منطق اثبات‌پذیری•

ویتیسلاف اشویدار*

ترجمهٔ مرتضی منیری

۱. مقدمه

بعضی از مفاهیم منطقی معنای منحصر به‌فردی دارند که بحثی در آن نیست. مثلاً هیچ مکتب منطقی وجود ندارد که تعریف خاص خود از الگوریتم را تحمیل کند. به نظر می‌رسد تعاریف مختلف الگوریتم با هم معادل باشند و مفهوم الگوریتم نیز ظاهراً مطلق است. بیش‌وکم حرف مشابهی را می‌توان در مورد مفهوم اثبات زد. البته منطقهای غیرکلاسیک موجودند و اثباتی قابل‌قبول از دیدگاه کلاسیک ممکن است مثلاً از دیدگاه شهودی قابل‌قبول نباشد. اما از دیدگاه کلاسیک، یا بعد از تثبیت یک چهارچوب منطقی، شکی در مورد اینکه اثبات صحیح چیست، وجود ندارد. می‌توان ادعا کرد که مفهوم اثبات نیز مطلق است.

ولی، برای مثال، تعریفی از مفهوم الگوریتم مؤثر [کارامد] که همه آن را بپذیرند، موجود نیست. الگوریتم مؤثر را می‌توان الگوریتمی دانست که در زمانِ چندجمله‌ای اجرا می‌شود، اما تعاریف دیگری هم که معادل این تعریف نیستند می‌توانند سودمند باشند. مفهوم وجه[1] حتی کمتر از آن «مطلق» است. تعداد زیادی منطق وجهی یا موجهات[2] را می‌توان، مثلاً، در کتاب هیوز و کرسول [۸] یافت که با هم معادل نیستند، و هیچ‌یک از آنها به نظر نمی‌رسد که نقش مهم‌ترین منطق یا منطق محبوب نویسندگان را داشته باشد.

در توضیح اینکه چرا یک منطق موجهات منحصر به‌فرد وجود ندارد می‌توان گفت که وجوه تودرتو در زبان طبیعی کمیاب هستند. ما به‌ندرت می‌گوییم که ضروری است که چیزی ممکن باشد و بنابراین توافقی وجود ندارد که برای مثال آیا فرمول گزاره‌ایِ وجهی $\Diamond p \to \Box\Diamond p$ باید راستگوی وجهی قلمداد شود یا نه.

این مقاله به منطق اثبات‌پذیری اختصاص دارد، که یک منطق گزاره‌ایِ موجهات است مبتنی بر این ایده که چیزی ضروری است هرگاه اثبات‌پذیر باشد، منظور ما از اثبات‌پذیری، اثبات‌پذیری در یک نظریهٔ اصل موضوعی صوریِ به اندازهٔ کافی قوی مانند حساب پئانو، PA، است. اگر T به اندازهٔ کافی قوی باشد، آنگاه نحو منطقی، شامل مفهوم اثبات‌پذیری، در T صوری شدنی است. این حقیقت به معنی آن است که می‌توانیم بپرسیم چه حقایقی دربارهٔ اثبات‌پذیری در T (یا در یک نظریهٔ دیگر S) در خود T اثبات‌پذیر هستند.

بنابراین، منطق اثبات‌پذیریْ منطقی است که در آن منظور از ضرورت همان اثبات‌پذیری صوری است و در ارتباط نزدیک با فراریاضیاتِ مهم‌ترین نظریه‌های ریاضی است و می‌تواند در آنها کاربرد داشته باشد. از کلمهٔ «اثبات‌پذیری» و «اثبات‌پذیر» در آخرین جملهٔ پاراگراف قبل باید روشن باشد که در نظرگرفتن وجوه تودرتو در منطق اثبات‌پذیری خیلی طبیعی است. قرار نیست که منطق اثبات‌پذیری به تحقیق دربارهٔ وجوه در زبان طبیعی کمک کند. اما، شگفت این است که روشهای وجهی معمولی در مطالعهٔ آن به‌کار می‌آیند و بعضی خواص (و اصول موضوع و قواعد) مشترک با دستگاههای وجهی مرسوم مانند S4 دارد.

این نوشته یک مقالهٔ مقدماتی و هدف از آن، جلب علاقهٔ خواننده به این موضوع است. ما جالب‌ترین مطالب و ایده‌ها دربارهٔ منطق اثبات‌پذیری را مرور، و دربارهٔ آنها نکاتی را (از دیدگاه خودمان) متذکر می‌شویم و کاربردهای آنها در فراریاضیات را خاطر نشان می‌کنیم. توجه ما عمدتاً معطوف به استفاده از حساب گنتسنی[1] برای منطق اثبات‌پذیری است که به‌وسیلهٔ سمبین و والنتینی [۱۰] ابداع شد. در این مقاله نتایج جدیدی ذکر نمی‌کنیم و از همهٔ اثباتهای سخت چشم می‌پوشیم، اما بعضی از اثباتها را نشان می‌دهیم. بیشتر این مطالب را می‌توان برای مثال در مراجع [۱۲]، [۱۱] و [۲] یافت. در بخش پایانی مقاله، دربارهٔ روایت خودم از یک فرایند تصمیم برای منطق اثبات‌پذیری بحث خواهم کرد و بعضی ارتباطهای آن با پیچیدگی محاسبه را متذکر خواهم شد.

۲. حسابی‌سازی نحو منطقی

حساب پئانو، PA، یک نظریهٔ اصل موضوعی است که در زبان حسابی صورتبندی شده است؛ برای آن می‌توان زبان $\{+,\cdot,\circ,S,<\}$ را در نظر

1. modality

۲. modal logic. چون در فارسی «منطق موجهات» رایج‌تر است همین اصطلاح را در این مقاله به‌کار می‌بریم.

