نشر ریاضی، سال ۹، شمارهٔ ۲، صص ۶ـ۱۲

مبانی ریاضی

هندسهٔ ناجابجایی

ویدا میلانی*

مقدمه

اگر از دیدگاه کلاسیک به هندسه و توپولوژی نگاه کنیم با مجموعه‌ای از نقاط همراه با یک ساختار ویژه روی آن سروکار خواهیم داشت؛ یا بهتر بگوییم، یک فضای ریاضی خواهیم داشت. می‌توانیم خمها و رویه‌ها را به‌عنوان زیرمجموعه‌هایی از این فضا بررسی کنیم. اگر به جای بررسی مستقیم این مجموعهٔ نقاط، به مجموعهٔ کمیتهای قابل اندازه‌گیری که روی آن تعریف می‌شوند (به اصطلاح، کمیتهای مشاهده‌پذیر[1]) نظر بیفکنیم راه دیگری برای مطالعه در اختیار ما قرار می‌گیرد که یکی از موضوعهای اصلی بحث این مقاله خواهد بود. مفاهیم خمینه و متریک ریمانی نقش اساسی در فرمولبندی هندسه دارند. مفهوم فضای هندسی آنقدر انعطاف‌پذیر است که می‌تواند نه تنها هندسه‌های اقلیدسی و نااقلیدسی بلکه ابررویه‌ها در نسبیت عام را در برگیرد. حساب دیفرانسیل و انتگرال به ما امکان می‌دهد که نظریهٔ کلی خمینه‌های ریمانی را توسعه دهیم و این کار هنگامی ضرورت می‌یابد که با فضاهایی برخورد کنیم که دیگر خمینهٔ ریمانی نباشند. مثالهایی از این فضاها در بخش ۴ این مقاله می‌آید. این فضاها که به طور طبیعی در ریاضیات ظاهر می‌شوند ما را به استفاده از ایده‌های هندسی و تعمیم این ایده‌ها برمی‌انگیزند. به هر چنین فضایی یک جبر شرکتپذیر وابسته می‌شود که معمولاً جبر توابع روی این فضا (کمیتهای مشاهده‌پذیر) است. در برخی موارد ساختار توپولوژیک فضا طوری است که مطالعهٔ مستقیم آن هیچ اطلاعی به ما نمی‌دهد. این مطلب در مثالهای بخش ۳ به وضوح دیده می‌شود. در این‌گونه موارد اگر از دیدگاه جبری به مسأله نگاه کنیم یک جبر عملگری بسیار خوب در دسترس داریم که کلیهٔ اطلاعات لازم را به ما می‌دهد. جبرهای وابسته به فضاها لزوماً جابجایی نیستند و به طوری که خواهیم دید، همین امر نشان می‌دهد که «نقطه» در این‌گونه فضاها مفهوم معمولی را ندارد و همان‌طور که گفتیم «نقاط فضا» در واقع همان کمیتهای مشاهده‌پذیر هستند. در مورد خمینه، این جبرْ جبر توابع هموار روی خمینه است و جابجایی است اما در بسیاری از مثالها همچون خارج‌قسمت خمینه تحت شبه‌گروه تبدیلات، دیگر با جبر ناجابجایی سروکار داریم [۱].

1. observables

۱. C^*ـجبرها، فضاهای ساختاری و ساختارهای توپولوژیک ناجابجایی

در این بخش ملاحظه می‌کنیم که چگونه جبر شرکتپذیر وابسته به یک فضای توپولوژیک می‌تواند ساختار مجموعهٔ نقاط فضا را مشخص کند. اساس کار، قضیهٔ گلفاندـنایمارک[1] است. در این قضیه به‌وسیلهٔ دو تابعگون ردهٔ فضاهای موضعاً فشرده و هاوسدورف و ردهٔ C^*ـجبرهای شرکتپذیر جابجایی در تناظر دوسویی قرار می‌گیرند. یکی از این تابعگونها، تابعگون C، فضای هاوسدورف و فشردهٔ X را با C^*ـجبر توابع پیوسته روی آن یعنی $C(X)$ نظیر می‌کند. همچنین این تابعگون هر نگاشت پیوستهٔ $f : X \to Y$ بین دو فضای هاوسدورف فشرده را به نگاشت $C(f)$ بین جبرهای توابع با ضابطهٔ زیر نظیر می‌کند

$$C(f) : C(Y) \to C(X)$$
$$g \mapsto g \circ f$$

اگر X موضعاً فشرده باشد، C^*ـجبر متناظر با آن $C_\circ(X)$، یعنی جبر توابع پیوسته روی X که در بینهایت صفرند، خواهد بود. $C_\circ(X)$ یک جبر یکدار نیست. در این حالت توابع پیوسته و سرهٔ $f : X \to Y$ (یعنی توابعی که تصویر وارون مجموعه‌های فشرده تحت آنها فشرده است) بین دو فضای موضعاً فشرده و هاوسدورف با نگاشت $C_\circ(f) : C_\circ(Y) \to C_\circ(X)$ بین جبرهای توابع پیوسته‌ای که در بینهایت صفرند نظیر می‌شود.

تابعگون دوم یعنی تابعگون M برعکس عمل می‌کند. این تابعگون به هر C^*ـجبر جابجایی و شرکتپذیر A، فضای سرشتها[2]ی آن (یعنی همریختیهای غیرصفر $\mu : A \to \mathbb{C}$) با توپولوژی ضعیف[3] را نظیر می‌کند ([۱ و ۲]). اگر

1. Gelfand-Naimark 2. characters 3. weak topology

$\mathcal{A}$ یکدار هم باشد، $M(\mathcal{A})$ بسته و فشرده است. همچنین این تابعگون هر *-همریختی یکانی $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ بین دو C^*-جبر جابجایی شرکت‌پذیر یکدار را با نگاشت $M\varphi : M(\mathcal{B}) \to M(\mathcal{A})$ بین فضای سرشتهایشان نظیر می‌کند.

