعهٔ اعداد فردی که به‌وسیلهٔ فرم رامانوجان

$$x_1^2 + x_2^2 + 10x_3^2$$

نمایش داده نمی‌شوند متناهی است.

در اینجا نیز از اثبات این نتیجه کران مشخصی برای تعداد استثناها به‌دست نمی‌آید. در واقع فهرست رامانوجان از استثناها کامل نیست و دوتای دیگر هم وجود دارند: ۶۷۹ و ۲۷۱۹. اخیراً اُنو[1] و سوندارارِاجان[2] در یک مقالهٔ جالب توجه [۱۵] نشان داده‌اند که اگر فرضیه‌های ریمان مشخصی را بپذیریم، در واقع تمام استثناها همینها هستند.

مسألهٔ نمایش

مثالهای بالا همگی به این مسألهٔ کلی تعلق دارند که بفهمیم کدام اعداد صحیح مثبت n به‌وسیلهٔ یک فرم مثبت مفروض با مقادیر صحیح مانند $Q(x_1, \ldots, x_m)$ به‌ازای بردارهای صحیح x، قابل نمایش هستند، تعداد این گونه بردارها چندتاست و توزیع این بردارها چگونه است.

یک شرط لازم برای اینکه $n = Q(x)$ جواب صحیح داشته باشد این است که همنهشتی (پیمانهٔ q) $Q(x) \equiv n$ به‌ازای همهٔ اعداد صحیح مثبت q جواب داشته باشد و یا به‌عبارت دیگر، n روی اعداد صحیح pـای به‌ازای هر p قابل نمایش باشد. نمایش‌پذیری موضعی n به‌وسیلهٔ $Q(x)$، یعنی حل‌پذیری این همنهشتیها، در حالت کلی وجود یک جواب صحیح برای $Q(x) = n$ را تضمین نمی‌کند، مگر اینکه به‌جای یک فرم، یک ردهٔ هم‌ارزی مشخص از فرمها به‌نام گونه[3] را قرار دهیم. مفهوم یک گونه از فرمها برای اولین بار توسط گاوس در حالت فرمهای دوتایی معرفی شد. برای تعریف آن ابتدا می‌گوییم دو فرم Q_1 و Q_2 روی $\mathbb{Z}$ هم‌ارز هستند اگر یک $U \in GL(m, \mathbb{Z})$ وجود داشته باشد که $U^t A_1 U = A_2$، که A_1 و A_2 ماتریسهای متناظر هستند. می‌گوییم دو فرم (مثبت) Q_1 و Q_2 به یک گونه تعلق دارند اگر به‌ازای هر q، Q_1 روی $\mathbb{Z}$ هم‌ارز فرمی باشد که به پیمانهٔ q همنهشت Q_2 است. یک راه دیگر بیان این مطلب این است که بگوییم Q_1 و Q_2 به‌ازای هر p روی اعداد صحیح pـای هم‌ارز هستند. دو فرم هم‌ارز روی $\mathbb{Z}$ اعداد صحیح یکسانی را نمایش می‌دهند. بنابراین در مسائل مربوط به نمایش، می‌توان رده‌های $\mathbb{Z}$ـهم‌ارزی فرمها را به عنوان اشیای اساسی در نظر گرفت. این نکته مهم است که هرگونه از فرمها تنها از تعدادی متناهی ردهٔ $\mathbb{Z}$ـهم‌ارزی تشکیل شده است. نتیجهٔ زیر اهمیت این مفهوم را روشن می‌سازد.

قضیه [۱]. اگر به‌ازای هر q، همنهشتی (پیمانه q) $Q(x) \equiv n$ جوابی داشته باشد، آنگاه در گونه‌ای که $Q(x)$ در آن قرار دارد فرمی هست که n را به‌صورت صحیح نمایش می‌دهد.

