داستان دو انتگرال•

ویلموش توتیک*
ترجمهٔ فرزانه صفوی‌منش

۱. مسأله

در اینجا چند رویکرد برای حل مسأله‌ای ارائه می‌کنیم که در نگاه اول ساده به‌نظر می‌رسد، اما مسألهٔ ترکیبیاتی-آنالیزی مهمی است. هدف ما این است که نشان دهیم چگونه ایده‌های متفاوت ممکن است به جواب یکسانی برسند.

صورت مسأله ساده است: فرض کنید f و g دو تابع انتگرال‌پذیر روی $[0,1]$ باشند که

$$\int_0^1 f = \int_0^1 g = 1. \tag{1}$$

نشان دهید بازه‌ای مانند I، $I \subset [0,1]$، وجود دارد به قسمی که

$$\int_I f = \int_I g = \frac{1}{2}. \tag{2}$$

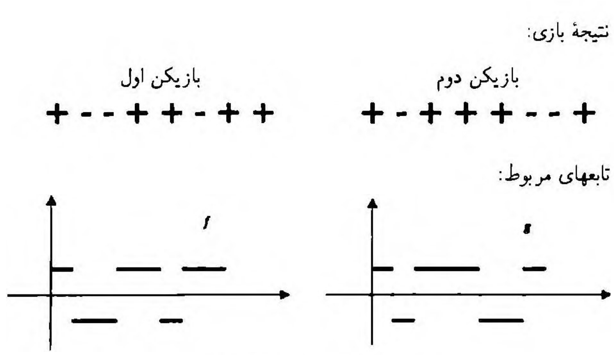
ممکن بود به‌جای $[0,1]$ هر بازهٔ دیگری داشته باشیم و لازم نیست انتگرالهای f و g برابر با ۱ باشند. حکم کلی این است که همواره تک‌بازه‌ای موجود است که انتگرال هر تابع بر آن برابر با نصف انتگرال کل آن است.

فرمول‌بندی معادلی بدون استفاده از انتگرال وجود دارد که به این صورت است: *در یک بازی بلک‌جک*[۱]*، فرد ممکن است در هر دست یک دلار ببرد یا ببازد. فرض کنید دو بازیکن، که در هر دقیقه از یک دور، یک بار بازی می‌کنند، درمی‌یابند که سرانجام هر دوی آنها دقیقاً $2N$ دلار می‌برند. نشان دهید که بازه‌ای زمانی وجود داشته که در طول آن هر دوی آنها دقیقاً N دلار برده‌اند.*

حال، معادل بودن این دو شکل مسأله را تشریح می‌کنیم. شکل دوم نتیجه‌ای از شکل نخست است اگر آن را بر توابع پله‌ای مناسبی مانند f و g با مقادیر ± 1 که نتیجهٔ بازیهای بلک‌جک را مدل‌بندی می‌کنند اِعمال کنیم (شکل ۱ را ببینید). در این صورت، بازه‌ای مانند (a,b) وجود دارد که روی آن هر دوی f و g انتگرالی برابر با N دارند. اگر a و b هر دو اعدادی صحیح باشند، آنگاه، با بازگشت به بازی بلک‌جک، بازه‌ای زمانی با ویژگیهای مطلوب به دست می‌آوریم. اگر a و b اعدادی صحیح نباشند، آنگاه به‌ازای αای که $0 < \alpha < 1$، داریم $a = [a] + \alpha$ و $b = [b] + \alpha$. اگر $\alpha \neq \frac{1}{2}$، آنگاه انتگرالهای f و g روی $([a],[b])$ مجدداً برابر با N می‌شوند؛ بنابراین باز به حالت اعداد صحیح می‌رسیم. این امر وقتی $\alpha = \frac{1}{2}$ و هر دو تابع در a و b علامت یکسانی داشته باشند نیز صادق است. سرانجام، اگر $\alpha = \frac{1}{2}$ و یکی از آنها در a و b علامتهای متفاوتی داشته باشد، آنگاه استدلالی ساده (بر مبنای این حقیقت که دو مجموع به فرم $\sum_{k=1}^{m} \pm 1$ یا برابرند یا به اندازهٔ یک عدد صحیح زوج با یکدیگر اختلاف دارند) نشان می‌دهد که همین امر به‌ازای توابع دیگر نیز برقرار است و بنابراین، انتگرالها روی $([a]+1,[b])$ باز برابر با Nاند.

از سوی دیگر، فرض کنید حکم بلک‌جک برقرار باشد و f و g دو تابع باشند که در (۱) صدق می‌کنند. می‌توانیم فرض کنیم f و g کراندارند، مثلاً $|f| \leqslant M$ و $|g| \leqslant M$. در این صورت می‌توان نمودارهای توابع

$$\frac{1}{M}\int_0^x f \qquad \text{و} \qquad \frac{1}{M}\int_0^x g$$



شکل ۱ معادل بودن دو فرمول‌بندی

۱. blackjack: نوعی بازی با ورق که در آن بازیکنان سعی در جمع‌آوری کارتهایی دارند که امتیاز آنها هرچه نزدیک‌تر به ۲۱، و نه بیش از آن، باشد.ـــ م.

را به‌خوبی با تقریب دلخواهی به‌وسیلهٔ خمهای تکه‌ای-خطی با رئوس هم‌فاصله و شیبهای ± 1 تقریب زد. سپس می‌توان توابع شیب این خمها را به‌عنوان نتیجهٔ بازیهای بلک‌جک برای دو بازیکن در نظر گرفت ($+1$ برای بُردن و -1 برای باختن یک دلار)؛ بنابراین می‌توان دومین فرمول‌بندی را به‌کار برد. رسیدن از اینجا به (۲)، یک فرایند حدی معمولی است که در زیر مورد بحث قرار می‌گیرد.

ما به فرمول‌بندیِ نخست وفادار می‌مانیم، گرچه مفهوم دقیق «انتگرال‌پذیر» مطرح نباشد. در حقیقت، اگر فرض کنیم f و g پیوسته یا توابعی پله‌ای‌اند، مسأله ساده‌تر نمی‌شود. برای درک این مطلب کافی است به شرح ذیل توجه کنید. فرض کنید f_n و g_n توابعی باشند که در (۱) صدق می‌کنند به قسمی که

$$\int_0^1 |f_n - f| \to 0 \qquad \text{و} \qquad \int_0^1 |g_n - g| \to 0$$

و فرض کنید می‌توانیم وجود بازه‌های I_n، $I_n = (a_n, b_n)$ را که به‌ازای جفتهای f_n، g_n در (۲) صدق می‌کنند ثابت کنیم. با انتخاب زیردنباله‌ای از اعداد طبیعی مانند $\mathbf{N}_1$ که به‌ازای آن $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}_1}$ و $\{b_n\}_{n\in\mathbf{N}_1}$ به a و bای همگرا باشند، می‌توانیم نشان دهیم (۲) به‌ازای $I = (a, b)$ برقرار است. بنابراین، بدون از دست دادن کلیت، می‌توانیم فرض کنیم که f و g متعلق به زیر فضای چگال مفروضی از فضای توابع انتگرال‌پذیر، مثلاً فضای توابع پیوسته یا فضای توابع پله‌ای، باشند.