اگر قرار دهیم $X^+ = X \cup \{\infty\}$ و $\mathcal{A}^+ = \mathbb{C} \times \mathcal{A}$ (یعنی $\mathcal{A}^+$ یکدار شدهٔ جبر $\mathcal{A}$ است) آنگاه $C(X^+) = C_\circ(X)^+$ و اگر $\mu : \mathcal{A}^+ \to \mathbb{C}$ یک سرشت با ضابطهٔ زیر باشد

$$\mu(\lambda, a) = \lambda \qquad \forall a \in \mathcal{A}, \lambda \in \mathbb{C}$$

آنگاه $M(\mathcal{A}) = M(\mathcal{A}^+) - \{\mu\}$.

هم‌ارزی بین این دو رسته که در بالا به آن اشاره شد نتایج زیر را دربردارد:

الف) دو C^*-جبر جابجایی یکریخت‌اند $\Longleftrightarrow$ فضاهای سرشتهایشان همسانریخت‌اند.

ب) گروه خودریختیهای هر C^*-جبر جابجایی با گروه همریختیهای فضای سرشتهایش یکریخت است.

ج) توپولوژی X را می‌توان برحسب خواص جبری $C_\circ(X)$ بیان کرد. مثلاً هر ایده‌ال در $C_\circ(X)$ به صورت $C_\circ(U)$ است که در آن $U \subseteq X$ باز است.

این خواص را می‌توان در جدول زیر خلاصه کرد:

جبر	توپولوژی
C^*-جبر	فضای موضعاً فشرده
C^*-جبر یکدار	فضای فشرده
یکدار کردن	فشرده‌سازی
*-همریختیها	نگاشتهای پیوسته و سره
خودریختیها	همسانریختیها
ایده‌آلها	زیرمجموعه‌های باز

در این تناظر با گذر از فضاها به C^*-جبرها هیچ اطلاعی از دست نمی‌رود زیرا اگر $x \in X$، نگاشت $f \mapsto f(x)$ یک سرشت $\epsilon_x \in M(C(X))$ معرفی می‌کند و نگاشت

$$\epsilon : X \to M(C(X))$$
$$x \mapsto \epsilon_x$$

یک همسانریختی است. اگر $a \in \mathcal{A}$، تبدیل

$$\hat{a} : M(\mathcal{A}) \to \mathbb{C}$$
$$\mu \mapsto \mu(a)$$

که تبدیل گلفاند نام دارد یک تابع پیوسته روی $M(\mathcal{A})$ است و نگاشت

$$G_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \to C(M(\mathcal{A}))$$
$$a \mapsto \hat{a}$$

یک *-یکریختی بین C^*-جبرهاست. اگر $\mathcal{A}$ یکدار هم باشد این *-یکریختی یکانی نیز هست. این نگاشتها طبیعی‌اند به این معنا که این نمودارها جابجایی‌اند:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\epsilon_X"'] & Y \arrow[d, "\epsilon_Y"] \\ M(C(X)) \arrow[r, "MCf"'] & M(C(Y)) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "G_{\mathcal{A}}"'] & \mathcal{B} \arrow[d, "G_{\mathcal{B}}"] \\ C(M(\mathcal{A})) \arrow[r, "CM\varphi"'] & C(M(\mathcal{B})) \end{tikzcd}$$

هر C^*-جبر جابجایی تعداد زیادی سرشت دارد. به عبارت دیگر به هر نقطه از فضا یک سرشت جبر وابسته می‌شود. در مورد جبرهای ناجابجایی می‌توان پیش‌بینی کرد که تعداد سرشتها کمتر باشند. تکرار می‌کنیم که در مورد جبرهای ناجابجایی دیگر به دنبال نقاط نیستیم و به جای سرشتها تنها نیاز به تابعک[1]هایی داریم که رد[2] روی جبر هستند اما لزوماً ضربی نیستند. برای C^*-جبر دلخواه $\mathcal{A}$ مجموعهٔ همه رده‌های هم‌ارزی نمایشهای تحویل‌ناپذیر $\mathcal{A}$ را در یک فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ با $\mathrm{Spec}\mathcal{A}$ نشان می‌دهیم و آن را طیف[3] $\mathcal{A}$ می‌نامیم. اگر $\mathcal{A}$ جابجایی باشد دیده می‌شود که طیف $\mathcal{A}$ همان فضای سرشتهای $\mathcal{A}$ است و لذا عناصر $\mathrm{Spec}\mathcal{A}$ همگی یک‌بعدی‌اند. بنابراین همان‌طور که در بالا گفتیم در مورد C^*-جبرهای جابجایی (جبر توابع روی فضا) به هر نقطه از فضا یک عنصر طیف یعنی یک سرشت جبر وابسته می‌شود و لذا تعداد بسیار زیادی سرشت موجود است. در C^*-جبرهای ناجابجایی فضای $\mathrm{Spec}\mathcal{A}$ لزوماً هاوسدورف نیست. این مطلب در مثالهای بخش ۳ دیده می‌شود.

۲. ساختار هندسی و متریک ناجابجایی

در بخش قبل دیدیم که توابع پیوسته ساختار توپولوژیک فضا را مشخص می‌کنند. برای ایجاد ساختار هندسی روی فضا، به جای فضای توپولوژیک X با خمینهٔ مشتق‌پذیر M سروکار خواهیم داشت. M را یک خمینهٔ فشرده می‌گیریم. در این حالت زوج $(C(M), C^\infty(M))$ را که در آن $C^\infty(M)$ یک *-جبر چگال در $C(X)$ است مورد بررسی قرار می‌دهیم. $C^\infty(M)$ یک C^*-جبر نیست ولی M را به طور یکتا مشخص می‌کند (قضیهٔ گلفاند-نایمارک).