هر چند به نظر می‌رسد نمایش‌پذیری موضعی مستلزم تعداد نامتناهی همنهشتی است، اما در واقع در نظر گرفتن تنها یک مقدار q که به دترمینان $D = \det 2A$ و احتمالاً به n بستگی دارد، کفایت می‌کند. اگر گونه تنها شامل یک ردهٔ هم‌ارزی باشد، آنگاه این قضیه پاسخ بسیار رضایتبخشی برای این سؤال که کدام اعداد صحیح نمایش داده می‌شوند در اختیار می‌گذارد. اما این حالت خیلی نادر است و اگر m یا D خیلی بزرگ باشند چنین اتفاقی نمی‌افتد. فرم رامانوجان $x_1^2 + x_2^2 + 10x_3^2$ در گونه‌ای قرار دارد که شامل دو ردهٔ هم‌ارزی است. ردهٔ دیگر با $2x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_3$ نمایش داده می‌شود. بدین ترتیب هر چند ممکن است معلوم باشد که کدام اعداد صحیح به‌وسیلهٔ حداقل یکی از فرمهای گونه نمایش داده می‌شوند اما

1. Ono   2. Soundararajan   3. genus

مشکل این است که تعیین کنیم آن فرم کدام است. گذشته از این می‌شود انتظار داشت که فرمهای متفاوت در یک گونه، اعداد صحیح یکسانی را نمایش دهند. این در مورد فرمهای دوتایی که ویژگیهای عمیقترِ نمایش آنها بخشی از نظریهٔ میدانهای رده‌ای را دربر می‌گیرد و در اینجا به آن نمی‌پردازیم، درست نیست. در مورد فرمهای با سه متغیر یا بیشتر، این موضوع اساساً درست است و ما سعی خواهیم کرد آن را دقیقتر کرده، به موانع خاصی که در مورد فرمهای چهارتایی و سه‌تایی پدید می‌آیند اشاره کنیم.

رهیافت آنالیزی

یک راه طبیعی این است که به مسألهٔ شمارش تعداد نمایشها بپردازیم. آنالیز از طریق سری تتا در این مسأله به کار گرفته می‌شود

$$\vartheta(z) = \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^m} e(zQ(\alpha)) = \sum_{n\geq 0} r(n)e(nz)$$

که در آن $e(z)=e^{2\pi iz}$ و این سری یک سریِ (فوریهٔ) مولد برای تعداد نمایشها یعنی $r(n)=r_Q(n)=\#\{\alpha\in\mathbb{Z}^m;\ Q(\alpha)=n\}$ است. این موضوع را می‌توان با جمع کردن جمله‌هایی از جمع اول که مقادیر $Q(\alpha)$ آنها یکسان هستند مشاهده کرد.

ژاکوبی نخستین کسی بود که توابع تتا را در مسائل نمایش به‌کار گرفت. برای نمونه وی در مورد $Q_4(x)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2$ اتحاد زیبای زیر را ارائه کرد که با استفاده از نظریهٔ توابع بیضوی به‌دست آمده بود

$$\vartheta(z)=1+8\sum_{n\geq 1}\frac{ne(nz)}{1+(-1)^n e(nz)}$$

اگر هر یک از جمله‌های این جمع را به‌صورت یک سری هندسی بسط داده، ضرایب $e(nz)$ را با هم جمع کنیم، می‌توان مشاهده کرد که تعداد نمایشهای n به‌صورت مجموع چهار مربع، هشت برابر مجموع شمارنده‌هایی از n است که مضرب چهار نیستند. لذا این تعداد هرگز صفر نیست!

هر سری تتا یک تابع تحلیلی روی نیمصفحهٔ بالای $\mathcal{H}$ که خط حقیقی یک مرز طبیعی آن است، تعریف می‌کند. در حالی‌که ویژگیهای نمایش صحیح $Q(x)$ در ضرایب فوریهٔ این تابع نهفته‌اند، ویژگیهای نمایش موضعی $Q(x)$ در رفتار تابع در نزدیکی نقاط گویا نهفته‌اند. ایدهٔ اصلی در روش دایره این است که $\vartheta(z)$ به‌وسیلهٔ تابعی که در نقاط گویای a/c رفتار مشابهی دارد تقریب زده شود و بعد بسطهای فوریه مقایسه شوند. این ایده منجر می‌شود به اینکه سعی کنیم $r(n)$ را به‌ازای $n>0$ با سری نامتناهی زیر تقریب بزنیم

$$\rho(n)=c_Q n^{m/2-1}\sum_{c>0}A_c(n) \qquad (1)$$

که در آن $A_c(n)$ یک جمع نمایی متناهی مشخص است و c_Q ثابت مثبتی است که به فرم Q بستگی دارد.