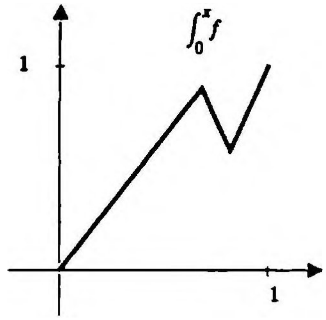
ما چند راه حل برای این مسأله ارائه می‌کنیم که به نتایج ترکیبیاتی یا هندسی/توپولوژیک دیگری مربوط می‌شوند. برخی از این راه‌حلها واقعاً متفاوت و برخی به یکدیگر وابسته‌اند، اما همهٔ آنها مبتنی بر برخی واقعیات شناخته‌شدهٔ ریاضی‌اند. رویکردهای دیگری نیز شناخته شده‌اند، اما هیچ یک از آن راه‌حلهای مقدماتی (عمدتاً مبتنی بر استقرا) که من می‌شناسم آنقدر کوتاه نیستند که بتوان آنها را در یکی دو صفحه ارائه کرد.

این مسأله در مسابقهٔ ریاضی میکلوش شوایتسر[1] ۱۹۹۵ در مجارستان مطرح شد. این رشته مسابقات، رقابت ریاضی منحصر به‌فردی است که از سال ۱۹۴۹ هر پاییز به همت انجمن ریاضی یانوش بویویی بین دانشجویان دانشگاه و تازه‌فارغ‌التحصیلان برگزار می‌شود، اما گاه دانش‌آموزان مستعد دبیرستانی نیز موفق می‌شوند در آن شرکت کنند. حدود دوازده مسأله (تقریباً همگی جدید) از شاخه‌های گوناگون ریاضی طرح می‌شود و دانشجویان ۱۰ روز فرصت دارند که با استفاده از همهٔ منابع موجود آنها را حل کنند. بنابراین، مسائل به میزان قابل ملاحظه‌ای دشوارتر از سؤالات المپیادها و مسابقات ریاضی دیگرند. مسائل و پاسخهای مسابقات سالهای ۱۹۶۲-۱۹۹۱ در سری کتابهای مسائل اشپرینگر[2] با عنوان مسابقاتی در ریاضیات پیشرفته‌تر[3] منتشر شده است.

مسأله دشوارتر از آن بود که انتظارش می‌رفت. در حقیقت، اولین فکری که به ذهن می‌رسد یعنی حرکت دادنِ پیوستهٔ a و b، نقاط انتهایی بازهٔ $I = (a, b)$، به مانع بزرگی برمی‌خورد. این استدلال را می‌توان چنین پیش برد: a_0ای وجود دارد به قسمی که به‌ازای هر a، $0 \leqslant a \leqslant a_0$، b_aای هست

1. Miklós Schweitzer 2. Springer

3. *Contests in Higher Mathematics*, ED. G. J. Székely, 1995.



شکل ۲ تابع پیوسته‌ای چون $b(a)$ وجود ندارد

که $\int_a^{b_{a_0}} f = \frac{1}{2}$. اگر $\int_0^{b_0} g = \frac{1}{2}$، آنگاه کار تمام است. اگر، مثلاً، $\int_0^{b_0} g < \frac{1}{2}$، آنگاه باید داشته باشیم $\int_{b_0}^1 g > \frac{1}{2}$. بنابراین، اگر a را به‌طور پیوسته از 0 تا b_0 حرکت دهیم، مقداری از a موجود خواهد بود که به‌ازای آن انتگرال $\int_a^{b_{a_0}} g$ دقیقاً $\frac{1}{2}$ است، و بنابراین $I = (a, b_a)$ مناسب است. مشکل این استدلال این است که b_a به‌طور پیوسته به a وابسته نیست و لذا کل استدلال نقش بر آب می‌شود. حتی بدتر از آن، در حالت کلی هیچ تابع پیوسته‌ای مانند $b(a)$ وجود ندارد که به‌ازای هر a، $a \in [0, a_0]$، داشته باشیم

$$\int_a^{b(a)} f = \frac{1}{2}. \qquad (3)$$

(شکل ۲ را ببینید). بنابراین، استدلال فوق را نمی‌توان اصلاح کرد.

اگر f اکیداً مثبت باشد، این استدلال سادهٔ مبتنی بر پیوستگی کارساز است زیرا در این صورت یک $b(a)$ موجود است که در (۳) صدق می‌کند و تابع $b(a)$ پیوسته است. با افزودن ϵ به f و سپس با فرض اینکه $\epsilon \to 0$، می‌توانیم نتیجه بگیریم که همین امر برای f نامنفی نیز برقرار است. همچنین متذکر می‌شویم که به‌ازای تابع f تکه‌ای-ثابت، توابع پیوستهٔ $a(t)$ و $b(t)$ بر بازهٔ پارامتری $[0, 1]$ وجود دارند به قسمی که

$$\int_{a(t)}^{b(t)} f = \frac{1}{2}, \qquad (4)$$

$a(0) = 0$، $a(1) = b(0)$، و $b(1) = 1$، بنابراین می‌توان استدلالی مبتنی بر پیوستگی، مانند آنچه پیش‌تر آمد، مطرح کرد. با این حال، اثبات وجود $a(t)$ و $b(t)$ به دشواریِ حل مسألهٔ اصلی است.

۲. قضیهٔ تقاطر بورساک[1]-اولام[2]

قضیهٔ بورساک-اولام [۱، ص. ۲۴۱] حاکی است که *اگر T، $T : S^2 \to \mathbf{R}^2$، نگاشت پیوسته‌ای از S^2 (کُرهٔ یکه در R^3) به صفحه باشد، آنگاه یک جفت نقطهٔ متقاطر $\{X, -X\}$ از S^2 موجودند که تصویر یکسانی دارند*: $T(X) = T(-X)$. اگر T فرد نیز باشد، یعنی به‌ازای هر $Y \in S^2$، $T(-Y) = -T(Y)$، آنگاه باید داشته باشیم $T(X) = (0, 0)$. همین وضع در ابعاد بالاتر نیز برقرار است؛ یعنی اگر T، $T : S^l \to \mathbf{R}^l$، نگاشت

1. Borsuk 2. Ulam

پیوسته‌ای از کرهٔ یکه در $\mathbf{R}^{l+1}$ باشد، آنگاه یک جفت نقطهٔ متقاطر $\{X,-X\}$ روی S^l موجودند که تصویر یکسانی دارند.

با استفاده از قضیهٔ بورساک‌ـ‌اولام، حل مسألهٔ ما ساده است. فرض کنید (ξ_1,ξ_2,ξ_3)، $\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2=1$، نقطه‌ای روی S^2 باشد و

$$T(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\big(X(f;\xi_1,\xi_2,\xi_3),X(g;\xi_1,\xi_2,\xi_3)\big),$$

که در آن

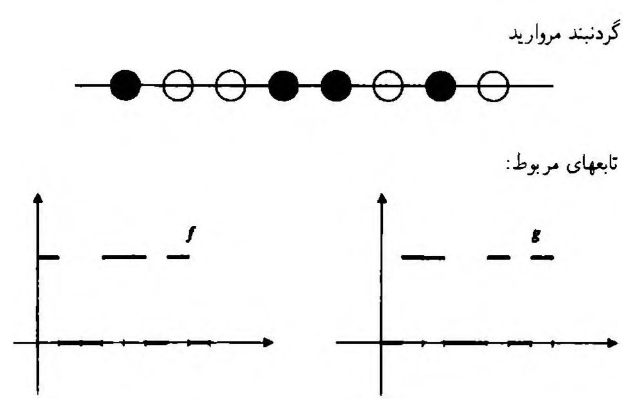
$$X(f;\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\mathrm{sign}(\xi_1)\int_0^{\xi_1^2} f+\mathrm{sign}(\xi_2)\int_{\xi_1^2}^{\xi_1^2+\xi_2^2} f + \mathrm{sign}(\xi_3)\int_{\xi_1^2+\xi_2^2}^1 f. \qquad (5)$$

از آنجا که T نگاشت فرد پیوسته‌ای از S^2 به صفحه است، قضیهٔ بورساک‌ـ‌اولام تضمین می‌کند که نقطه‌ای مانند $(\xi_1^*,\xi_2^*,\xi_3^*)$ توسط T به $(0,0)$ نگاشته می‌شود. در بین اعداد ξ_1^*، ξ_2^*، و ξ_3^*، دو تای آنها علامت یکسانی دارند (فرض کنید ۰ مثبت باشد). اگر سومین عدد ξ_j^* باشد و I نشان‌دهندهٔ بازه‌ای به طول ${\xi_j^*}^2$ در انتگرالِ ضرب شده در $\mathrm{sign}(\xi_j^*)$ در (۵) باشد، آنگاه طبق تعریفِ T و اینکه $T(\xi_1^*,\xi_2^*,\xi_3^*)=(0,0)$، نتیجه می‌شود که

$$\int_I g=\int_{[0,1]\setminus I} g \qquad و \qquad \int_I f=\int_{[0,1]\setminus I} f$$

اگر شرط $\int_0^1 f=\int_0^1 g=1$ را نیز در نظر بگیریم، این ادعا با همین I ثابت می‌شود.