1. Gentzen calculus

گرفت که شامل دو نماد تابعیِ دو موضعی، یک ثابت، یک نماد تابعیِ یک موضعی و یک نماد محمولیِ دو موضعی است. منطق زمینه، منطق محمولات کلاسیک با تساوی است. مجموعهٔ اصول موضوع PA، عموماً مجموعه‌ای تلقی می‌شود که شامل چندین اصل ساده (برای مثال، $\forall x(x\cdot 0 = 0)$) و طرح اصل موضوعی استقراست: هر جمله به شکل

$$\forall y_1 \cdots \forall y_n(\varphi(0,\underline{y}) \& \forall x(\varphi(x,\underline{y}) \longrightarrow \varphi(S(x),\underline{y})) \longrightarrow \forall x\varphi(x,\underline{y})) \qquad \text{Ind}$$

که در آن $\underline{y}$ نماد اختصاری $y_1, \ldots, y_n$ است، یک اصل موضوع است.

ساختار $\mathcal{N} = \langle N, +^{\mathcal{N}}, \cdot^{\mathcal{N}}, 0^{\mathcal{N}}, S^{\mathcal{N}}, <^{\mathcal{N}}\rangle$ که در آن N مجموعهٔ $\{0,1,2,\ldots\}$ از اعداد طبیعی، $+^{\mathcal{N}}, \cdot^{\mathcal{N}}$ جمع و ضرب اعداد طبیعی، $<^{\mathcal{N}}$ ترتیب اکید روی اعداد طبیعی، $0^{\mathcal{N}}$ عدد طبیعی صفر و $S^{\mathcal{N}}$ تابع تالی $x \mapsto x+1$ است، مدل استانده (حساب) نامیده می‌شود.

اصول موضوع PA امکان می‌دهند که حکمهایی کلی راجع به اعداد طبیعی (مانند $\forall x\forall y(x\cdot y = y\cdot x)$) و همچنین حکمهایی راجع به اعداد طبیعی خاص، اثبات شود. برای مثال جملهٔ

$$\forall x\forall y(x\cdot y = S(S(S(0))) \to x = S(0) \vee y = S(0))$$

(که در PA اثبات‌پذیر است) را می‌توان به شکل عدد ۳ اول است خواند. ترم [نام] $S(S(S(0)))$ به‌صورت $\overline{3}$ نمایش داده می‌شود. به‌طور کلی، نشانهٔ عددی nام به‌صورت $S(S\cdots(0)\cdots)$ با n بار تکرار نماد S، تعریف می‌شود.

به خواننده پیشنهاد می‌کنیم که به‌عنوان تمرین، این حقیقت را که **بی‌نهایت توان از دو وجود دارد** در زبان حسابی فرمولبندی کند. راه‌حل کاملاً بدیهی نیست اما نیازی به معلومات نظری ندارد؛ با تلاش بیشتر، می‌توان جملهٔ حاصل را در PA ثابت کرد.

می‌بینیم که مفهومی (مانند بخش‌پذیری یا توانی از دو بودن) می‌تواند در زبان حسابی بیان شود حتی اگر هیچ نمادِ زبان به‌طور مستقیم متناظر با آن نباشد. در این‌صورت این سؤال طبیعی مطرح می‌شود که: حساب پئانو چه چیزی را می‌تواند دربارهٔ آن مفهوم ثابت کند؟

ترمها، فرمولها، اثباتها و سایر اشیای نحوی، دنباله‌هایی متناهی از نمادها هستند. از آنجاکه طبیعت نمادها مطرح نیست، این اشیا را می‌توان با دنباله‌های متناهی از اعداد طبیعی یکی گرفت. هر دنبالهٔ متناهی از اعداد طبیعی را می‌توان به‌وسیلهٔ یک عدد طبیعی کدگذاری کرد. بنابراین فرمولها و دیگر اشیای نحوی را می‌شود با اعداد طبیعی یکی گرفت: آنها اعداد طبیعی هستند، و نشانه‌های عددی چون $\overline{0 = S(0)}$ و $\overline{\text{عددی اول وجود دارد}}$ محتمل‌اند. در این نوشته، فرمولهای حسابی با شکل غیرصوری آنها که با حروف مخصوصی غیر از حروف متن تایپ شده‌اند یکی گرفته می‌شوند. بنابراین جملهٔ (A) فوق، مساوی یک عدد طبیعی چون n است (یعنی کد عددیِ n دارد) و $\overline{\text{سه عددی اول است}}$ یک نشانهٔ عددی است که دقیقاً شامل n رخداد "S" است. کدگذاری دنباله‌های متناهی از اعداد طبیعی (اگر به‌طور مناسب انجام شود) در درون حساب پئانو تعریف‌پذیر است. بنابراین در درون حساب پئانو می‌توانیم با اشیای نحوی کار کنیم و بکوشیم خواص آنها را ثابت کنیم. این مطلب معمولاً به این شکل بیان می‌شود که نحو منطقی، حسابی شدنی است.

نتیجهٔ حسابی‌سازی نحو منطقی این است که نه تنها مفهوم اول بودن یا توان دو بودن، بلکه همچنین مفهوم PAـاثبات در زبان حسابی قابل بیان است. محمول اثبات یک فرمول حسابی $\mathsf{Prf}(y,x)$ است که می‌گوید عدد x **یک جمله و عدد y، اثبات آن در PA** است (البته ما ادعا نمی‌کنیم که y به‌طور یکتا برحسب x تعیین می‌شود؛ یک جمله می‌تواند اثباتهای مختلف متعددی داشته باشد.) با استفاده از محمول اثبات، فرمول $\mathsf{Pr}(x)$ به‌صورت $\exists y\mathsf{Prf}(y,x)$ و جملهٔ Con، به‌صورت $\neg\mathsf{Pr}(\overline{0 = S(0)})$ تعریف می‌شود. فرمول $\mathsf{Pr}(x)$ می‌گوید که عدد x **یک جملهٔ اثبات‌پذیر در PA است**. از آنجاکه $\neg(0 = S(0))$ به‌راحتی در PA اثبات می‌شود، جملهٔ $0 = S(0)$ نشان‌دهندهٔ یک تناقض است و جملهٔ Con عبارت سازگاری است که می‌گوید که **حساب پئانو متناقض نیست**. ویژگیهای مهم فرمول $\mathsf{Pr}(x)$ با شرایط استنباطی (لاب[1]) بیان می‌شوند:

D1   اگر $PA \vdash \varphi$، آنگاه $PA \vdash \mathsf{Pr}(\overline{\varphi})$

D2 $PA \vdash \mathsf{Pr}(\overline{\varphi\to\psi}) \to (\mathsf{Pr}(\overline{\varphi}) \to \mathsf{Pr}(\overline{\psi}))$

D3 $PA \vdash \mathsf{Pr}(\overline{\varphi}) \to (\mathsf{Pr}(\overline{\mathsf{Pr}(\overline{\varphi})}))$

که در آن $\vdash$ اثبات‌پذیری را نشان می‌دهد و φ و ψ جملات حسابی دلخواهی هستند. مثالی از یک کاربرد D1 این است: جملهٔ $\mathsf{Pr}(\overline{\text{۳ عددی اول است}})$ در PA اثبات‌پذیر است. شرط D2 می‌گوید که PA می‌داند که **جملات اثبات‌پذیر تحت قاعدهٔ وضع مقدم بسته‌اند**. بنابراین D2 شکل صوری‌شدهٔ قاعدهٔ وضع مقدم است. D3 شکل صوری D1 است. هر دوی D1 و D3 (در سطوح مختلف) می‌گویند که اگر چیزی اثبات‌پذیر باشد، آنگاه اثبات‌پذیر بودن آن اثبات‌پذیراست. ما گذشته از D1 – D3 احتیاج به خاصیت دیگری از اثبات‌پذیری داریم، یعنی

Def $PA \vdash \varphi$ اگر و تنها اگر $\mathcal{N} \models \mathsf{Pr}(\overline{\varphi})$

که می‌گوید فرمول $\mathsf{Pr}(x)$ مجموعهٔ همهٔ جملات PAـاثبات‌پذیر را در مدل استانده تعریف می‌کند. توجه کنید که قسمت $\Leftarrow$ در شرط Def از D1 و این حقیقت که $\mathcal{N}$ مدلی از PA است، نتیجه می‌شود. همچنین توجه کنید که با استدلالی مشابه و به‌ازای هر جملهٔ φ، استلزام $PA \vdash \mathsf{Pr}(\overline{\varphi}) \Rightarrow PA \vdash \varphi$ از شرط Def نتیجه می‌شود.

ابزار مفیدی برای اثبات خواص فراریاضیاتی حساب پئانو، قضیهٔ خودْارجاع است: به‌ازای هر فرمول حسابی $\psi(x,y)$ (فاقد متغیر آزادی بجز احتمالاً x و y)، جملهٔ حسابی φ موجود است به‌طوری که هم‌ارزی $\varphi \equiv \psi(\overline{\varphi}, \overline{\neg\varphi})$ در PA اثبات‌پذیراست. به عبارت دیگر، قضیهٔ خودارجاع می‌گوید که هر معادلهٔ به شکل $PA \vdash \varphi \equiv \psi(\overline{\varphi},\overline{\neg\varphi})$، به‌ازای یک جملهٔ مجهول φ دارای جواب است. ضروری نیست که هر دو متغیر x و y در ψ به‌صورت آزاد ظاهر شوند. بنابراین هر معادلهٔ به شکل $PA \vdash \varphi \equiv \psi(\overline{\varphi})$ یا $PA \vdash \varphi \equiv \psi(\overline{\neg\varphi})$ نیز جواب دارد. اگر $PA \vdash \varphi \equiv \psi(\overline{\varphi})$، آنگاه، در درون PA، می‌دانیم که φ هم‌ارز عبارت **جملهٔ $\overline{\varphi}$ دارای خاصیت ψ است** می‌باشد. بنابراین جواب معادلهٔ $PA \vdash \varphi \equiv \psi(\overline{\varphi})$ را می‌توان به‌صورت جمله‌ای در نظر گرفت که می‌گوید **من خاصیت ψ را دارم**.

اجازه دهید بعضی مثالهای چشمگیر از کاربرد قضیهٔ خودارجاع را فهرست‌وار ذکر کنیم. جملهٔ گودل جمله‌ای است چون ν که در

1. Löb

$\mathrm{PA} \vdash \nu \equiv \neg\mathsf{Pr}(\overline{\nu})$ صدق کند؛ جملهٔ رُسر[1] جمله‌ای است چون ρ که در

$$\mathrm{PA} \vdash \rho \equiv \forall y(\mathsf{Prf}(y,\overline{\rho}) \to \exists\, v \le y\, \mathsf{Prf}(v,\overline{\neg\rho})) \qquad (\mathrm{B})$$

صدق کند؛ و جملهٔ هنکین[2] یک جملهٔ κ است که در $\mathrm{PA} \vdash \kappa \equiv \mathsf{Pr}(\overline{\kappa})$ صدق کند. جملات κ و ν به‌ترتیب می‌گویند که **من در PA اثبات‌پذیرم و من در PA اثبات‌پذیر نیستم**. جملهٔ ρ می‌گوید که **کمتر از هر اثبات من، اثباتی از نقیضم وجود دارد.**

گزارهٔ ۱. اگر $\mathrm{PA} \vdash \nu \equiv \neg\mathsf{Pr}(\overline{\nu})$، آنگاه هر دوی ν و $\neg\nu$ در PA اثبات‌ناپذیرند.

اثبات. فرض کنید $\mathrm{PA} \vdash \nu$. پس $\mathrm{PA} \vdash \mathsf{Pr}(\overline{\nu})$ بنا به شرط D۱. از $\mathrm{PA} \vdash \nu \equiv \neg\mathsf{Pr}(\overline{\nu})$ داریم $\mathrm{PA} \vdash \neg\nu$، که تناقضی با سازگاری PA است.