این سری، سری تکین نامیده می‌شود زیرا از تکینه‌های گویای $\vartheta(z)$ حاصل می‌شود. سری تکین ارتباط قابل توجهی با حل‌پذیری موضعی $Q(x)=n$ دارد. فرض کنید $r(n,q)$ تعداد جوابهای همنهشتی $Q(x)\equiv n$ (پیمانهٔ q) باشد. نشان داده شده است که یک نمایش ضربی $\sum A_c(n)=\prod_p \alpha_p(n)$ وجود دارد که در آن $\alpha_p(n)$ چگالی p-ای نمایش است و با حد $\alpha_p(n)=\lim_{q=p^k\to\infty} r(n,q)/q^{m-1}$ مشخص می‌شود. سری و حاصلضرب بالا دقیقاً وقتی به یک حد غیرصفر همگرا هستند که حل‌پذیری موضعی را داشته باشیم (اگر $m>3$، همگرایی مطلق است).

در حالت کلی، رهیافت آنالیزی در مورد مسألهٔ نمایش صحیح این است که بنویسیم

$$r(n)=\rho(n)+a(n)$$

و سعی کنیم $a(n)$ را از بالا و $\rho(n)$ را وقتی صفر نیست از پایین برآورد نماییم.

تنها مانع در برابر اینکه $\rho(n)$، وقتی صفر نیست، اساساً به بزرگی $n^{m/2-1}$ باشد، امکان وجود اعداد اول pای است که $Q(x)$ به‌ازای آنها صفر را به‌صورت p-ای نمایش ندهد، یعنی به‌ازای aای، (پیمانهٔ p^a) $Q(x)\equiv 0$ نتیجه دهد (پیمانهٔ p) $x\equiv 0$. وقتی $m>4$، چنین pای وجود ندارد، پس در این حالت وقتی $\rho(n)$ صفر نیست داریم $\rho(n)\geq cn^{m/2-1}$ که c یک مقدار ثابت مثبت است. (در نظریهٔ تحلیلی اعداد معمول است که بنویسند $\rho(n)\gg n^{m/2-1}$؛ در این صورت از ثابت مثبت c به‌عنوان ثابت ضمنی یاد می‌شود). به‌ازای $m=3$ و $m=4$ چنین pهایی امکان وجود دارند، اما آنها شمارنده‌هایی از D هستند که به راحتی مشخص می‌شوند. اگر توانهایی را که این اعداد اول وقتی به آن توانها می‌رسند، n را می‌شمارند محدود کنیم، آنگاه برای $\rho(n)\neq 0$ وقتی $m=4$ کران $\rho(n)\gg n/\log(\log n)$ و وقتی $m=3$، به‌ازای هر $\epsilon>0$ کران $\rho(n)\gg n^{1/2-\epsilon}$ را داریم. کران اخیر نتیجهٔ قضیه‌ای از زیگل [۲۱] است و به معنای زیر ناکارآمد است: هیچ راه شناخته‌شده‌ای برای مشخص کردن ثابت ضمنی به‌ازای یک $\epsilon>0$ داده شده وجود ندارد. این امر منشأ غیرعملی بودن کاربردهای این روش در مورد فرمهای سه‌تایی است و رفع این اشکال یک مسأله حل‌نشدهٔ اساسی در نظریهٔ اعداد است. اگر فرضیهٔ ریمان را برای L-تابعهای دیریکله بپذیریم، آنگاه می‌توان در حالت $m=3$ یک کران پایین کارآمد ارائه کرد.

در موردکرانهای بالای $a(n)$، روش دایره بلافاصله کران $|a(n)|\ll n^{m/4}$ را به‌دست می‌دهد و این برای به‌دست آوردن نتیجهٔ زیر که دستاورد تارتاکوفسکی است کفایت می‌کند.