قضیهٔ بورساک‌ـ‌اولام ابزاری متعارف در حل مسألهٔ گردنبند مروارید، به شرح زیر، است: *دو دزد دریایی یک رشته گردنبند دارند که شامل $2k$ مروارید سیاه و $2k$ مروارید سفید است که بدون هیچ ترتیبی در آن قرار گرفته‌اند. آنها می‌خواهند گردنبند را با کمترین تعداد برشِ ممکن طوری ببُرند که پس از تقسیم قطعات گردنبند بین خودشان، هر یک دقیقاً k مروارید سفید و k مروارید سیاه داشته باشند.* تغییر ساده‌ای در راه حل قبلی به ما امکان می‌دهد



شکل ۳ حالت سادهٔ مسألهٔ گردنبند

نتیجه بگیریم که همواره دو برش کافی است (یعنی، همواره دنباله‌ای مرکب از $2k$ مروارید متوالی در گردنبند وجود دارد که شامل k مروارید از هر نوع است). این متناظر با حالتی در مسألهٔ اصلی ماست که در آن هر دو تابع (نشان‌دهندهٔ دو نوع مروارید بر بازه‌هایی هم‌طول؛ شکل ۳ را ببینید) نامنفی‌اند؛ بنابراین نیازی به قضیهٔ تقاطر نداریم، زیرا جواب با یک استدلال ساده بر اساس پیوستگی حاصل می‌شود. اگر گردنبند شامل l نوع مروارید، و $2k$ مروارید از هر نوع موجود باشد، می‌توانیم با استفاده از قضیهٔ بورساک‌ـ‌اولام در ابعادِ بالاتر نشان دهیم که همواره l برش کافی است.

به طریقی مشابه، با استفاده از قضیهٔ تقاطر در ابعاد بالاتر، به تعمیم زیر از مسألهٔ اصلی می‌رسیم که پینکاس[1] آن را به دست آورده است: *اگر $f_1,\dots,f_l\in L^1[0,1]$ و به‌ازای هر j، $j=1,\dots,l$، $\int_0^1 f_j=1$، آنگاه مجموعه‌ای مانند I متشکل از حداکثر $\frac{l+1}{2}$ بازه موجود است به قسمی که به‌ازای هر j، $j=1,\dots,l$، $\int_I f_j=\frac{1}{2}$.*

۳. مسألهٔ کوهنوردی

آیا ممکن است دو کوهنورد از دو طرف یک کوه به سمت قلهٔ آن حرکت کنند به قسمی که هر دوی آنها همواره در یک ارتفاع باشند (ر.ک. [۷] و [۹])؟ گرچه چند مانع آشکار وجود دارند که آنها را از چنین کاری باز می‌دارند، پاسخ مثبت است اگر دو طرف کوه به شکل خمهای تکه‌ای‌ـ‌خطی باشند و کوهنوردان صعود خود را از کوهپایه آغاز کرده باشند [۶]. نشان می‌دهیم که این نتیجه به راه حلی برای مسألهٔ ما دلالت دارد.

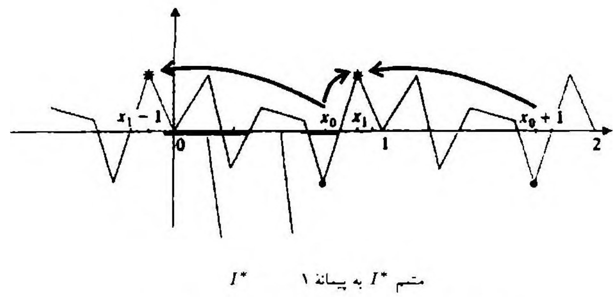
می‌توانیم فرض کنیم که هر دوی f و g تکه‌ای‌ـ‌ثابت باشند. در این صورت

$$H(x)=\int_0^x (f(u)-g(u))du$$

تکه‌ای‌ـ‌خطی است و $H(0)=H(1)$، بنابراین می‌توانیم H را به یک تابع پیوسته با دورهٔ تناوب ۱ گسترش دهیم. همچنین f و g را به‌طور دوره‌ای با دورهٔ تناوب ۱ به $\mathbf{R}$ گسترش می‌دهیم. نمودار H «کوهستان» ماست (شکل ۴ را ببینید)، و دو کوهنورد از سطح پایین (دامنهٔ) کوه، مثلاً از نقاط x_0 و x_0+1، به سمت یکی از نقاط ماکسیممِ H در $[x_0,x_0+1]$، مثلاً به سمتِ قلهٔ واقع در x_1، صعود می‌کنند. طبق [۶] آنها می‌توانند چنین کاری را انجام دهند و همواره در یک ارتفاع باشند. حال می‌توانیم، به واسطهٔ تناوب، فرض کنیم که هر دو کوهنورد از x_0 شروع می‌کنند، اولین نفر به طرف راست به سمت قلهٔ واقع در x_1 حرکت می‌کند، در حالی که دومی به طرف چپ به سمت قلهٔ واقع در x_1-1 صعود می‌کند. فرض کنید مختصهای x دو کوهنورد در لحظهٔ t، $t\in[0,1]$، $\gamma_1(t)$ و $\gamma_2(t)$ باشند. بنابراین، γ_jها توابعی پیوسته‌اند به قسمی که $\gamma_1(0)=\gamma_2(0)=x_0$ و $\gamma_1(1)=x_1$، $\gamma_2(1)=x_1-1$، و در هر لحظه، $\gamma_2(t)\leqslant x_0\leqslant\gamma_1(t)$. از آنجا که کوهنوردها همواره در ارتفاع یکسانی می‌مانند، داریم

$$\int_{\gamma_2(t)}^{\gamma_1(t)} f(u)du=\int_{\gamma_2(t)}^{\gamma_1(t)} g(u)du. \qquad (6)$$

1. A. Pinkus



شکل ۴ کوهی که دو کوهنورد روی آن صعود می‌کنند

ولی انتگرال طرف چپ به‌ازای $t=۰$ صفر است و به‌ازای $t=۱$، ۱ است زیرا $[\gamma_۲(۱);\gamma_۱(۱)]=[x_۱-۱,x_۱]$ دورهٔ کاملی برای f و تابعی پیوسته از t است. بنابراین $t=t^*$ای وجود دارد که به‌ازای آن، طرف چپ برابر با $\frac{۱}{۲}$ است. اما در این صورت، طرف راست نیز $\frac{۱}{۲}$ است و این بدان معنی است که به‌ازای $I^*=[\gamma_۲(t^*),\gamma_۱(t^*)]$ داریم

$$\int_{I^*} f=\int_{I^*} g=\frac{۱}{۲}.$$

به‌نظر می‌رسد این همان چیزی است که در جستجوی آنیم، اما باید مراقب باشیم، زیرا ممکن است بازهٔ I^* متعلق به $[۰,۱]$ (یا همین‌طور به بازه‌ای مانند $[n,n+۱]$ با n صحیح) نباشد. اگر چنین باشد کافی است قرار دهیم $I=I^*$. اگر نباشد، آنگاه می‌توانیم به‌جای I متمم آن در $[۰,۱]$ به پیمانهٔ ۱ را در نظر بگیریم (شکل ۴ را ببینید)، که با توجه به (۱)، در (۲) صدق می‌کند.