بنابراین $\mathrm{PA} \nvdash \nu$. در نتیجه، بنابه شرط Def، $\mathcal{N} \not\models \mathsf{Pr}(\overline{\nu})$. فرض کنید که $\mathrm{PA} \vdash \neg\nu$. در این‌صورت مجدداً بنابه هم‌ارزی $\mathrm{PA} \vdash \nu \equiv \neg\mathsf{Pr}(\overline{\nu})$، خواهیم داشت $\mathrm{PA} \vdash \mathsf{Pr}(\overline{\nu})$. چون $\mathcal{N}$ مدلی از PA است، خواهیم داشت $\mathcal{N} \models \mathsf{Pr}(\overline{\nu})$، که متناقض با $\mathcal{N} \not\models \mathsf{Pr}(\overline{\nu})$ است که در بالا ثابت شد. بنابراین $\mathrm{PA} \nvdash \neg\nu$. □

گزارهٔ ۱، اساساً، قضیهٔ اول ناتمامیت گودل و گزارهٔ ۲ در زیر، قضیهٔ دوم ناتمامیت گودل است.

گزارهٔ ۲. الف) اگر $\mathrm{PA} \vdash \nu \equiv \neg\mathsf{Pr}(\overline{\nu})$، آنگاه $\mathrm{PA} \vdash \mathsf{Con} \equiv \nu$. بنابراین $\mathrm{PA} \nvdash \mathsf{Con}$.

ب) $\mathrm{PA} \vdash \mathsf{Con} \to \neg\mathsf{Pr}(\overline{\mathsf{Con}})$.

قصد نداریم گزارهٔ ۲ را ثابت کنیم. تنها نکاتی را متذکر می‌شویم که عبارتهای آن را موجه می‌سازند. توجه کنید که استدلال مذکور در پاراگراف اول اثبات گزارهٔ ۱، که نشان می‌دهد اگر $\mathrm{PA} \vdash \nu$ آنگاه PA ناسازگار است، کاملاً نحوی است، به این معنی که اشاره‌ای به ساخت $\mathcal{N}$ و شرط Def نمی‌کند. بنابراین عجیب نخواهد بود که این استدلال در درون PA صوری شدنی باشد، و می‌توان بررسی کرد که D۱ − D۳ برای انجام این کار کافی‌اند. نتیجهٔ اثباتی از یک جملهٔ **اگر PA سازگار باشد آنگاه $\mathrm{PA} \nvdash \nu$**، یعنی اثباتی از جملهٔ $\mathsf{Con} \to \neg\mathsf{Pr}(\overline{\nu})$ است. این همراه با $\mathrm{PA} \vdash \nu \equiv \neg\mathsf{Pr}(\overline{\nu})$ نتیجه می‌دهد که $\mathrm{PA} \vdash \mathsf{Con} \to \nu$. استلزام وارون $\mathrm{PA} \vdash \nu \to \mathsf{Con}$ هم می‌تواند به کمک D۱ − D۳ ثابت شود و اثبات آن حتی ساده‌تر است، با در دست داشتن $\mathrm{PA} \vdash \mathsf{Con} \to \nu$، نتیجه‌گیری $\mathrm{PA} \nvdash \mathsf{Con}$ به کمک گزارهٔ ۱ سرراست است. از $\mathrm{PA} \vdash \mathsf{Con} \to \nu$ بنابر D۱ خواهیم داشت $\mathrm{PA} \vdash \mathsf{Pr}(\overline{\mathsf{Con} \to \nu})$ و بنابر D۲، $\mathrm{PA} \vdash \mathsf{Pr}(\overline{\mathsf{Con}}) \to \mathsf{Pr}(\overline{\nu})$، بنابراین $\mathrm{PA} \vdash \neg\mathsf{Pr}(\overline{\nu}) \to \neg\mathsf{Pr}(\overline{\mathsf{Con}})$. این همراه با $\mathrm{PA} \vdash \mathsf{Con} \to \neg\mathsf{Pr}(\overline{\nu})$، عبارت (ب) را نتیجه می‌دهد. توجه کنید که در گزارهٔ ۲ (ب) صوری‌سازی یک قدم عمیق‌تر شده است: جملهٔ در (ب) را می‌توان (حاصل) صوری‌سازی عبارت مذکور در (الف) در نظر گرفت.

بنابراین PA ناتمام است، نمی‌تواند سازگاری خود را ثابت کند، اما دربارهٔ خود می‌داند (یعنی می‌تواند ثابت کند) که **می‌تواند سازگاری خود را ثابت کند تنها اگر ناسازگار باشد.**

1. Rosser sentence 2. Henkin sentence

محمولِ اثبات‌پذیری و جملهٔ گودل را که حاکی از اثبات‌ناپذیری خود است می‌توان برای هر نظریهٔ بازگشتیْ اصل‌پذیر[1] سازگار T شامل حساب پئانو، ساخت، و می‌توان ثابت کرد جملهٔ گودل در T اثبات‌ناپذیر است و در T هم‌ارز با عبارت سازگاری T است، بنابراین هیچ نظریهٔ Tای از این‌گونه، نمی‌تواند سازگاری خود را ثابت کند. تحت این شرط اضافی که T درست است، یعنی همهٔ جملات حسابی اثبات‌پذیر در T در $\mathcal{N}$ برقرارند، می‌توان ثابت کرد که جملهٔ گودل برای T (و عبارت سازگاری برای T) از T مستقل هستند.