۱.۲ تابعگون Γ

ردهٔ کلافهای برداری روی خمینهٔ فشرده M همراه با نگاشتهای بین کلافها را در نظر می‌گیریم. برای هر کلاف برداری E، مقطعهای هموار روی E را با $C^\infty(M; E) = \Gamma(E)$ نشان می‌دهیم. $\Gamma(E)$ یک مدول پروژکتیو با مولد متناهی روی جبر $C^\infty(M)$ است. قضیهٔ سر-سوان[4] می‌گوید که این تناظر دوطرفه است یعنی به هر مدول پروژکتیو با مولد متناهی روی یک C^*-جبر یکدار جابجایی یک کلاف برداری با تارهای با بعد متناهی نظیر می‌شود که مقطعهای این کلاف همان مدول مذکور است. بنابراین می‌توان یک کلاف برداری روی C^*-جبر ناجابجایی را به عنوان یک مدول پروژکتیو با مولد متناهی روی آن جبر معرفی کرد. اگر $\tau : E \to E'$ یک نگاشت بین کلافهای برداری E و E' باشد تابعگون Γ نگاشت زیر بین مقطعهای این کلافها را تعریف می‌کند

$$\Gamma(\tau) : \Gamma(E) \to \Gamma(E')$$
$$s \mapsto \tau \circ s$$

همچنین $\Gamma(\tau)$ یک مورفیسم بین مدولهای روی جبر مذکور است.

1. functional 2. trace 3. spectrum 4. Serre-Swan

۲.۲ متریکهای هرمیتی و ساختارهای اسپین c [1]

۱.۲.۲ به هر کلاف برداری مختلط می‌توان یک متریک هرمیتی به صورتهای مختلف وابسته کرد. یک راه ساده این است که روی هر تار E_x یک فرم یک و نیم خطی[2] معین مثبت $(\cdot|\cdot)_x$ تعریف کنیم با این شرط که نسبت به x هموار باشد. دیدگاه ناجابجایی حذف نقطهٔ x است. با حذف x آنچه باقی می‌ماند عبارت است از یک نگاشت

$$\mathcal{E} \times \mathcal{E} \to \mathcal{A}$$

که در آن $\mathcal{A}$ یک زیرجبر چگال از یک جبر $\overset{*}{C}$ و $\mathcal{E}$ یک $\mathcal{A}$ـمدول (راست) پروژکتیو با مولد متناهی است. نگاشت فوق روی مؤلفهٔ دوم $\mathcal{A}$ـخطی، معین مثبت، و متقارن است. به عبارت دیگر به ازای هر $r, s, t, \in \mathcal{E}$ و به ازای هر $a \in \mathcal{A}$

$$(r|s+t) = (r|s) + (r|t)$$

$$(r|as) = (r|s)a$$

$$(r|s) = (s|r)^*$$

$$(s|s) > \circ \qquad s \neq \circ$$

با این ساختار هرمیتی روی $\mathcal{E}$، $\mathcal{E}$ یک مدول پیش‌ـهیلبرت[3] نامیده می‌شود. اگر قرار دهیم

$$|||s||| = \sqrt{||(s|s)||}$$

که در آن $||\cdot||$ همان C^*ـنرم مربوط به جبر C^* است، فضای کامل شده نسبت به این نرم را مدول هیلبرت می‌نامیم. در حالت خاصی که $\mathcal{E} = C^\infty(M; E)$، مدول هیلبرت، عبارت است از مقطعهای پیوستهٔ $C(M,E)$.

۲.۲.۲ هم‌ارزی موریتا $\mathcal{A}$ـمدولهای تصویریِ متناهیاً تولید شده همراه با ضرب اسکالر تعریف شده در (۱.۲.۲) به عنوان ساختارهای منظم‌کننده، نقشی بسیار اساسی در هندسهٔ ناجابجایی دارند که این نقش در هندسهٔ جابجایی دیده نمی‌شود، به این معنی که وجود $\mathcal{A}$ـمدولهای تصویری متناهیاً تولید شده سبب پدید آمدن جبرهایی می‌شوند که با $\mathcal{A}$ مرتبط هستند اما این ارتباط به صورت یکریختی نیست. این همان هم‌ارزی موریتا[4] است که در زیر در بارهٔ آن توضیح می‌دهیم.

عملگرهای کِت‌ـبرا[5] روی $\mathcal{A}$ـمدول راست تصویریِ متناهی‌ـمولدِ $\mathcal{E}$ را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$|r\rangle\langle s| : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$$

$$t \mapsto r(s|t)$$

که در آن $r, s \in \mathcal{E}$. چون به ازای هر $a \in \mathcal{A}$، $r(s|ta) = r(s|t)a$، این عملگرها از سمت چپ روی $\mathcal{E}$ عمل می‌کنند و با عمل راست $\mathcal{A}$ نیز جابجا می‌شوند. همچنین ترکیب هر دو چنین عملگری باز از همین نوع است یعنی

$$|r\rangle\langle s| \cdot |t\rangle\langle u| = |r(s|t)\rangle\langle u|$$
$$= |r\rangle\langle u(t|s)|$$

و لذا تمام جمعهای متناهی از کت‌ـبراها تشکیل یک جبر $\mathcal{B} = \mathrm{End}_\mathcal{A}(\mathcal{E})$ می‌دهند. به این ترتیب $\mathcal{E}$ یک $\mathcal{B}$ـمدول چپ خواهد شد و می‌گوییم $\mathcal{E}$ یک $\mathcal{B}$ـ$\mathcal{A}$ـمدول مضاعف است. از طرف دیگر می‌دانیم که $\mathcal{B} = \mathrm{End}_\mathcal{A}(\mathcal{E})$ با $\mathcal{E} \otimes_\mathcal{A} \overline{\mathcal{E}}$ تحت نگاشت زیر یکریخت است

$$\mathrm{End}_\mathcal{A}(\mathcal{E}) \Longleftrightarrow \mathcal{E} \otimes_\mathcal{A} \overline{\mathcal{E}}$$

$$|r\rangle\langle s| \Longleftrightarrow r \otimes \overline{s}$$

همچنین می‌توانیم $\overline{\mathcal{E}} \otimes_\mathcal{B} \mathcal{E}$ را تشکیل دهیم که به عنوان یک $\mathcal{A}$ـمدول مضاعف تحت نگاشت زیر با $\mathcal{A}$ یکریخت است

$$\overline{\mathcal{E}} \otimes_\mathcal{B} \mathcal{E} \Longleftrightarrow \mathcal{A}$$

$$\overline{r} \otimes s \Longleftrightarrow (r|s)$$

این مثالی از هم‌ارزی موریتاست. در حالت کلی می‌گوییم جبرهای $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ موریتاـهم‌ارزند هرگاه یک $\mathcal{B}$ـ$\mathcal{A}$ـمدول مضاعف $\mathcal{E}$ و یک $\mathcal{A}$ـ$\mathcal{B}$ـمدول مضاعف $\mathcal{F}$ باشند که

$$\mathcal{E} \otimes_\mathcal{A} \mathcal{F} \simeq \mathcal{B} \quad \text{و} \quad \mathcal{F} \otimes_\mathcal{B} \mathcal{E} \simeq \mathcal{A}$$