این راه حل به تعمیم زیر می‌انجامد.

فرض کنید f و g توابعی انتگرال‌پذیر روی $[۰,۱]$ باشند که در (۱) صدق می‌کنند، و $۰<\alpha<۱$. اگر هیچ بازهٔ Iای، $I\subset[۰,۱]$، موجود نباشد که

$$\int_I f=\int_I g=\alpha$$

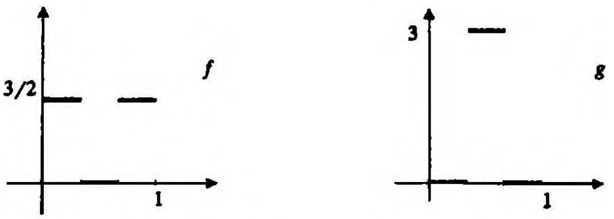
آنگاه بازه‌ای مانند I موجود است که

$$\int_I f=\int_I g=۱-\alpha. \qquad (۷)$$

اگر $I^*\subset[۰,۱]$، از برهان خود نتیجه می‌گیریم $I=I^*$؛ اگر $I^*\not\subset[۰,۱]$، آنگاه متمم آن به پیمانهٔ ۱ به‌عنوان I در (۷) مناسب است.

بنابراین، به‌ازای هر α، $\alpha\in(۰,۱)$ مفروض، همواره بازه‌ای مانند I موجود است که در آن هم انتگرال f و هم انتگرال g یا برابر با α است یا $۱-\alpha$. به‌ازای $\alpha=\frac{۱}{۲}$، این بدان معنی است که همان‌طور که در مسأله ادعا شده، هر دوی f و g انتگرالی برابر با $\frac{۱}{۲}$ دارند. به‌ازای $\alpha=\frac{۱}{۳}$ بازه‌ای مانند I موجود است به قسمی که یا انتگرال هر دو تابع روی I، $\frac{۱}{۳}$اند یا $\frac{۲}{۳}$. در حالت دوم می‌توانیم حالت $\alpha=\frac{۱}{۲}$ را که هم‌اکنون ثابت شد در مورد I به کار ببریم و نتیجه بگیریم که روی زیربازه‌ای از I هر دو تابع انتگرالی برابر با $\frac{۱}{۳}=۲/(۲/۳)$ دارند. بنابراین، بازه‌ای موجود است که هر دو انتگرال روی آن برابر با $\frac{۱}{۳}$اند. این استدلال را می‌توان تا رسیدن به بازه‌ای که هر دو انتگرال روی آن برابر با یکی از مقادیر مفروض $\frac{۱}{۴}$، $\frac{۱}{۵}$، ... شود تکرار کرد. این تعمیمی از مسألهٔ اصلی است: *فرض کنید f و g دو تابع انتگرال‌پذیر روی $[۰,۱]$ باشند که در (۱) صدق می‌کنند و همچنین فرض کنید k عدد صحیح مثبتی باشد. در این صورت، بازه‌ای مانند I وجود دارد به قسمی که*

$$\int_I f=\int_I g=\frac{۱}{k}. \qquad (۸)$$



شکل ۵ بازهٔ مشترکی به‌ازای $\frac{۱}{۲}<\alpha<۱$ وجود ندارد

این حکم به‌ازای هر α، $\alpha\in(۰,۱)$، که به شکل $\alpha=\frac{۱}{k}$ نباشد نادرست است. در حقیقت اگر وقتی $\frac{۲k}{۲n+۱}\le x\le\frac{۲k+۱}{۲n+۱}$ $(k=۰,۱,\ldots,n)$، داشته باشیم $f(x)=\frac{۲n+۱}{n+۱}$ و در غیر این صورت $f(x)$ صفر باشد، و اگر وقتی $\frac{۲k-۱}{۲n+۱}\le x\le\frac{۲k}{۲n+۱}$ $(k=۱,۲,\ldots,n)$، داشته باشیم $g(x)=\frac{۲n+۱}{n}$ و در غیر این صورت $g(x)$ صفر باشد، آنگاه به‌ازای هیچ αای، $\alpha\in\left((n+۱)^{-۱},n^{-۱}\right)$، بازه‌ای مانند I موجود نیست که به‌ازای آن

$$\int_I f=\int_I g=\alpha$$

(شکل ۵ را که حالت $n=۱$ در آن نشان داده شده ببینید).

۴. قضیهٔ وتر[1]

این قضیه [۳، صص. ۲۱ و ۱۹۸-۱۹۹] حاکی است که: *اگر γ یک خم پیوسته روی صفحه با نقاط انتهایی A و B باشد، آنگاه به‌ازای هر عدد صحیح مثبت k وتری مانند $\overline{CD}$ از γ وجود دارد (یعنی، $C,D\in\gamma$) که با $\overline{AB}$ موازی و طول آن $\frac{۱}{k}$ طول $\overline{AB}$ است.*

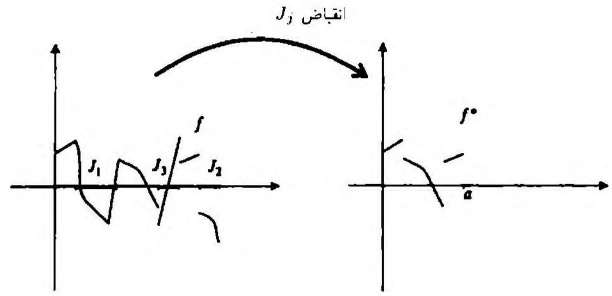
قضیهٔ وتر را در مورد خم

$$\gamma(t):=\left(\int_۰^t f(u)du,\ \int_۰^t g(u)du\right),\qquad t\in[۰,۱]$$

با $k=۲$ به‌کار می‌بریم. از آنجا که نقاط انتهایی γ، $(۰,۰)$ و $(۱,۱)$اند، γ وتری به شکل $\overline{(X,Y)(X+\frac{۱}{۲},Y+\frac{۱}{۲})}$ دارد، یعنی اگر پارامترهای $t_۱$ و $t_۲$، $t_۱,t_۲\in[۰,۱]$، را به قسمی انتخاب کنیم که $\gamma(t_۱)=(X,Y)$ و $\gamma(t_۲)=(X+\frac{۱}{۲},Y+\frac{۱}{۲})$، آنگاه

$$\int_{t_۱}^{t_۲} f(u)du=\int_{t_۱}^{t_۲} g(u)du=\frac{۱}{۲} \qquad (۹)$$

1. chord theorem



شکل ۶ انقباض J_kها

و به نظر می‌رسد که مسأله را حل کرده‌ایم. اما روزا[1] خاطرنشان کرد که ممکن است داشته باشیم $t_۱ > t_۲$، یعنی اگر I بازه‌ای باشد که به‌وسیلهٔ پارامترهای $t_۱$ و $t_۲$ معین شده (که به‌ازای $t_۱ > t_۲$ به‌صورت $[t_۲, t_۱]$ است)، آنگاه (۹) بدان معنی است که روی I هر دو تابع انتگرالهایی برابر با $-\frac{۱}{۲}$ به جای $\frac{۱}{۲}$ دارند، بنابراین قضیهٔ وتر آنچه را که می‌خواهیم به دست نمی‌دهد.