همچنین می‌توان ثابت کرد که جملهٔ رُسر ρ از PA مستقل است، و مزیت آن این است که هر دوی این اثباتها (از $\mathrm{PA} \nvdash \rho$ و $\mathrm{PA} \nvdash \neg\rho$) کاملاً نحوی هستند. بنابراین هر دوی این اثباتها در حساب پئانو صوری‌شدنی هستند: $\mathrm{PA} \vdash \mathsf{Con} \to \neg\mathsf{Pr}(\overline{\rho}) \& \neg\mathsf{Pr}(\overline{\neg\rho})$. با استفاده از جملهٔ رُسر برای یک نظریهٔ T (ساخته شده از محمول اثبات T) می‌توان نشان داد که هر توسیع بازگشتیْ اصل‌پذیر سازگار T از PA، حتی اگر درست نباشد، ناتمام است.

قضیهٔ خودارجاع حاکی است که هر معادلهٔ خودارجاعی دارای جواب است، اما نمی‌گوید که جواب یکتاست. گزارهٔ ۱ می‌گوید و اثباتش نشان می‌دهد که هر جواب معادلهٔ گودل از PA مستقل است، اما بعداً در گزارهٔ ۲، روشن می‌شود که هر جملهٔ گودل ν، PA_هم‌ارز جملهٔ Con است. بنابراین معادلهٔ گودل در حقیقت جواب منحصر به‌فردی دارد (تا حد PA_هم‌ارزی). آیا همواره چنین است یعنی همهٔ معادلات خودارجاع دارای جواب یکتایی هستند؟ آیا PA می‌تواند جملهٔ $\mathsf{Con} \to \neg\mathsf{Pr}(\overline{\neg\nu})$ را ثابت کند؟ یعنی آیا PA می‌داند که ν مستقل از آن است؟ خواص جملهٔ هنکین چه هستند؟ خواهیم دید که منطق موجهات می‌تواند پرتوی بر روی این پرسش و دیگر پرسشها بیفکند.

قضیهٔ اول ناتمامیت گودل در[۶] ثابت شد. اسمورینسکی[۱۲] از مقاله‌ای با شمارهٔ II یاد می‌کند که قرار بوده نوشته شود ولی هرگز نوشته نشده، شاید به این دلیل که جامعهٔ منطقی قضیهٔ دوم ناتمامیت گودل را قبل از آنکه گودل فرصت تایپ آن را پیدا کند، پذیرفته بود. قضیهٔ خودارجاع نخستین بار در اثر کارناپ[۴] به‌صراحت مطرح شد. ما مطالعهٔ نوشته‌های ففرمن[۵]، اسمورینسکی[۱۲] یا بولوس[۲] را به‌عنوان متون مقدماتی دربارهٔ حسابی‌سازی نحو منطقی توصیه می‌کنیم. شرایط استنتاج‌پذیری در اثر لاب[۹] فرمولبندی شدند. لاب در این نوشتهٔ مسأله زیر از هنکین را حل کرد: آیا هر جملهٔ κ که اثبات‌پذیری خود را بیان می‌کند در PA اثبات‌پذیر است؟

۳. معناشناسی حسابیِ منطق موجهات

فرمولهای منطق اثبات‌پذیری، فرمولهای گزاره‌ای وجهی معمولی هستند. آنها از گزاره‌های اتمی p، q، ...، p_0، p_1، ... با استفاده از عملگر وجهی یک موضعی $\Box$ و ادوات منطقی $\to$، $\neg$، $\&$، $\vee$، $\bot$، ساخته می‌شوند. نماد $\Box$ نشانهٔ ضرورت است، $\Box A$ خوانده می‌شود «A ضروری است» یا فقط «مربعْ A». نماد $\bot$ یک ثابت منطقی (یعنی یک عملگر صفر موضعی) برای نادرستی است. بنابراین $\bot$، $\neg\Box\bot \vee \Box\bot$ یا $p \to \Box(\Box q \,\&\, p)$ مثالهایی از فرمولهای وجهی هستند. انتخاب مجموعهٔ ادوات منطقی مذکور کاملاً ضروری نیست؛ مجموعهٔ $\{\neg, \to\}$ (دقیقاً مانند منطق گزاره‌ای کلاسیک) نیز کفایت می‌کند. اما خواهیم دید که خیلی مناسب است که نماد $\bot$ را داشته باشیم. عملگرهای دیگر نیز مجازند: $\Diamond A$ یک نماد اختصاری برای $\neg\Box\neg A$، $\top$ همان $\neg\bot$ و $A \equiv B$ نشانهٔ $(A \to B) \& (B \to A)$ است.

1. recursively axiomatizable

ارزیاب (حسابی)، تابعی چون e از گزاره‌های اتمی به جملات حسابی است که در شرایط زیر صدق کند:

- $e(\bot) = (0 = S(0))$.
- $e(\neg A) = \neg e(A)$، $e(A \bowtie B) = e(A) \bowtie e(B)$ به‌ازای هر رابط منطقی (دو موضعی) $\bowtie$.
- $e(\Box A) = \mathsf{Pr}(\overline{e(A)})$.

دو مثال از چگونگی کار ارزیاب حسابی را ذکر می‌کنیم. تحت هر ارزیاب e، مقدار فرمول $\Box A \vee \Box \neg A$ به شکل $\mathsf{Pr}(\overline{\psi}) \vee \mathsf{Pr}(\overline{\neg\psi})$ است، که در آن ψ به‌وسیلهٔ مقادیر گزاره‌های اتمیِ رخداده در A تعیین می‌شود. مقدار فرمول $\neg\Box\bot$ تحت هر e مشابه است. زیرا $\neg\Box\bot$ شاملِ هیچ گزارهٔ اتمی نیست، و داریم $e(\neg\Box\bot) = \neg\mathsf{Pr}(\overline{0 = S(0)}) = \mathsf{Con}$.