۳.۲.۲ ساختارهای اسپین c. اگر M یک خمینهٔ معمولی nبعدی ریمانی و جهت‌پذیر باشد و اگر g متریک روی کلاف مماس TM باشد، کلاف جبر کلیفرد $\mathrm{cl}(M) \to M$ را که تارهایش جبرهای ماتریسی روی $\mathbb{C}$ هستند به صورت زیر می‌سازیم: اگر $n = 2m$ زوج باشد،

$$\mathrm{cl}_x(M) := \mathrm{cl}(T_xM, g_x) \otimes_\mathbb{R} \mathbb{C} \simeq M$$

که عبارت است از جبر کلیفرد مختلط شده روی فضای مماس T_xM. و اگر $n = 2m + 1$ فرد باشد تنها قسمت زوج جبر کلیفرد را در نظر می‌گیریم یعنی در این حالت [۴]:

$$\mathrm{cl}_x(M) := \mathrm{cl}^{\mathrm{even}}(T_xM) \otimes_\mathbb{R} \mathbb{C}$$

کلاف $\mathrm{cl}(M) \to M$ میدانی موضعاً بدیهی از C^*ـجبرهای مقدماتی است. ضمناً می‌توان نشان داد که یک چنین میدانی (با تقریب هم‌ارزی موریتا) توسط $\delta(\mathrm{cl}(M)) \in H^3(M, \mathbb{Z})$ در کوهومولوژی چک[1] مشخص می‌شود [۴] که آن را ردهٔ دیکس‌میه‌ـدوادی[2] می‌نامند.

می‌گوییم M دارای ساختارهای اسپین c است اگر و تنها اگر $\delta(\mathrm{cl}(M)) = \circ$ و در این حالت یک ساختار اسپین c روی TM عبارت است از زوج (ϵ, S) که در آن ϵ جهت روی TM است و S یک مدول مضاعف $\mathcal{B}$ـ$\mathcal{A}$ـهم‌ارز است ($\mathcal{A} = C_\circ(M)$ و $\mathcal{B} = C_\circ(M, \mathrm{cl}(M))$). قضیهٔ سرـسوان مدول مضاعف هم‌ارز S را کاملاً مشخص می‌کند. در

1. spin^c structures 2. sesquilinear 3. pre-Hilbert module
4. Morita 5. ket-bra

1. Čech 2. Dixmier-Douady

واقع این مدول مضاعف به شکل $\Gamma(S)$ برای یک کلاف برداری مختلط $S \to M$ است که کلاف جبر کلیفرد $\mathrm{cl}(M)$ به طور تحویل‌ناپذیر روی آن عمل می‌کند. $\Gamma(S)$ را معمولاً مدول اسپینوری[1] می‌نامیم.

به طور خلاصه: با استفاده از مدولهای مضاعف و هم‌ارزی موریتا راه مستقیمی به سوی کلافهای برداری ناجابجایی باز می‌شود.

۳.۲ عملگر دیراک و فرمول فاصله

با در دست داشتن مدول اسپینوری می‌توان راجع به عملگر دیراک صحبت کرد. این عملگر عبارت است از یک عملگر دیفرانسیل مرتبهٔ اول خودالحاق $D\!\!\!/$ که روی فضای هیلبرت $L^2(M,S)$ یعنی فضای اسپینورهای مربع‌ـانتگرال‌پذیر عمل می‌کند.

متریک ریمانی $g=(g_{ij})$ روی خمینهٔ M یک یکریختی $T_xM \simeq T_x^*M$ را تعریف می‌کند و لذا متریک $g^{-1}=(g^{ij})$ را روی کلاف کتانژانت T^*M القاء می‌کند. بوسیلهٔ این یکریختی می‌توان جبر کلیفرد را به عنوان کلافی تعبیر کرد که تار در هر نقطه‌اش عبارت است از

$$\mathrm{cl}_x(M) := \mathrm{cl}(T_x^*M, g_x^{-1}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$$

اگر قرار دهیم $\mathcal{A}^1(M)=\Gamma(T^*M)$ که همان $\mathcal{A}$ـمدول یک فرمی‌های روی M است، آنگاه مدول اسپینوری S عبارت است از $\mathcal{A}$ـ$\mathcal{B}$ـمدول مضاعفی که در آن $\mathcal{B}=\Gamma(\mathrm{cl}(M))$ به طور تحویل‌ناپذیر عمل می‌کند و اگر عمل را با γ نشان دهیم:

$$\gamma : \Gamma(\mathrm{cl}(M)) \times L^2(M,S) \to L^2(M,S)$$

و داریم

$$\{\gamma(\alpha,.),\gamma(\beta,.)\} = -2\sum_{i,j} g^{ij}\alpha_i\beta_j$$

که در آن $\alpha,\beta\in\mathcal{A}^1(M)$. متریک g^{-1} روی T^*M یک هموستار لوی‌ـچیویتا[2] به صورت زیر القاء می‌کند

$$\nabla^g : \mathcal{A}^1(M)\to\mathcal{A}^1(M)\otimes\mathcal{A}^1(M)$$
$$\nabla^g(wa)=\nabla^g(w)a+w\otimes da$$

که این هموستار حافظ متریک و بی‌تاب[3] است.

اکنون می‌توان هموستار اسپینی را به صورت عملگر خطی زیر تعریف کرد

$$\nabla^s:\Gamma(s)\to\Gamma(s)\otimes_{\mathcal{A}}\mathcal{A}^1(M)$$
$$\nabla^s(\psi)a=\nabla^s(\psi)a+\psi\otimes da$$
$$\nabla^s(\gamma(w,.)\psi)=\gamma(\nabla^g w)\psi+\gamma(w)\nabla^s\psi$$

به ازای هر $a\in\mathcal{A}$ و $w\in\mathcal{A}^1(M)$ و $\psi\in S$.