رویکرد ما از طریق قضیهٔ وتر ممکن است به‌صورت زیر نتیجه‌بخش باشد. می‌توانیم فرض کنیم f و g توابع تکه‌ای‌ـ‌ثابتی باشند که روی هیچ زیربازه‌ای صفر نمی‌شوند. زیربازهٔ ماکسیمالی مانند $J_۱$، $J_۱ \subset [۰,۱)$، را به قسمی انتخاب می‌کنیم که انتگرالهای f و g روی $J_۱$ برابر باشند و مقدار مشترک انتگرالها یا صفر باشد یا مضرب صحیح مثبتی از $-\frac{۱}{۲}$. سپس زیربازهٔ ماکسیمالی مانند $J_۲$، $J_۲ \subset [۰,۱)$، مجزا از $J_۱$، انتخاب می‌کنیم به قسمی که انتگرالهای f و g روی $J_۲$ برابر باشند و مقدار مشترک این انتگرالها یا صفر باشد یا مضرب صحیح مثبتی از $-\frac{۱}{۲}$. این فرایند را با انتخاب زیربازه‌های ماکسیمالی که از همهٔ زیربازه‌های قبلاً انتخاب‌شده مجزا باشند همچنان ادامه می‌دهیم. ادعا می‌کنیم که این فرایند باید پس از تعدادی متناهی مرحله پایان یابد. اگر چنین نباشد، خانواده‌ای نامتناهی از زیربازه‌های مجزا موجود است که روی آنها انتگرال f یا صفر است یا مضرب مثبتی از $-\frac{۱}{۲}$. اینکه ممکن نیست انتگرال به‌ازای بینهایت زیربازهٔ مجزا مضرب مثبتی از $-\frac{۱}{۲}$ باشد واضح است. بنابراین، بینهایت بازهٔ مجزا موجودند که f روی آنها انتگرالهای صفر دارد. ولی این هم غیر ممکن است، زیرا هر چنین بازه‌ای باید شامل یک نقطهٔ ناپیوستگیِ f باشد؛ یادآوری می‌کنیم که f تابعی تکه‌ای‌ـ‌ثابت با مقادیر غیر صفر است.

فرض کنید بازه‌های ماکسیمال انتخاب‌شده $J_۱$، ...، J_m باشند. هر J_k را منقبض می‌کنیم تا به یک نقطه تبدیل شود (شکل ۶ را ببینید). بازه‌ای مانند $[۰,a)$، عدد صحیحی چون k، $k \geqslant ۲$، و دو تابع f^* و g^* را به قسمی به دست می‌آوریم که

$$\int_۰^a f^* = \int_۰^a g^* = \frac{k}{۲}.$$

توجه کنید که زیربازه‌هایی از $[۰,۱)$ را که انتگرالها روی آنها مضرب نامنفی صحیحی از $-\frac{۱}{۲}$ بودند کنار گذاشته‌ایم. حال، صورت $\frac{۱}{k}$ قضیهٔ وتر را برای این جفت به کار می‌بریم. مانند قبل، زیربازه‌ای مانند I^* از $[a,b]$ به قسمی به دست می‌آوریم که f^* و g^* انتگرالهای یکسانی روی I^* داشته باشند و مقدار مشترک این انتگرالها $\pm\frac{۱}{۲}$ باشد. فرض کنید I زیربازه‌ای از $[۰,۱)$ باشد که وقتی بازه‌های J_k را کنار گذاشتیم، منطبق بر I^* تحت انقباض می‌شود. اگر انتگرال f^* و g^* روی I^*، $-\frac{۱}{۲}$ باشد، آنگاه به‌دلیل ماکسیمال بودن $J_۱$، ممکن نیست I شامل $J_۱$ باشد، بنابراین I و $J_۱$ مجزایند. با استدلالی مشابه، I ممکن نیست شامل $J_۲$، یا $J_۳$، و غیره باشد. بنابراین، I زیربازه‌ای مجزا از هر J_kای است که روی آن هر دوی f و g انتگرالی برابر با $-\frac{۱}{۲}$ دارند، که غیر ممکن است، زیرا دستگاه $\{J_k\}_{k=۱}^m$ ماکسیمال است.

بنابراین، انتگرال f^* و g^* روی I^*، $\frac{۱}{۲}$ است. اما در این حالت، I فقط می‌تواند شامل J_kهایی باشد که روی آنها انتگرال f و g صفر است. زیرا در غیر این صورت، انتگرال روی I صفر یا مضرب مثبتی از $-\frac{۱}{۲}$ خواهد شد، و این با ماکسیمال بودن اولین J_kای که در I است متناقض خواهد بود. لذا، I فقط شامل آن بازه‌های J_kای است که روی آنها هر دوی f و g انتگرالهای صفر دارند، بنابراین انتگرالهای f و g روی I با انتگرالهای f^* و g^* روی I^* یکسان و برابر با $\frac{۱}{۲}$اند. لذا، این I مناسب است.

۵. قضیهٔ حرکت شاه شطرنج

فرض کنید مربعهای یک صفحهٔ $n \times n$ (شطرنج) را به دلخواه با رنگهای سیاه و سفید رنگ‌آمیزی کنیم. قضیهٔ حرکت شاه شطرنج (ر.ک. [۴] و [۵]) حاکی است که: یک شاه شطرنج می‌تواند یا از بالاترین تا پایین‌ترین ردیف روی مربعهای سیاه و یا از ستون منتهی‌الیه سمت چپ تا ستون منتهی‌الیه سمت راست روی مربعهای سفید حرکت کند.

این حکم به اندازهٔ کافی برای اثبات قضیهٔ نقطهٔ ثابت براوئر در دو بعد توانمند است [۵]. همچنین نشان می‌دهد که بازی بسیار سرگرم‌کنندهٔ زیر همیشه یک برنده دارد: دو بازیکن B و W به نوبت دیسکهای سیاه و سفید را روی یک صفحهٔ $n \times n$ قرار می‌دهند. هدف B این است که با دیسکهای سیاه خود لبه‌های بالا و پایین صفحه را به هم متصل کند، در حالی که W می‌خواهد اضلاع راست و چپ صفحه را با دیسکهای سفیدش به هم وصل کند. بازی هگز[1] مشابه این بازی است، با این تفاوت که هگز روی صفحه‌ای به شکل لوزی متشکل از شش ضلعیها بازی می‌شود.

اکنون ببینیم چگونه قضیهٔ حرکت شاه شطرنج مسألهٔ ما را حل می‌کند. مجدداً توابع f و g را در قالب توابع دوره‌ای با دورهٔ ۱ به کل خط حقیقی گسترش می‌دهیم و، همان‌طور که قبلاً دیده‌ایم، کافی است وجود بازه‌ای مانند I به‌طول کمتر از ۱ را در جایی روی $\mathbf{R}$ که در ویژگی (۲) صدق کند ثابت کنیم. تابع