قضیه [۲۲]. برای فرمهای با پنج متغیر یا بیشتر، هر عدد به اندازهٔ کافی بزرگ n که به پیمانهٔ D نمایش داده شود، به‌صورت صحیح نمایش داده می‌شود.

در حالت $m=4$ کرانی که در بالا برای $|a(n)|$ ذکر شد دیگر (دقیقاً) کفایت نمی‌کند و همین جاست که کلوسترمن به موفقیت مهمش دست یافت: وی برآورد مربوط به $a(n)$ را بهبود بخشید و در نتیجه قضیهٔ بالا را به فرمهای چهارتایی گسترش داد، مشروط به اینکه توانهایی که وقتی اعداد اول معینی به آن توانها می‌رسند n را می‌شمارند، محدود شوند یا اینکه فقط نمایشهای اولیه در نظر گرفته شوند. قضیهٔ نمایش (اولیه) برای فرمهای با چهار متغیر یا بیشتر با روشهای جبری نیز اثبات شده است ([۱] را ببینید). در مورد فرمهای سه‌تایی مانع عمیقتری وجود دارد و تاکنون فقط رهیافت آنالیزی در برطرف کردن این مانع کاملاً موفق بوده است. برای این منظور طبیعی است رابطهٔ میان فرمهای درجهٔ دوم و فرمهای پیمانه‌ای را به‌کار بگیریم.

ضرایب فوریهٔ فرمهای پیمانه‌ای

نقش اساسی فرمهای پیمانه‌ای در مطالعهٔ فرمهای درجهٔ دوم پس از آنکه هاردی و رامانوجان به آن اشاره کردند، توسط هِکه و زیگل بسیار روشن شد.

این نقش بر این واقعیت استوار است که تابع تتا، $\vartheta(z)$، در قانون تبدیل زیر صدق می‌کند (به‌ازای $\gamma \in \Gamma$ که Γ یک زیرگروه همنهشتی خاص از گروه پیمانه‌ای است)

$$\vartheta(\frac{az+b}{cz+d}) = \mathcal{X}(\gamma)(cz+d)^{m/۲}\vartheta(z),$$

$$\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$\mathcal{X}(\gamma)$ ضریب خاصی است که می‌توان آن را به‌طور صریح مشخص کرد. همین مطلب در مورد تابع

$$E(z) = \sum_{n \geq ۰} \rho(n)e(nz), \qquad \rho(۰) = ۱$$

درست است که طوری ساخته شده است تا در نقاط گویا همانند تابع تتا رفتار کند. این بدان معنی است که تفاضل

$$f(z) = \vartheta(z) - E(z) = \sum_{n \geq ۱} a(n)e^{۲\pi i n z}$$

تابعی تحلیلی روی $\mathcal{H}$ است که در همان قانونهای تبدیل صدق می‌کند، اما دارای این ویژگی است که تابع $y^{m/۴}|f(z)|$، که روی خارج قسمت $\Gamma/\mathcal{H}$ خوشتعریف است، در آنجا کراندار است. به عبارت دیگر، $f(z)$ یک فرم تیزه‌ای با وزن $\frac{m}{۲}$ است. مسأله یافتن کران بالایی برای $a(n)$، در واقع مسألهٔ یافتن کرانی برای یک ضریب فوریه از یک فرم تیزه‌ای است. صرفِ کراندار بودن $y^{m/۴}|f(z)|$ کافی است تا برآورد $a(n) \ll n^{m/۴}$ را به‌دست دهد. این همان کران بدیهیِ به‌دست آمده از روش دایره است. زنکین، سِلبرگ و پترسن مستقل از هم دریافتند که صورتبندی زیبای دیگری از روش دایره، مبتنی بر سری پوانکاره و نظریهٔ $L^۲$ی ساده، وجود دارد که اصلاح انجام شده توسط کلوسترمن را در برمی‌گیرد. این صورتبندی، برآورد زیر را به‌دست می‌دهد و ما را به مقایسه آن با سری تکین (۱) فرا می‌خواند:

$$|a(n)|^۲ \ll n^{m/۲-۱}\sum_{c>۰} c^{-۱}K(n,c)J(n/c) \qquad (۲)$$

در اینجا $K(n,c)$ مجموع کلوسترمن زیر است

$$K(n,c) = \sum \overline{\mathcal{X}}(\gamma)e(n(a+d)/c)$$

و جمع روی $\gamma \in \Gamma$، که $۰ \leq a, d < c$، صورت می‌گیرد و J تابع بسلی است که مجموع کلوسترمن یک صورت متناهیِ آن است. اکنون مجموع کلوسترمن تقریباً c جمله دارد و اگر جمع (۲) را در $n = c$ بشکنیم و از $J(x) \ll \min(x^{m/۲-۱}, x^{-\frac{۱}{۲}})$ استفاده کنیم، هر کرانی به شکل $K(n,c) \ll c^{۱-\delta}$ با $\delta > ۰$، برآورد $a(n) \ll n^{m/۴-\delta/۲}$ را به‌دست می‌دهد. برای m زوج، ضریب $\mathcal{X}$ برابر ۱ است و هر کدام از مجموعهای کلوسترمن را که در (۲) ظاهر می‌شوند، می‌توان چنین نوشت

$$K(n,c) = \sum_{d\,(c \text{ پیمانه}),\,(c,d)=۱} e(n(\overline{d}+d)/c)$$

که $\overline{d}$ وارون ضربی d به پیمانهٔ c است. کلوسترمن برای برآورد خود نشان داد که می‌توان هر $\delta < \frac{۱}{۴}$ را در نظر گرفت. بعد از آن ویل از فرضیهٔ ریمان برای خمها نتیجه گرفت که می‌توان هر $\delta < \frac{۱}{۲}$ را در نظر گرفت. این نتیجه بهترین نتیجهٔ ممکن است. برای mفرد، ضریب $\mathcal{X}$ مخالف ۱ است و همان‌طور که سالیه[1] دریافت، در این وضعیت هر $\delta < \frac{۱}{۲}$ را می‌توان به سادگی به‌دست آورد.

یک راه دیگر برای به‌دست آوردن کرانی غیربدیهی برای $a(n)$، از طریق روش رنکین-سلبرگ [۲۰] است. به‌ازای m زوج (یعنی وزنهای صحیح) دِلینی[2] مسألهٔ برآورد $a(n)$ را، هنگامی که حدس رامانوجان را اثبات می‌کرد، به‌طور کامل حل کرد و کران $a(n) \ll n^{m/۴-۱/۲+\epsilon}$ را به‌دست آورد. (رامانوجان حدس خود را بر حسب $Q_{۲۴}$ بیان کرده بود!)

شاید خیلیها ندانند که به‌ازای mفرد ــ یعنی برای وزن نیمصحیح $m/۲$ ــ نیز حدس زده شده است که وقتی n خالی از مربع است همان کران برقرار است. این حدسِ وزنِ نیمصحیح رامانوجان، مسأله‌ای است حل‌نشده، اما از فرضیهٔ ریمان به‌ازای برخی Lـتابعهای سرتاسری نتیجه می‌شود. تا سال ۱۹۸۷ بهترین برآورد شناخته شده در حالت mفرد، برآورد متناظر با کران ویل برای مجموع کلوسترمن بود:

$$a(n) \ll n^{m/۴-۱/۴+\epsilon}$$

هرگونه بهبود این برآورد دقیقاً همان چیزی است که برای مسألهٔ نمایش فرمهای سه‌تایی مورد نیاز است، زیرا نمای $(m/۴) - (۱/۴) = (۱/۲)$ به کران پایین زیگل برای سری تکین نمی‌رسد. در ۱۹۸۷ یک پیشرفت مهم توسط ایوانیچ [۱۲] در حالت وزن نیمصحیح صورت گرفت. وی در مقاله‌اش موفق شد نمای $(m/۴) - (۱/۴)$ را برای mفرد بزرگتر از ۳ و n خالی از مربع کاهش دهد. اندکی بعد روشهای او گسترش داده شدند و حالت $m = ۳$ را نیز دربرگرفتند و در فرمهای درجه دوم سه‌تایی، چه معین و چه نامعین، به کار رفتند [۶، ۷]. سَرنَک در [۱۸] یک توصیف عالی از روش ایوانیچ عرضه کرده است.