با استفاده از هموستار اسپینی، عملگر دیراک[4] را به صورت ترکیب $\gamma\circ\nabla^s$ تعریف می‌کنیم، و یا به طور موضعی به صورت

$$D\!\!\!/ := \gamma(dx^j,.)\nabla^s_{\delta/\delta x^j}$$

می‌توان دید که این عملگر متقارن است و به یک عملگر بیکران روی فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ یعنی $L^2(M,S)$ توسعه می‌یابد. اگر M فشرده باشد $D\!\!\!/$ یک عملگر فرد هولم[1] است. چون $\ker D\!\!\!/$ بعد متناهی دارد می‌توان $D\!\!\!/^{-1}$ را که یک عملگر فشرده است تعریف کرد [۱ و ۶].

۱.۳.۲ فرمول فاصله عملگر دیراک بوسیلهٔ قانون لایب‌نیتس کاملاً مشخص می‌شود. در واقع به ازای $a\in\mathcal{A}$ و $\psi\in\mathcal{H}$:

$$D\!\!\!/(a\psi)=\gamma(da)\psi+a\,D\!\!\!/\psi$$

و یا معادلاً

$$[D\!\!\!/,a]=\gamma(da,.)$$

چون a هموار و M فشرده است عملگر $\|[D\!\!\!/,a]\|$ کراندار است [۱ و ۶] و لذا می‌توان فرمول فاصله را به زبان عملگر $D\!\!\!/$ به صورت زیر ترجمه کرد.

در یک خمینهٔ ریمانی M فاصلهٔ بین دو نقطهٔ p و $q\in M$ از رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود

$$d(p,q)=\inf\{\text{طول خمهایی که } p \text{ را به } q \text{ وصل می‌کنند}\}$$

و عنصر طول عبارت است از $ds^2=\sum_{i,j}g_{ij}dx^idx^j$. اگر π نمایش جبر $\mathcal{A}$ در فضای هیلبرت $\mathcal{H}=L^2(M,S)$ باشد و به علاوه اگر F یک عملگر خودالحاق روی $\mathcal{H}$ باشد که $F^2=1$ و به ازای هر $a\in\mathcal{A}$ عملگر $[F,\pi(a)]$ فشرده باشد (به اصطلاح F یک مدول فرد هولم باشد)، عملگر G را به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$G=\sum_{i,j}(dx^i)^*g_{ij}dx^j$$

که در آن به ازای $x\in\mathcal{A}$، $dx=[F,x]$. می‌خواهیم $ds=G^{\frac12}$. G یک عملگر فشردهٔ مثبت است و لذا $G^{\frac12}$ معنا دارد. اگر سرشتهای متناظر با $p,q\in M$ را به ترتیب با ψ و φ نشان دهیم یعنی اگر به ازای هر $a\in\mathcal{A}$، $\psi(a)=q$ و $\varphi(a)=p$، فرمول فاصله را به زبان سرشتها به صورت زیر می‌توان ترجمه کرد

$$d(p,q)=\sup\{|(\varphi-\psi)(a)| : a\in\mathcal{A}, \|\frac{da}{ds}\|\le 1\}$$

در مورد خمینه‌های ناجابجایی باید به $\frac{da}{ds}$ معنا بدهیم. ملاحظه می‌کنیم که در فرمول اخیر p و q به طور غیرمستقیم از طریق سرشتهای وابسته به آنها وارد شده‌اند و به عنوان نقاط فضا نقشی ندارند.

عملگرهای F و G که در بالا معرفی شدند، در واقع عبارت‌اند از

$$F = \text{علامت } D\!\!\!/ \quad , \quad G = D\!\!\!/^{-2}$$

و $FG^{\frac{-1}{2}} = Fds^{-1} = D\!\!\!/$. اکنون $[D\!\!\!/,a]=\gamma(da)$ جانشین $\frac{da}{ds}$ در فرمول فاصله می‌شود و داریم

1. spinor module 2. Levi-Civita connection 3. torsion-free 4. Dirac

1. Fredholm

$$d(p,q)=\sup\{|(\psi-\varphi)(a)| : a\in\mathcal{A},\ ||[\not{D},a]||\le 1\}$$

می‌توان دید که متریک روی فضای سرشتها یعنی $M(\mathcal{A})$ کاملاً به‌وسیلهٔ عملگر دیراک $\not{D}$ مشخص می‌شود [۱].

مثال. اگر $M=\{a,b\}$ فضای دونقطه‌ای باشد، جبر $\mathcal{A}$ عبارت است از $\mathbb{C}\oplus\mathbb{C}$. هر عنصر $f\in\mathcal{A}$ به‌وسیلهٔ دو عدد مختلط $f(a)$ و $f(b)$ مشخص می‌شود. فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ دارای بعد متناهی خواهد بود و به جمع مستقیم دو فضای هیلبرت به صورت $\mathcal{H}=\mathcal{H}_a\oplus\mathcal{H}_b$ تجزیه می‌شود. عنصر f دارای نمایشی به صورت $\begin{bmatrix} f(a) & 0\\ 0 & f(b)\end{bmatrix}$ در این فضای هیلبرت خواهد بود. عملگر دیراک نیز به صورت $\begin{bmatrix} 0 & D_{ab}\\ D_{ba} & 0\end{bmatrix}$ است که در آن $D_{ba}=D^*_{ab}$ نگاشتی خطی از $\mathcal{H}_b$ به $\mathcal{H}_a$ است. به ازای هر $f\in\mathcal{A}$ می‌توان چنین نوشت

$$[D,f]=(f(b)-f(a))\begin{bmatrix}0 & D_{ab}\\ -D_{ba} & 0\end{bmatrix}$$

و لذا $||[D,f]||=|f(b)-f(a)|\lambda$ که در آن λ بزرگترین ویژه‌مقدار عملگر $|D_{ab}|$ است. با این محاسبات، فاصلهٔ بین دو نقطه a و b در این فضا به صورت زیر خواهد بود