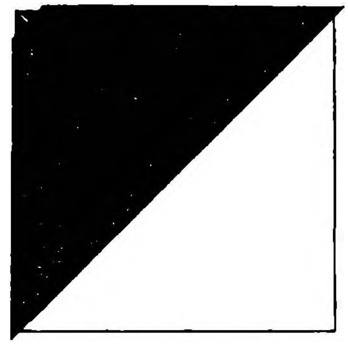
$$\int_۰^x f - \int_۰^x g$$

مینیمم خود را در نقطه‌ای مانند a می‌گیرد. این موضوع ایجاب می‌کند که به‌ازای هر x، $x \geqslant a$،

$$\int_a^x f - \int_a^x g \geqslant ۰.$$

1. I. Z. Ruzsa

1. Hex



شکل ۷ صفحهٔ شطرنج نفشرده

بنابراین، با تعویض f و g با $f^*(y) = f(a+y)$ و $g^*(y) = g(a+y)$ می‌توانیم فرض کنیم که به‌ازای هر y، $y \geqslant 0$،

$$\int_0^y f - \int_0^y g \geqslant 0. \qquad (۱۰)$$

از آنجا که انتگرال هر دو تابع روی بازه‌ای به طول ۱ برابر با ۱ است، از اینجا نتیجه می‌گیریم که به‌ازای هر y، $y \in [0,1]$،

$$\int_y^1 f - \int_y^1 g \leqslant 0. \qquad (۱۱)$$

ϵ مثبت ثابتی را در نظر می‌گیریم. مثلث واقع در بالای قطر مربع یکه را با $n-1$ پرتو که از نقطهٔ $(0,1)$ رسم می‌شوند، همان‌طور که در شکل ۷ نشان داده شده، افراز می‌کنیم. مثلثهای کوچکی را که نقطهٔ $(0,1)$ را در بر دارند کنار می‌گذاریم. شکل باقیمانده، که به قطعات (بستهٔ) $J_1, \ldots, J_{n^2}$ افراز شده، صفحهٔ شطرنج ما خواهد بود؛ این یک صفحهٔ شطرنج فشرده شده است، اما قضیهٔ حرکت شاه شطرنج به شکل واقعی خانه‌های روی صفحه بستگی ندارد. اگر n به قدر کافی بزرگ باشد، آنگاه به‌ازای نقاط (x_i, y_i) و (x_j, y_j) واقع در خانه‌های مجاور J_i و J_j داریم

$$\left|\int_{x_i}^{y_i} f - \int_{x_j}^{y_j} f\right| \leqslant \epsilon \quad \text{و} \quad \left|\int_{x_i}^{y_i} g - \int_{x_j}^{y_j} g\right| \leqslant \epsilon. \qquad (۱۲)$$

حال خانه‌ای مانند J را به رنگ سیاه رنگ‌آمیزی می‌کنیم اگر نقطه‌ای مانند (x,y)، $(x,y) \in J$، وجود داشته باشد که

$$\left|\int_x^y f - \int_x^y g\right| \leqslant \epsilon. \qquad (۱۳)$$

همهٔ خانه‌های دیگر سفید می‌مانند. اگر خانه‌ای مانند J سفید و در ستون منتهی‌الیه سمت چپ باشد، آنگاه طبق (۱۰) باید به‌ازای هر (x,y)، $(x,y) \in J$، داشته باشیم

$$\int_x^y f - \int_x^y g > \epsilon$$

و به‌عکس، (۱۱) نشان می‌دهد که اگر خانهٔ سفیدی مانند J در ستون منتهی‌الیه سمت راست باشد (که بدان معنی است که روی لبهٔ بالایی مربع یکه است)، آنگاه به‌ازای هر (x,y)، $(x,y) \in J$،

$$\int_x^y f - \int_x^y g < -\epsilon.$$

افزون بر آن، در خانه‌های سفید مجاور، تفاضل

$$\int_x^y f - \int_x^y g$$

را می‌توان به اندازهٔ کمیتی که قدر مطلق آن حداکثر برابر با 2ϵ باشد تغییر داد ((۱۲) را ببینید). بنابراین، طبق تعریف رنگ‌آمیزی ما، شاه نمی‌تواند از روی خانه‌های سفید از ستون منتهی‌الیه سمت چپ به ستون منتهی‌الیه سمت راست برود. لذا، می‌تواند از روی خانه‌های سیاه از ردیف بالا به ردیف پایین برود.

با این حال، خانه‌های ردیف بالا حول نقطهٔ $(0,1)$ قرار دارند، بنابراین به‌ازای نقاط (x,y) در آن خانه‌ها، انتگرال

$$\int_x^y f \qquad (۱۴)$$

نزدیک به $\int_0^1 f = 1$ است، حال آنکه خانه‌های موجود در ردیف پایین دربردارندهٔ نقاط قطری $(x,y) = (x,x)$اند که به‌ازای آنها (۱۴) صفر است. بنابراین، طبق (۱۲)، وقتی شاه از ردیف بالا به سمت ردیف پایین حرکت می‌کند، باید از یک خانهٔ سیاه که نقاط آن در

$$\left|\int_x^y f - \frac{1}{2}\right| \leqslant 2\epsilon$$

صدق می‌کنند بگذرد و چون این خانهٔ سیاه است، همچنین داریم

$$\left|\int_x^y g - \frac{1}{2}\right| \leqslant 5\epsilon.$$

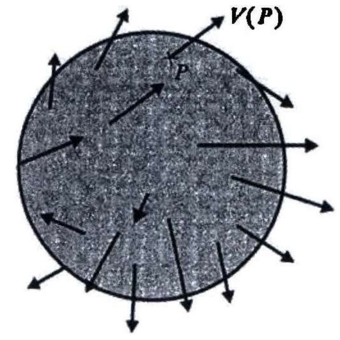
آنچه دریافته‌ایم این است که به‌ازای هر $\epsilon = \frac{1}{n}$، $n = 1, 2, \ldots$، نقاط x_n و y_n، $0 \leqslant x_n \leqslant y_n \leqslant 1$، موجودند به قسمی که

$$\left|\int_{x_n}^{y_n} f - \frac{1}{2}\right| \leqslant \frac{2}{n} \quad \text{و} \quad \left|\int_{x_n}^{y_n} g - \frac{1}{2}\right| \leqslant \frac{5}{n}.$$

بقیهٔ کار طبق معمول انجام می‌شود: زیردنباله‌ای مانند $\mathbf{N}_1$ از اعداد طبیعی انتخاب می‌کنیم که به‌ازای آن $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}_1}$ به xای و همزمان، $\{y_n\}_{n\in\mathbf{N}_1}$ به yای همگرا باشد. در این صورت، نابرابریهای فوق به‌سادگی نتیجه می‌دهند که

$$\int_x^y f = \int_x^y g = \frac{1}{2}$$

که همان چیزی است که باید اثبات می‌کردیم.



شکل ۸ میدان برداری

۶. قضیهٔ عدد چرخش

فرض کنید Δ، $\Delta \subset \mathbf{R}^2$، قرص واحد و V، $V : \Delta \to \mathbf{R}^2$، میدان برداری پیوسته‌ای باشد که روی محیط دایره صفر نمی‌شود. اگر عدد چرخشِ V روی محیط صفر نباشد، آنگاه V باید جایی روی Δ صفر شود [۲، صص. ۱۳۴-۱۳۵] یا [۱، صص. ۲۵۵-۲۵۷].

اصطلاح «میدان برداری» برگرفته از این حقیقت است که به‌ازای هر نقطهٔ P از Δ مقدار $V(P)$ یک بردار دوبعدی است و می‌توانیم فکر کنیم که انتهای این بردار در نقطهٔ P واقع است (شکل ۸ را ببینید). وقتی روی محیط حرکت می‌کنیم، بردار $V(\cos t, \sin t)$ صفر نمی‌شود و به‌طور پیوسته به t، $t \in [0, 2\pi]$، وابسته است؛ بنابراین زاویه‌ای که با نیمهٔ مثبت محور می‌سازد نیز تابعی پیوسته مانند $A(t)$ است؛ زاویه را به پیمانهٔ 2π نمی‌بریم. به‌ازای مقدار پارامتری $t = 2\pi$ مجدداً به نقطهٔ $(1, 0)$ که به $t = 0$ مربوط است باز می‌گردیم، بنابراین، بردارهای نظیر این دو مقدار پارامتری یکی هستند. لذا، $A(2\pi)$ باید با $A(0)$ به‌علاوهٔ مضرب مثبتی از 2π برابر باشد. عدد چرخش V، $\frac{A(2\pi)-A(0)}{2\pi}$ است که عددی صحیح است.