درواقع فرمهایی تیزه‌ای با وزن ۳/۲ وجود دارند که کران $|a(n)| \geq cn^{۱/۲}$ را اختیار می‌کنند اما محمل آنها تنها تعدادی متناهی ردهٔ مربعی است. این مشکل جدید را جونز و پال [۱۳] در مبحث فرمهای درجه دوم کشف کردند. در[۱۹] مفهوم گونهٔ اسپینوری برای شناسایی موضعی این فرمهای شبه‌تیزه‌ای به‌کارگرفته شد و یک نسخهٔ گونهٔ اسپینوری از قضیهٔ نمایش برای فرمهای سه‌تایی در[۱۰] داده شده است. قضیهٔ زیر یکی از نتایج آن است که بیانی ساده دارد.

قضیه. هر عدد صحیح خالی از مربع و به اندازهٔ کافی بزرگ که به‌وسیلهٔ یک فرم سه‌تایی (به پیمانهٔ $D^۲$) قابل نمایش باشد، به‌صورت صحیح قابل نمایش است.

تکرار می‌کنم که راه شناخته‌شده‌ای برای برآورد عملی بزرگترین استثنای ممکن وجود ندارد مگر اینکه فرضیه‌های ریمانِ مشخصی را بپذیریم. این حکم را راس و پال [۱۷] و نیز واتسن [۲۳] حدس زده بودند. واتسن نتایج جالبی در مورد اعداد صحیحی که توسط یک فرم سه‌تایی به‌طور موضعی قابل نمایش هستند اما به‌صورت صحیح نمایش داده نمی‌شوند به‌دست آورد.

همان‌طور که قبلاً اشاره شد، رهیافتی کاملاً متفاوت به مسألهٔ نمایش سه‌تایی از طریق ربط دادن ضرایب فوریه به مقادیر ویژهٔ Lـتابعها امکانپذیر است. پس از کار اساسی شیمورا و والدزپرگر[3] می‌دانیم که کاهش دادن نمای ویل برای ضرایب فوریه معادل است با شکستن تحدب برای یک Lـتابع خودریختِ تاب‌خورده[4]. در اینجا شکستن تحدب به معنی کاهش دادن

1. Salié 2. Deligne 3. Waldspurger 4. twisted

برآوردی است که به‌وسیلهٔ معادلهٔ تابعی و قضیهٔ فراگمن‌ـلیندلوف برای بزرگی Lـتابع در نقطه بحرانی مرکزی بر حسب تاب داده می‌شود. در مقاله‌های [۸] کار شکستن تحدب برای این Lـتابعها و Lـتابعهای دیگر انجام شده است و بدین ترتیب اثباتهای تازه‌ای برای قضیه‌های نمایش سه‌تایی به‌دست آمده است. یک، دیدگاه دیگر در [۹] شرح داده شده است.

سومین جنبهٔ مسأله نمایش، فهمیدن چگونگی توزیع بردارهای نمایش‌دهندهٔ x روی بیضی‌گون $Q(x) = n$ و در تصاعدهای حسابی به یک، پیمانهٔ ثابت است. این همان چیزی است که، به‌عنوان نمونه، برای اثبات حکمهایی در مورد نمایش اعداد به‌صورت مجموع اعداد چند جمله‌ای مورد نیاز است. روشهای شرح داده شده در این مقاله، در مورد این مسألهٔ توزیع نیز کاربرد دارند زیرا همسازها [هارمونیکها]ی مناسبِ لازم برای یافتن چنین توزیعی را می‌توان در قالب سری تتا جمع‌آوری کرد. به بیان غیردقیق، نتیجهٔ کلی این است که حتی وقتی توجه خود را به تصاعدهایی خاص محدود کنیم، بردارهای نمایش دهنده به شرط اینکه به اندازهٔ کافی زیاد باشند، روی بیضی‌گون $Q(x) = n$ وقتی n بزرگ می‌شود به‌صورت یکنواخت توزیع می‌شوند. برای دیدن مراجع مربوطه به جنبه توزیعی مسألهٔ نمایش و جزئیات مربوط به حالت سه‌تایی، می‌توانید به [۱۰] مراجعه کنید.