$$d(a,b)=\sup\{|f(a)-f(b)| : ||[D,f]||\le 1\}=\frac{1}{\lambda}$$

۳. مثالهایی از فضاهای ناجابجایی

۱.۳ فضای برگهای یک برگ‌بندی

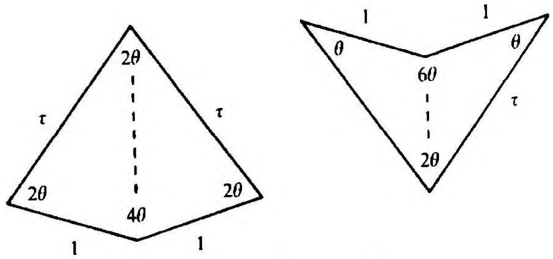
به عنوان مثالی از این فضا چنبرهٔ دوبعدی $T^2=\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ را با برگ‌بندی $dy=\theta dx$ که در آن θ یک عدد اصم است در نظر می‌گیریم. برگها با $\mathbb{R}$ وابریخت (دیفئومرف) هستند و توپولوژی خارج‌قسمت روی برگها عبارت است از توپولوژی خارج‌قسمتی $S^1=\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ تقسیم بر گروه حاصل از مدارهای دوران $\alpha\mapsto\alpha+\theta$ $(\alpha\in S^1)$ به اندازهٔ زاویهٔ θ. بنابراین توپولوژی خارج‌قسمت روی فضای X برگهای این برگ‌بندیْ بدیهی است و فضای برگها بجز خود فضا و مجموعهٔ تهی هیچ زیرمجموعهٔ باز (بسته)ای ندارد. این بدان معنی است که بین خود فضای X و یک نقطهٔ آن از نظر توپولوژی و نظریهٔ اندازه نمی‌توان تفاوتی قائل شد. حتی می‌توان دید که فضاهای $L^p(X)$ همگی یک‌بعدی‌اند و در نتیجه کمکی به تشخیص فضاها نمی‌کنند.

۲.۳ فضای آجرفرش پنرز[1]

در سالهای ۱۹۷۳ و ۱۹۷۴ راجر پنرز[2] سه مجموعه از آجرها را برای آجرفرش صفحهٔ $\mathbb{R}^2$ معرفی کرد. ما در اینجا به شرح کامل یک نوع از این آجرفرش‌ها می‌پردازیم. خواهیم دید که فضای آجرفرش‌ها یک فضای ناجابجایی است.

این آجرها که معمولاً بادبادک[3] و پیکان[4] نامیده می‌شوند در شکل (۱) نشان داده شده‌اند.

هر یک از چهارضلعیها دو ضلع به طول واحد و دو ضلع به طول τ دارند. τ ریشهٔ معادلهٔ $\tau^2-\tau+1=0$ یعنی $\frac{1+\sqrt5}{2}$ است و عدد طلایی نام دارد. زاویه‌ها با مضارب θ مشخص شده‌اند. اگر هر بادباک و هر پیکان را در راستای محور تقارنش ببریم از هرکدام دو مثلث حاصل می‌شود که در



شکل ۱ بادبادکها و پیکانهای پنرز

شکل ۲ نشان داده شده است. این آجرهای مثلثی شکل را Aـآجر می‌نامیم. مثلثهای بزرگتر را با L_A و مثلثهای کوچکتر را با S_A نشان می‌دهیم.

رأسها با رنگهای سیاه و سفید رنگ‌آمیزی می‌شوند. همچنین به هر یال که دو رأس هم‌رنگ را به هم وصل می‌کند جهت دلخواهی داده می‌شود. برای آجرفرش کردن صفحهٔ $\mathbb{R}^2$ با آجرهای نوع A باید مثلثهای L_A و S_A را طوری به هم بچسبانیم که رئوس هم‌رنگ روی هم قرار گیرند و یالهای هم‌جهت نیز بر هم منطبق شوند (این انطباق ممکن است پس از انجام دادن دوران اتفاق بیفتد). به شکل ۳ نگاه کنید.

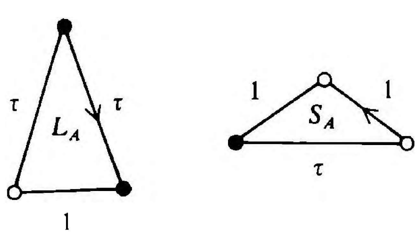
از به هم چسباندن آجرهای نوع A باز آجرهایی به شکل مثلث از نوع B همان‌طور که در شکل ۴ نشان داده شده است به دست می‌آید. همانند قبل مثلثهای کوچک نوع B را با S_B و مثلثهای بزرگتر را با L_B نشان می‌دهیم. ملاحظه می‌کنیم که $L_A=S_B$.

آجرفرش کردن صفحهٔ $\mathbb{R}^2$ با آجرهای نوع B از همان قانون آجرفرش نوع A پیروی می‌کند. از به‌هم چسباندن آجرهای نوع B آجرهای نوع $\tau A'$ حاصل خواهد شد. همان‌طور که در شکل (۵) ملاحظه می‌کنیم آجرهای نوع $\tau A'$ از لحاظ شکل مشابه آجرهای نوع A هستند. در این نمادگذاری τ به این معناست که اندازهٔ این آجرها به نسبت $1:\tau$ از آجرهای نوع A بزرگتر است و علامت A' به این معناست که جای رنگها نسبت به Aـآجرها عوض شده‌اند. ملاحظه می‌کنیم که $S_{\tau A'}=L_B$.