هر فرمول وجهی A یک PA_راستگوست هرگاه به‌ازای هر ارزیاب حسابی e، $\mathrm{PA} \vdash e(A)$. برای مثال، فرمول $\Box A \to \Box\Box A$، به‌ازای هر A، یک PA_راستگوست، زیرا هر یک از مقادیرش به شکل $\mathsf{Pr}(\overline{\varphi}) \to \mathsf{Pr}(\overline{\mathsf{Pr}(\overline{\varphi})})$ است که، بنابر D۳، همواره در PA اثبات‌پذیر است. فرمول $p \to (\Box q \to p)$ یک PA_راستگوست زیرا، تحت هر e، مقدار آن یک جملهٔ حسابی است که یک راستگوی گزاره‌ای (کلاسیک) است، و همهٔ راستگوها در همهٔ نظریه‌های حسابی اثبات‌پذیرند. این مثال به حکم زیر تعمیم می‌یابد: هر فرمول وجهی که (به معنی واضح آن) یک راستگوی گزاره‌ای است، یک PA_راستگوست.

اکنون چند مثال کمتر بدیهی از PA_راستگوها و ناراستگوها می‌آوریم: بنابر گزاره‌های ۱ و ۲، هیچ‌یک از $\neg\Box\bot$ و $\Box\bot$، PA_راستگو نیستند. بنابر گزارهٔ ۲ (ب)، $\neg\Box\bot \to \neg\Box\neg\Box\bot$ یک PA_راستگوست. مجدداً جملهٔ گودل ν را در نظر بگیرید. این حقیقت که $\neg\mathsf{Pr}(\overline{\nu}) \to \nu$ اثبات‌پذیر است این نتیجه را دارد که $\mathsf{Pr}(\overline{\nu}) \to \nu$ اثبات‌پذیر نیست زیرا در غیر این‌صورت ν اثبات‌پذیر می‌شد. این استدلال نشان می‌دهد که $\Box p \to p$ یک PA_راستگو نیست: یک ارزیاب e، یعنی آنکه p را به ν می‌فرستد، موجود است که $\mathrm{PA} \nvdash e(\Box p \to p)$. این حقیقت که $\Box p \to p$ یک PA_راستگو نیست ممکن است تعجب‌آور به نظر رسد، اما طبیعی است: PA نمی‌تواند ادعا کند که همهٔ عبارتهای اثبات‌پذیر، درست هستند. زیرا PA می‌داند که یک نظریهٔ ناسازگار هر جمله‌ای را ثابت می‌کند و نمی‌تواند در مورد خودش ادعا کند که سازگار است.

می‌بینیم که PA_راستگوها، فرمولهایی وجهی هستند که حقایقی کلی دربارهٔ اثبات‌پذیری و جملات خودارجاعی بیان می‌کنند. برای مثال فرمول وجهی $\neg\Box\bot \to (\Box(p \equiv \neg\Box p) \to \neg\Box p)$ که می‌گوید «با فرض سازگاری، هر عبارتی که اثبات‌ناپذیری خود را بیان کند، اثبات‌ناپذیر است»، شکل وجهیِ قضیهٔ اول ناتمامیت گودل است. ازگزارهٔ ۱ کمابیش روشن است و در بخش بعد کاملاً واضح خواهد شد که این فرمول یک PA_راستگو است. همین‌طور فرمول $\neg\Box\bot \to \neg\Box\neg\Box\bot$، که ما با اطمینان می‌دانیم که یک PA_راستگوست، شکل وجهیِ قضیهٔ دوم ناتمامیت گودل است.

در نگاه اول واضح نیست که آیا مجموعهٔ همهٔ PA_راستگوها بازگشتی است یا نه. اما با استفاده از روشهای مرسوم که در منطق (وجهی) به‌کار می‌روند می‌توان به این سؤال و سؤالات دیگر پاسخ داد. به‌طور مشخص، می‌توان یک دستگاه اصل موضوعی برای مجموعهٔ همهٔ PA_راستگوها در نظر گرفت و آن را مورد مطالعه قرار داد.

۴. حسابها، معناشناسی کریپکی و نتایج

یک ایدهٔ خوب برای به‌دست آوردن دستگاهی اصل موضوعی برای مجموعهٔ همهٔ PA_راستگوها این است که با شکلهای وجهی D۱ − D۳ شروع کنیم، یعنی با پذیرفتن همهٔ راستگوهای گزاره‌ای و همهٔ فرمولهایی به شکل $\Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$ و $\Box A \to \Box\Box A$ به‌عنوان اصول، و پذیرش $A/\Box A$ و وضع مقدم $A, A \to B / B$ به‌عنوان قواعد استنتاج. منطق وجهی حاصل به K۴ معروف است.

منطق K۴ به‌وضوح نسبت به معناشناسی حسابی، درست است (یعنی فقط PA_راستگوها را ثابت می‌کند) اما کامل نیست، یعنی همهٔ PA_راستگوها را ثابت نمی‌کند. مثالی از یک PA_راستگوی اثبات‌ناپذیر در K۴، $\neg\Box\bot \to \neg\Box\neg\Box\bot$ است. این قابل فهم است زیرا K۴ (یعنی شرایط D۱ − D۳ به‌اضافهٔ وضع مقدم به‌اضافه این حقیقت که همهٔ راستگوها PA_راستگو هستند) یک حقیقت مهم یعنی قضیهٔ ارجاع را درکار نمی‌آورد.