سپاسگزاری

مایلم ازکانوی، روسی[1]، سرنک، و شولتز‌ـپیلوت برای اظهارنظرهای ارزشمندشان در مورد نسخه اولیهٔ این مقاله تشکر کنم.

مراجع

1. J. W. S. Cassels, *Rational quadratic forms*, Academic Press, 1978.
2. J. H. Conway and W. Schneeberger, to appear.
3. P. Deligne, *La conjecture de Weil*. I, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **43** (1973), 273-308.
4. L. E. Dickson, *History of the theory of numbers*, II, Chelsea Publishing, 1971.
5. ———, *Integers represented by positive ternary quadratic forms*, Bull. Amer. Math. Soc. **33** (1927), 63-70.
6. W. Duke, *Hyperbolic distribution problems and half-integral weight Maass forms*, Invent. Math. **92** (1988), 73-90.
7. ———, *Lattice points on ellipsoids*, Sém. Théor. Nombres Bordeaux (2), 1987-88, NO. 37, pp. 1-6.
8. W. Duke, J. Friedlander, and H. Iwaniec, *Bounds for automorphic L- functions* I, II, Invent. Math. **112, 115** (1993, 1994), 1-8, 219-239.
9. ———, *Bilinear forms with Kloosterman fractions*, to appear in Invent. Math.
10. W. Duke and R. Schulze-Pillot, *Representations of integers by positive ternary quadratic forms and equidistribution of lattice points on ellipsoids*. Invent. Math. **99** (1990), 49-57.
11. R. K. Guy, *Every number is expressible as a sum of how many polygonal numbers?*, Amer. Math. Monthly **101** (1994), 169-172.
12. H. Iwaniec, *Fourier coefficients of modular forms of half-integral weight*, Invent. Math. **87** (1987), 385-401.
13. B. W. Jones and G. Pall, *Regular and semi-regular positive ternary quadratic forms*, Acta. Math. **70** (1939), 165-191.
14. H. D. Kloosterman, *On the representation of numbers in the form $ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2$*, Acta. Math. **49** (1926), 407-464.
15. K. Ono and K. Soundararajan, *Ramanujan's ternary quadratic form*, preprint. 1996.
16. S. Ramanujan, *On the expression of a number in the form $ax^2 + by^2 + cz^2 + du^2$*, Collected Papers, Chelsea.
17. A. Ross and G. Pall, *An extension of a problem of Kloosterman*, Amer. J. Math. **68** (1946), 59-65.
18. P. Sarnak, *Some applications of modular forms*, Cambridge, 1990.
19. R. Schulze-Pillot, *Thetareihen positiv definiter quadratischer Formen*, Invent. Math. **75** (1984), 283-299.
20. A. Selberg, *On the estimation of Fourier coefficients of modular forms*, Proc. Sympos. Pure Math., vol. VIII, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1965, pp. 1-15.
21. C. L. Siegel, *Über die Classenzahl quadratischen Zahlkörper*, Acta Arith. **1** (1936), 83-86.
22. W. Tartakowsky, *Die Gesamtheit der Zahlen, die durch eine quadratische Form $F(x_1, x_2, \ldots, x_s)$, $(s \geq 4)$ darstellbar sind*, Bull. Acad. Sci URSS **7** (1929), 111-122.
23. G. L. Watson, *The representation of integers by positive ternary quadratic form*, Mathematika **1** (1954). 104-110.
24. A. Weil, *Number theory: An approach through history*, Birkhäuser. 1984.

******

• William Duke, "Some old problems and new results about quadratic forms", *Notices Amer. Math. Soc.*, (2) **44** (1997) 190-195.

* ویلیام دوک، دانشگاه راتگرز آمریکا

duke@math.rutgers.edu

1. H. Rossi