با ادامهٔ این روند دنباله‌ای از آجرها به صورت زیر به دست می‌آوریم

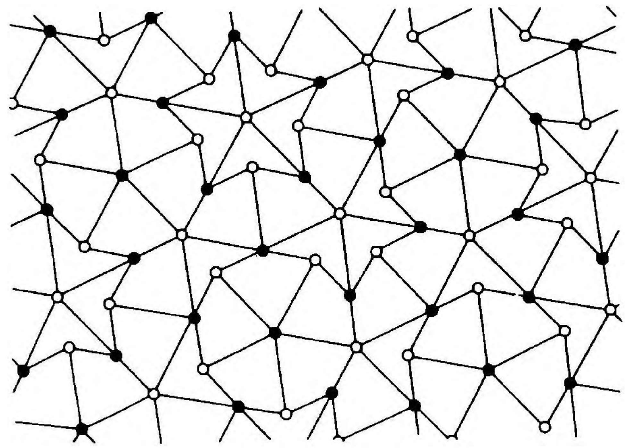
Aـ آجرها $\mapsto$ Bـ آجرها $\to$ $\tau A'$ـ آجرها $\to$ $\tau B'$ـ آجرها $\to$ $\tau^2 A$ـ آجرها $\to\dots$

همچنین می‌توان از آجرفرش کردن صفحه با آجرهای نوع A شروع کرد و با روش فوق به آجرفرش صفحه به‌وسیلهٔ آجرهای نوع B، نوع $\tau A'$ و ... رسید. کافی است در هر مرحله یالهایی را که دو رأس غیرهم‌رنگ را به هم وصل می‌کنند حذف کنیم (شکل ۶).



شکل ۲ Aـآجرهای L_A و S_A

1. Penrose tiling 2. Roger Penrose 3. kite 4. dart



شکل ۳ آجرفرش کردن صفحه با آجرهای نوع A

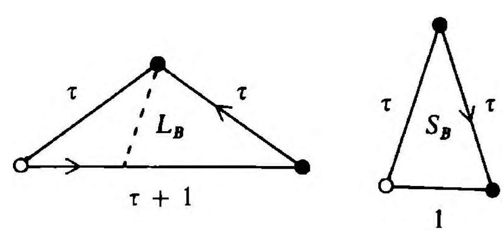
حال یک دنبالهٔ $\{a_n\}$ راکه $a_n \in \{0, 1\}$ و $a_n = 1 \Rightarrow a_{n+1} = 0$ به این دنبالهٔ آجرفرشها به صورت زیر وابسته می‌کنیم:

اگر T آجرفرشی از نوع A باشد، از مثلث‌بندی T تمام یالهایی را که دو رأس غیرهم‌رنگ را به هم وصل می‌کنند حذف می‌کنیم. در این مرحله، مثلث‌بندی T_1 را خواهیم داشت که مثلثهایش، همنهشت با یکی از مثلثهای L_B یا S_B هستند. باز اگر در T_1 تمام یالهایی را که رئوس هم‌رنگ را به هم وصل می‌کنند حذف کنیم به مثلث‌بندی T_2 می‌رسیم که مثلثهایش همنهشت با یکی از مثلثهای $L_{\tau A'}$ یا $S_{\tau A'}$ هستند. به این ترتیب دنباله‌ای از مثلث‌بندی‌های T_n برای $\mathbb{R}^n$ به‌دست می‌آوریم که هر یک، نظیر L_n یا S_n است. اگر در آجرفرش نوع Aی T، مثلث α را در نظر بگیریم، دنبالهٔ $\{a_n\}$ از صفرها و یک‌ها را به این‌صورت می‌سازیم که اگر در مثلث‌بندی T_n، α مشمول در مثلث بزرگتر باشد $a_n = 0$ و اگر α مشمول در مثلث کوچکتر باشد $a_n = 1$. با توجه به اینکه در هر مرحله $S_n = L_{n-1}$، خواهیم داشت $a_n = 1 \Rightarrow a_{n+1} = 0$. دنبالهٔ حاصل را با $i(T, \alpha)$ نشان می‌دهیم.

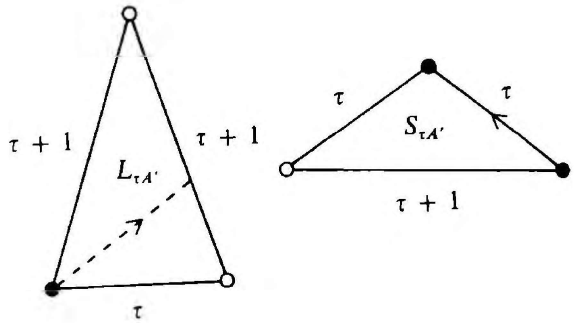
فرض کنیم K عبارت باشد از مجموعهٔ تمام دنباله‌های $\{a_n\}$ که $a_n \in \{0, 1\}$ و

$$a_n = 1 \Rightarrow a_{n+1} = 0$$

واضح است که هر دنبالهٔ $i(T, \alpha)$ متعلق به K است و برعکس می‌توان دید که هر دنباله در K به صورت یک $i(T, \alpha)$ برای یک مثلث‌بندی مناسب T و یک مثلث مناسب α است [۵].



شکل ۴ Bـآجرهای L_B و S_B



شکل ۵ $\tau A'$ـآجرها

ملاحظه می‌کنیم که اگر α و β دو مثلث خاص در مثلث‌بندی T از نوع A باشند آنگاه برای n به قدر کافی بزرگ، α و β مشمول در یک مثلث از T_n خواهند بود و در نتیجه دنباله‌های $a = i(T, \alpha)$ و $b = i(T, \beta)$ در شرط زیر صدق می‌کنند.

$$a_m = b_m \qquad \forall m \geq n \qquad (*)$$

برعکس می‌توان دید که اگر $a = i(T, \alpha)$ و $b \in K$ در شرط فوق صدق کنند آنگاه یک مثلث β در T هست که $b = i(T, \beta)$ [۵]. به این ترتیب یک تناظر دوسویی بین مجموعهٔ X از آجرفرشهای پنرُوز و مجموعهٔ خارج‌قسمت K/R که R رابطهٔ هم‌ارزی تعریف شده به‌وسیلهٔ شرط $(*)$ است، برقرار می‌شود.