قضیهٔ عدد چرخش را می‌توان به‌صورت زیر اثبات کرد: اگر میدان روی Δ صفر نشود، آنگاه عدد چرخش روی دایره‌های $\{|z| = a\}$ به‌طور پیوسته با a تغییر می‌کند. از آنجا که این عدد همواره عددی صحیح است، ثابت است. ولی این ثابت طبق فرض به‌ازای $a = 1$ صفر نیست و به‌ازای $a = 0$ آشکارا صفر است. این تناقض نشان می‌دهد که میدان برداری باید جایی صفر شود.

بگذارید ببینیم چگونه مسأله با استفاده از این قضیه حل می‌شود (راه حلی منسوب به آتیلا پور[1]). زیرمثلثِ

$$D = \{(x, y)|\ 0 \leqslant x \leqslant y \leqslant 1\}$$

واقع در بالای مربع یکه را در نظر بگیرید و به‌ازای (x, y)، $(x, y) \in D$، قرار دهید

$$U(x, y) = \left(\int_x^y f - \frac{1}{2},\ \int_x^y g - \frac{1}{2}\right).$$

باید نشان دهیم که میدان برداری U جایی در D صفر می‌شود.

1. Attila Pór

فرض کنید φ، $\varphi : \Delta \to D$، نگاشت یک به یک پیوسته‌ای بین قرص یکه و D (یک همریختی) باشد. در این صورت $V = U \circ \varphi$ یک میدان برداری روی Δ تعریف می‌کند و صفر شدنِ U معادل با صفر شدن V است. اگر V در جایی روی مرز صفر شود، کار تمام است. اگر نشود، آنگاه V یک میدان برداری پیوسته روی Δ است که روی مرز صفر نمی‌شود. اگر عدد چرخش آن صفر نباشد، قضیهٔ عدد چرخش تضمین می‌کند که V در جایی روی Δ صفر شود. از آنجا که φ بردارها را از میدان U به بردارهای میدان V می‌بَرَد، می‌توانیم توجه خود را مستقیماً معطوف به D کنیم که در آن عدد چرخش میدان U مانند عدد چرخشِ V تعریف می‌شود.

بر روی قطر مثلث، میدان برداری U مقدار ثابت $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ را دارد. لذا، بر این قسمتِ مرز، میدان U دوران نمی‌کند. اگر $1 \leqslant x \leqslant 0$، آنگاه (۱) نشان می‌دهد که

$$U(0, x) + U(x, 1) = (0, 0),$$

یعنی

$$U(x, 1) = -U(0, x).$$

نتیجه می‌شود که کل چرخش میدان در طول ضلع افقی D معادل با کل چرخش در طول ضلع عمودی است (هر دو، مثلاً در خلاف جهت عقربه‌های ساعت، چرخیده‌اند) زیرا زاویه‌های متناظر همواره به اندازهٔ π با هم اختلاف دارند. افزون بر آن، از آنجا که $U(0, 0) = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$، در حالی که $U(0, 1) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$، زاویه‌های این دو بردار باید به‌ازای عدد صحیحی مانند k، به اندازهٔ $\pi + 2k\pi$ با یکدیگر اختلاف داشته باشند. بنابراین، عدد چرخش میدان U در طول مرز D عبارت است از

$$2(2k\pi + \pi)/2\pi = 2k + 1 \neq 0$$

و این همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

۷. قضیهٔ خم ژوردان

قضیهٔ خم ژوردان [۸] حاکی است که: *هر خم بستهٔ سادهٔ پیوسته‌ای روی صفحه، صفحه را به دو مؤلفهٔ همبند تقسیم می‌کند.*

برای مسألهٔ خود راه حلی ارائه می‌کنیم که متعلق به تاماش فلاینر[1] و متکی به یک حقیقتِ شهودیِ ساده است. ما به قضیهٔ خم ژوردان برای اثبات رسمیِ بخشی که از لحاظ شهودی واضح است نیاز داریم.

می‌توانیم فرض کنیم که هر دو تابع f و g پله‌ای‌اند. هر دوی f و g را در قالب توابع دوره‌ای با دورهٔ تناوب ۱ به $\mathbf{R}$ گسترش می‌دهیم و می‌نویسیم

$$F(x) = \int_0^x f \qquad \text{و} \qquad G(x) = \int_0^x g.$$

در این صورت، به‌ازای هر x داریم $F(x+1) = F(x) + 1$ و $G(x+1) = G(x) + 1$. افزون بر آن، F و G پیوسته‌اند، لذا به‌ازای نقاط a و b، $a, b \in [0, 1]$، که $F - G$ در آنها به‌ترتیب مینیمم و ماکسیمم خود را می‌گیرد، برای هر x داریم

$$A := F(a) - G(a) \geqslant F(x) - G(x)$$

1. Tamás Fleiner

و

$$B := F(b) - G(b) \leqslant F(x) - G(x).$$

خم $\gamma(x) = (F(x), G(x))$ اجتماعی از پاره‌خطهاست. ثابت می‌کنیم که یک y، $y \in [0, 1]$، و یک x، $x < y < 1$، $y - 1 < x$، موجودند به قسمی که $\gamma(y) = \gamma(x) + (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. اگر $A = B$، آنگاه $F \equiv G$ و حالت بدیهیِ $f \equiv g$ را داریم. اگر $A \neq B$، آنگاه با تعویض نقش F و G، به ترتیب، می‌توانیم فرض کنیم $a < b$. خم $\gamma(x)$ درون نوار S که با خطوط $x - y = A$ و $x - y = B$ مشخص می‌شود قرار می‌گیرد و بخشی از γ که متناظر با مقادیر پارامتری x، $x \in [a, b]$، است دو خط محدودکنندهٔ این نوار را به هم متصل می‌کند (شکل ۹ را ببینید). با تعویض a با بزرگ‌ترین مقدار a'، $a' < b$، که به‌ازای آن $\gamma(a')$ متعلق به خط مرزی پایینی $x - y = A$ است و سپس تعویض b با کوچک‌ترین مقدار b'، $a' < b'$، که به‌ازای آن $\gamma(b')$ متعلق به خط مرزی بالایی $x - y = B$ است، می‌توانیم همچنین فرض کنیم که خم

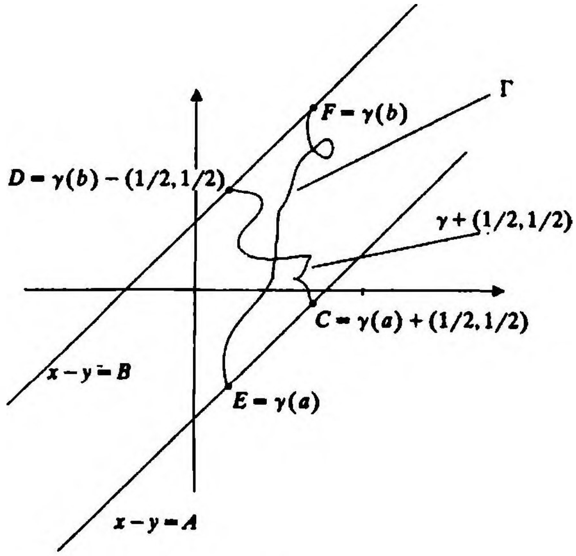
$$\Gamma := \{\gamma(x) | a \leqslant x \leqslant b\}$$