لاب[۹] ثابت کرد که هر جملهٔ هنکین، یعنی هر جملهٔ κ که $\mathrm{PA} \vdash \kappa \equiv \mathsf{Pr}(\overline{\kappa})$، در PA اثبات‌پذیر است. در حقیقت لاب حکم قوی‌تری را ثابت کرد: اگر $\mathrm{PA} \vdash \mathsf{Pr}(\overline{\kappa}) \to \kappa$، آنگاه $\mathrm{PA} \vdash \kappa$. یک شکل صوری‌شدهٔ این حکم (که در مقالهٔ[۹] ذکر نشده است) می‌گوید که $\mathrm{PA} \vdash \mathsf{Pr}(\overline{\mathsf{Pr}(\overline{\kappa}) \to \kappa}) \to \mathsf{Pr}(\overline{\kappa})$ نیز صحیح است. قضیهٔ لاب در ابتدا نوعی کنجکاوی تلقی شد که به چیزی مربوط نمی‌شود. اما در خلال دههٔ شصت میلادی روشن شد که شکل وجهی آن، یعنی قاعدهٔ لاب و اصل لاب

$$\Box A \to A / A \ , \ \Box(\Box A \to A) \to \Box A$$

ممکن است مهم باشند. خواننده می‌تواند با به‌دست آوردن قضیهٔ دوم ناتمامیت از اصل لاب، خود را در این مورد قانع کند: کافی است $\bot$ به جای A قرار داده شود. هم قاعدهٔ لاب و هم اصل لاب نسبت به معناشناسی حسابی درست هستند و در K۴ قابل استنتاج نیستند. به همین جهت ما می‌توانیم رسماً حساب هیلبرت برای منطق اثبات‌پذیری GL را تعریف کنیم. این حسابْ ماحصل اضافه کردن طرح اصل موضوعی لاب به منطق K۴ است که در بالا تعریف شد. منطق اثبات‌پذیری گاهی فقط با G یا فقط با L نمایش داده می‌شود. حروف مذکور از نامهای Gödel و Löb گرفته شده‌اند.

مطالب بیشتر دربارهٔ تاریخچهٔ GL را می‌توان در اثر بولوس و سمبین[۳] یافت. فقط این گفته را از آنجا نقل می‌کنیم که فرمولبندی صریح اصل لاب اول بار در سال ۱۹۶۳ در مقاله‌ای از اسمایلی[1] دربارهٔ رویکردی وجهی به اخلاق ظاهر شد (!) تا سال ۱۹۷۱ چند نفر (سگربرگ[2]، کریپکی[3]، دویونگ[4]) به‌طور مستقل قضیهٔ تمامیت کریپکی را که درگزاره‌های ۸ و ۹ این مقاله بیان می‌شود ثابت کردند. و سپس، در دههٔ هفتاد، دویونگ در آمستردام و بولوس و کریپکی در آمریکا این فرضیه را به‌طور جدی در نظر گرفتند که اصل موضوع لاب تنها اصل موضوع مفقوده است، یعنی GL نسبت به معناشناسی حسابی تمام است. سرانجام سالووی[۱۳] در سال ۱۹۷۵ ثابت کرد که این حدس درست است:

گزارهٔ ۳. یک فرمول وجهی در GL اثبات‌پذیر است اگر و تنها اگر PA_راستگو باشد.

1. T. Smiley 2. Segerberg 3. Kripke 4. de Jongh

$$\dfrac{\dfrac{\langle \Box p, p, \Box\Box p \Rightarrow \Box p\rangle}{\langle \Box p \Rightarrow \Box\Box p\rangle} \qquad \dfrac{\langle \Box p, p\to\neg\Box p, p \Rightarrow\ \rangle}{\langle \Box\Box p, \Box(p\to\neg\Box p), \Box p \Rightarrow \Box\bot\rangle}}{\dfrac{\dfrac{\langle \Box(p\to\neg\Box p), \Box p \Rightarrow \Box\bot\rangle}{\langle \Box(p\to\neg\Box p), \Box p, \neg\Box\bot \Rightarrow\ \rangle}}{\langle \Box(p\to\neg\Box p), \neg\Box\bot \Rightarrow \neg\Box p\rangle}}$$

شکل ۱ یک اثبات نمونه در حساب $\mathrm{LK_{GL}}$.

در اثبات سالووی از گزارهٔ ۳ یک خودارجاعِ چندگانهٔ جالب اما نسبتاً پیچیده به‌کار می‌رود و همچنین از حقایق اساسی دربارهٔ مدلهای کریپکی که در گزاره‌های ۸ و ۹ این مقاله بیان شده استفاده می‌شود. بنابراین من حتی طرح کلی اثبات را نمی‌آورم، اما بعداً، پس از گزارهٔ ۸، کاربردی از گزارهٔ ۳ را نشان می‌دهم.

در بقیهٔ این بخش به یک حساب رشته‌ای برای GL و یک معناشناسی کریپکی GL می‌پردازم. تلاش می‌کنم بعضی از مهم‌ترین نتایج را توضیح دهم و چشم‌اندازی از بعضی تکنیکها برای خواننده فراهم کنم. اما باز اثباتهای طولانی‌تر را نمی‌آورم.

برای حساب (رشته‌ای) گنتسنی LK برای منطق گزاره‌ای کلاسیک، من حساب تاکه‌ئوتی[۱۵] را برمی‌گزینم فقط با این تغییر که هر رشته، جفتی از مجموعه‌های متناهی از فرمولهاست و نه جفتی از دنباله‌های متناهی از فرمولها. هر رشته مرکب از دو مجموعهٔ Γ و Δ است که به‌صورت $\langle\Gamma\Rightarrow\Delta\rangle$ نوشته می‌شود؛ معنای شهودی آن این است که «اگر همهٔ فرمولهای در Γ برقرار باشند، آنگاه یک فرمول در Δ برقرار است». مجموعه‌های Γ و Δ، مقدم و تالی رشتهٔ $\langle\Gamma\Rightarrow\Delta\rangle$ هستند. این حساب شامل ۲ قاعدهٔ منطقی برای هر ادات منطقی است. به‌عنوان مثال، قاعدهٔ شرطی چپ را می‌آوریم:

$$\langle\Gamma\Rightarrow\Delta, A\rangle, \langle\Gamma, B\Rightarrow\Delta\rangle/\langle\Gamma, A\to B\Rightarrow\Delta\rangle \qquad \to\mathrm{l}$$

که در آن Δ, A کوتاهنوشتی برای $\Delta\cup\{A\}$ است و به همین نحو برای باقی. گذشته از قواعد منطقی، حساب مذکور شامل رشته‌های ابتدایی (یعنی قواعد بدون فرض) به شکل $\langle\Gamma, A\Rightarrow\Delta, A\rangle$ و $\langle\Gamma,\bot\Rightarrow\Delta\rangle$، و دو قاعدهٔ ساختاری است: قاعدهٔ برش و قاعدهٔ تضعیف که اجازه می‌دهند هر فرمولی بتواند به (هر طرف) هر رشته اضافه شوند. قاعدهٔ $(\mathrm{r}\ \bot)$ موجود نیست.