فضای فشردهٔ K همسانریخت با مجموعهٔ کانتور است و لذا فضای X عبارت است از فضای خارج‌قسمت K/R. اگر از دیدگاه معمولی به فضای X نگاه کنیم ملاحظه می‌کنیم که زیرمجموعه‌های بستهٔ X عبارت‌اند از زیرمجموعه‌های بستهٔ K تقسیم بر رابطهٔ هم‌ارزی R. اما هر ردهٔ هم‌ارزی در K چگال است و لذا تنها زیرمجموعه‌های بستهٔ X، خود X و مجموعه تهی‌اند. لذا توپولوژی X بدیهی است و X را با یک نقطه یکی می‌کند. اما به عنوان یک فضای ناجابجایی X فضایی بسیار جالب است. از جمله یکی از ناورداهای توپولوژیک این فضا همان عدد طلایی $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ است. در واقع گروه بعد[1]، زیرگروه $\mathbb{R}$ تولید شده توسط $\mathbb{Z}$ و عدد τ در گروه $\mathbb{R}$ است [برای مطالعهٔ بیشتر در مورد گروه بعد به مرجع [۶] مراجعه شود].

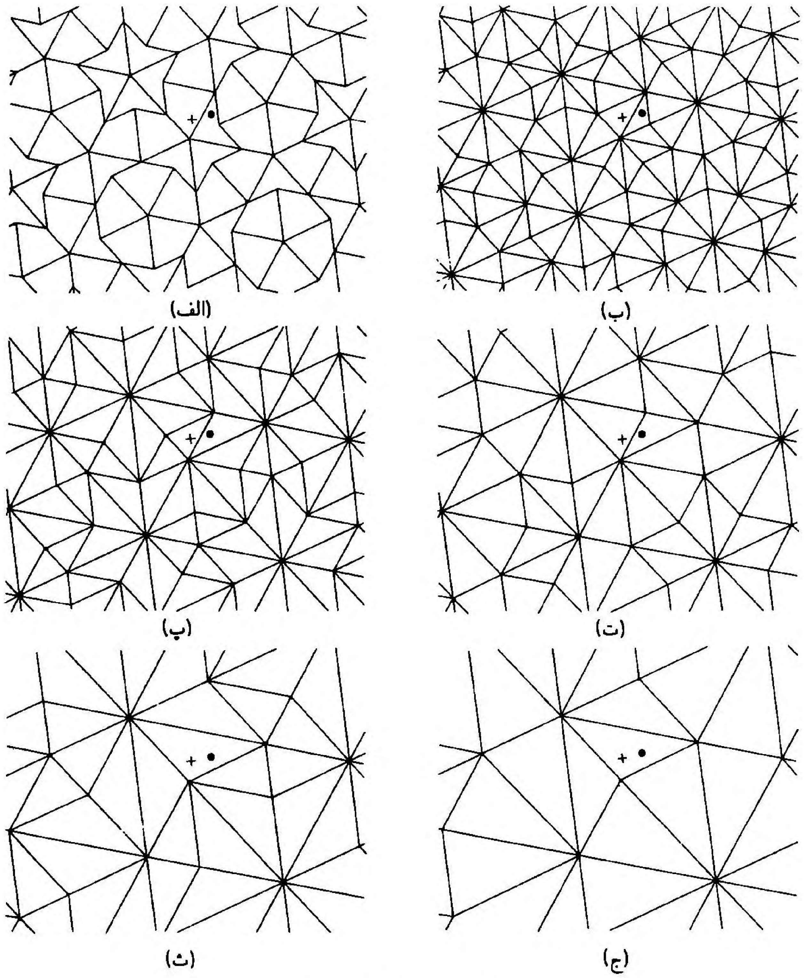
در پایان بحث، C^*ـجبر A وابسته به فضای $X = K/R$ را می‌سازیم. عنصر $a \in A$ با ماتریس $(a_{z,z'})$ از اعداد مختلط که به‌وسیلهٔ مزدوج $(z, z') \in R$ اندیسگذاری شده است مشخص می‌شود. ضرب دو عنصر از A به صورت ضرب ماتریسی زیر خواهد بود

$$(ab)_{z,z''} = \sum_{z'} a_{z,z'} b_{z',z''}$$

به هر عنصر $x \in X$ یک ردهٔ هم‌ارزی یعنی زیرمجموعهٔ شمارش‌پذیری از K نظیر می‌شود. لذا به هر $x \in X$ فضای هیلبرت l_x^2 را که پایه‌اش این مجموعهٔ شمارش‌پذیر است نظیر می‌کنیم. هر عنصر $a \in A$ به‌وسیلهٔ رابطهٔ زیر به‌عنوان یک عملگر روی l_x^2 عمل می‌کند

$$(a(x)\xi)_z = \sum_{z'} a_{z,z'} \xi_{z'} \ \forall \xi \in l_x^2$$

1. dimension group



شکل ۶ مراحل حذف یالها

ملاحظه می‌کنیم که با مطالعهٔ توابع روی فضای X با مقدار مختلط، اطلاع عمیقی در مورد X به دست نمی‌آید ولی خانواده‌ای از توابع روی X با مقدار عملگری وجود دارد که با مطالعهٔ آن، دریافت اطلاعات عمیق دربارهٔ X ممکن می‌شود [۱]:

$$a(x) \in L(l^2_x)\ ,\ \forall x \in X$$

سپاسگزاری

به این وسیله از راهنماییهای استاد ارجمند آقای احمد شفیعی‌ده‌آباد در تهیهٔ این مقاله کمال تشکر و امتنان را دارم.

مراجع

1. Alain Connes; *Noncommutative Geometry*, Academic Press (1994).
2. R. V. Kadison and J. R. Ringrose, *Fundamentals of the Theory of Operator Algebras*, Vol I, II, Academic Press (1983).
3. Alain Connes, "Geometry from spectral point of view", *Letters in Math. Phys.*, **34** (1995) 203-238.
4. H. B Lawson, M. L. Michelsohn, *Spin Geometry*, Princeton Univ. Press (1989).
5. B. Grünbaum, G. C. Shephard, *Tilings and Patterns*, W. H. Freeman & Company (1987).
6. B. Blackadar, *K-Theory for Operator Algebras*, Springer-Verlag (1986).

* * * * * *

* ویدا میلانی، دانشکدهٔ علوم ریاضی دانشگاه شهید بهشتی و پژوهشگاه دانشهای بنیادی

milani@theory.ipm.ac.ir