جز دو نقطهٔ انتهایی‌اش کاملاً درون نوار S قرار می‌گیرد. اکنون نقاط $C := \gamma(a) + (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ و $D := \gamma(b) - (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ را نمی‌توان از طریق ک مسیر تکه‌ای-خطی، که از S خارج نشود و خم Γ را قطع نکند، به هم صل کرد (نمودار شبیه X در شکل ۹ را ببینید). ولی $\gamma(b) - (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ مان $\gamma(b - 1) + (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ است، بنابراین، دو نقطهٔ C و D قطعاً بر خم $\gamma(x) + (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$، $a < x < b - 1$، قرار می‌گیرند. لذا، باید یک نقطهٔ اطع وجود داشته باشد؛ یعنی، یک x، $x \in (b - 1, a)$، و یک y، $y \in (a, b)$، موجود است به قسمی که $\gamma(y) = \gamma(x) + (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. افزون بر $b - 1 < x < a < y < b$، بنابراین، $y - 1 < x < y$. طبق تعریف م γ، $F(y) - F(x) = \frac{1}{2}$ و $G(y) - G(x) = \frac{1}{2}$، یعنی هر دوی f و g روی بازهٔ $[x, y]$ انتگرالی برابر با $\frac{1}{2}$ دارند. اکنون بقیهٔ استدلال مشابه تدلال بخش ۴ است: اگر $x \geqslant 0$، آنگاه بازهٔ $I = [x, y]$ در شرایط ما دق می‌کند. ولی اگر $x < 0$، آنگاه بازهٔ $I = [y, x + 1]$ مناسب است ا در این صورت

$$\int_I f = F(x + 1) - F(y) = 1 + F(x) - F(y)$$
$$= 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

حاسبهٔ مشابهی نشان می‌دهد که انتگرال g روی I نیز $\frac{1}{2}$ است.

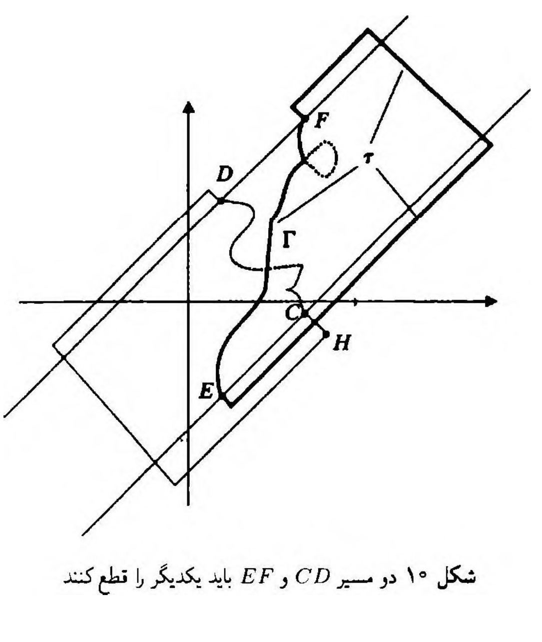
این برهان مبتنی بر این حقیقت است که دو خم در S، که یکی أنها نقاط E و F و دیگری نقاط C و D را به هم وصل می‌کند، یکدیگر را قطع کنند. این امر از نظر شهودی روشن است، اما به‌منظور ت رسمی آن، از قضیهٔ خم ژوردان استفاده می‌کنیم که حاکی است خم بستهٔ سادهٔ پیوستهٔ τ روی صفحه، صفحه را به دو مؤلفهٔ همبند یم می‌کند. منظورِ ما از خم بستهٔ سادهٔ پیوسته، تابع پیوسته‌ای مانند $\tau : [0, 1] \to \mathbf{R}^2$، τ، است به قسمی که $\tau(0) = \tau(1)$، و به‌ازای $0 \leqslant x < y <$ داریم $\tau(x) \neq \tau(y)$ (یعنی، همهٔ نقاط روی خم



شکل ۹ دو مسیر CD و EF یکدیگر را قطع نمی‌کنند

بجز دو نقطهٔ آغازی و پایانی، متفاوت‌اند). خودِ این گفته بدان معناست که $\mathbb{C}\backslash\tau = U \cup V$، که در آن هر نقطهٔ U را می‌توان از طریق مسیر تکه‌ای-خطیِ پیوسته‌ای واقع در U به هر نقطهٔ دیگر U وصل کرد، به همین ترتیب برای V. افزون بر آن، هیچ دو نقطه‌ای را که به ترتیب واقع در U و V باشند نمی‌توان از طریق چنین مسیری که τ را قطع نمی‌کند به یکدیگر وصل کرد. چگونه می‌فهمیم که از یک مؤلفه (U یا V) به دیگری می‌رسیم؟ خُب، این اتفاق قطعاً به وقوع می‌پیوندد اگر در طول پاره‌خطی حرکت کنیم که τ را دقیقاً در یک نقطه قطع کند و بر پاره‌خطی از τ عمود باشد.

اکنون می‌توان به طریق زیر ثابت کرد که Γ با هر مسیر تکه‌ای-خطیِ



شکل ۱۰ دو مسیر CD و EF باید یکدیگر را قطع کنند

پیوسته‌ای که C و D را در درون S به یکدیگر وصل کند، اشتراک ناتهی دارد. با حذف طوقه‌ها از Γ می‌توان آن را یک خم ساده در نظر گرفت. سپس خم τ را که در شکل ۱۰ نشان داده شده در نظر بگیرید. با حرکت در طول پاره‌خط CH از یک مؤلفهٔ همبندِ $\mathbf{C}\backslash\tau$ به دیگری می‌رسیم. بنابراین، نقاط C و D در مؤلفه‌های متفاوتی از $\mathbf{C}\backslash\tau$ قرار دارند. لذا، هر مسیر تکه‌ای ـ خطیِ پیوستهٔ متصل‌کنندهٔ C و D واقع در S (مثلاً، $\{\gamma(x)|b-1<x<a\}$) باید τ را قطع کند. اما $\Gamma = S \cap \tau$، لذا هر چنین مسیری باید خود Γ را قطع کند، و این همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

ما چند راه حل برای مسأله‌مان ارائه کردیم که مبتنی بر برخی قضایای مشهور از هندسهٔ مسطحه و توپولوژی بودند. برخی از این قضایا نیز به یکدیگر مرتبط‌اند و به سادگی می‌توان دید که واقعاً حکم مسألهٔ ما معادل با حداقل یکی از آنها، یعنی قضیهٔ وتر، است.

مراجع

1. M. K. Agoston, Algebraic Topology, *Pure and Applied Mathematics* **32**, Marcell Dekker, Inc., New York, Basel, 1976

2. D. W. Blackett, *Elementary Topology*, Academic Press, Inc., New York, 1982.

3. *Contests in Higher Mathematics*, 1949-1961, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1968.

4. *Delta; Mathematical, Physical and Astronomical Popular Monthly* **115/7** (1983), Problem 235, p. 7.

5. D. Gale: The game of Hex and the Brouwer fixed-point theorem, *Amer. Math. Monthly* **86** (1979) 818-827.

6. J. E. Goodman, J. Pach, and C. K. Yap, Mountain climbing, ladder moving and the ring-width of a polygon, *Amer. Math. Monthly* **96** (1989) 494-510.

7. J. P. Huneke, Mountain Climbing, *Trans. Amer. Math. Soc.* **139** (1969) 383-391.

8. K. Kuratowski, *Introduction to set theory and topology*, International Series of Monographs on Pure and Applied Mathematics **13**, Pergamon Press, New York, 1961.

9. J. V. Whittaker, A mountain climbing problem, *Can. J. Mah.* **18** (1966) 873-887.

* * * * * *

• Vilmos Totik, "A tale of two integrals", *Amer. Math. Monthly*, (3) **106** (1999) 227-240.

* ویلموش توتیک، مؤسسهٔ بویویی در مجارستان و دانشگاه فلوریدای جنوبی در آمریکا
totik@math.uxf.edu