یک حساب رشته‌ای $\mathrm{LK_{GL}}$ با افزودن یک قاعدهٔ وجهی یکتای

$$\langle\Box\Gamma, \Gamma, \Box A\Rightarrow A\rangle/\langle\Box\Gamma\Rightarrow\Box A\rangle \qquad \Box\mathrm{r}$$

به LK به‌دست می‌آید، که در آن $\Box\Gamma=\{\Box A; A\in\Gamma\}$. توجه کنید که (i) هم فرض و هم نتیجهٔ $(\Box\mathrm{r})$ شامل دقیقاً یک فرمول در تالی هستند، (ii) همهٔ فرمولها در بخش نتیجه با $\Box$ شروع می‌شوند، (iii) قاعدهٔ $(\Box\mathrm{r})$، در خاصیت زیرفرمول صدق می‌کند. قاعدهٔ $(\Box l)$ موجود نیست: اگر یک فرمول $\Box A$ در مقدمِ یک رشتهٔ اثبات‌پذیر باشد، باید یا به‌وسیلهٔ تضعیف ظاهر شده باشد یا از رشته‌ای ابتدایی آمده باشد.

در شکل ۱ مثالی از اثبات در $\mathrm{LK_{GL}}$ آورده‌ام که اثباتی است از یک شکل وجهی قضیهٔ اول ناتمامیت گودل. این اثبات شامل دو کاربرد قاعدهٔ $\Box\mathrm{r}$ و یک برش روی فرمول $\Box\Box p$ است و با دو کاربرد قاعده‌های نقیض خاتمه می‌یابد. برگ سمت چپ یک رشتهٔ ابتدایی است، سمت راست چنین نیست اما به کمک قاعدهٔ $(\to\mathrm{l})$ به‌راحتی اثبات می‌شود. بعضی تضعیفها نیامده‌اند. خواننده می‌تواند به‌عنوان تمرین یک اثبات (ساده‌تر) بدون برش بیابد. از گزارهٔ ۹ روشن است که قضیهٔ حذف برش برای $\mathrm{LK_{GL}}$ برقرار است. خصوصیات یک اثبات (نحوی) مستقیم قضیهٔ حذف برش در[۱۰] تشریح شده است.

فرض کنید که p یک گزارهٔ اتمی [یا به‌اختصار، اتم] باشد. در این‌صورت $A_p(q)$ یا فقط $A(q)$ نشان‌دهندهٔ نتیجهٔ قرار دادن q به‌جای p در A است. فرض می‌کنیم که اتم q در A رخ نمی‌دهد و گاهی به‌جای A می‌نویسیم $A(p)$. گوییم p در A مربع‌دار است هرگاه هر رخداد p در $A(p)$ در دامنهٔ عمل $\Box$ باشد.

گزارهٔ ۴. (الف) فرض کنید $A(p)$ یک فرمول وجهی و q یک گزارهٔ اتمیِ ظاهرنشده در $A(p)$ باشد. در این‌صورت

$$\langle\Box\,(p\equiv q)\Rightarrow\Box\,(A(p)\equiv A(q))\rangle$$

یک رشتهٔ اثبات‌پذیر در $\mathrm{LK_{GL}}$ است.

(ب) اگر به‌علاوه p در A مربع‌دار باشد، آنگاه

$$\langle\Box\,(p\equiv q)\Rightarrow A\,(p)\equiv A(q)\rangle$$

یک رشتهٔ اثبات‌پذیر در $\mathrm{LK_{GL}}$ است.

اثبات. اثبات به استقرا روی پیچیدگی A انجام می‌شود؛ نگاه کنید به [۱۰] و [۱۲]. $\Box$

گزارهٔ ۵. فرض کنید $\langle\Gamma,\Pi\Rightarrow\Delta,\Lambda\rangle$ یک رشتهٔ اثبات‌پذیر در $\mathrm{LK_{GL}}$ باشد. در این‌صورت یک فرمول وجهی D که تنها شامل اتمهای مشترک رشته‌های $\langle\Gamma\Rightarrow\Delta\rangle$ و $\langle\Pi\Rightarrow\Lambda\rangle$ است وجود دارد به‌گونه‌ای که $\langle\Gamma\Rightarrow\Delta, D\rangle$ و $\langle\Pi, D\Rightarrow A\rangle$ رشته‌های اثبات‌پذیری در $\mathrm{LK_{GL}}$ باشند.

اثبات. اثبات به استقرا روی تعداد مراحل اثباتی بدون برش از رشتهٔ $\langle\Gamma,\Pi\Rightarrow\Delta,\Lambda\rangle$ در $\mathrm{LK_{GL}}$ انجام می‌شود؛ نگاه کنید به[۱۰]. $\Box$

گزارهٔ ۴ قضیهٔ جایگزینی و گزارهٔ ۵ قضیهٔ درونیابی برای GL است.

گزارهٔ ۶. فرض کنید $A(p)$ یک فرمول وجهی باشد که شامل q نیست، همچنین فرض کنید p در $A(p)$ مربع‌دار باشد. در این‌صورت رشتهٔ $\langle\Box(p\equiv A(p)), \Box(q\equiv A(q))\Rightarrow\Box(p\equiv q)\rangle$ در $\mathrm{LK_{GL}}$ اثبات‌پذیر است.

اثبات. با داشتن گزارهٔ ۴، می‌توانیم یک اثبات صوریِ تقریباً کامل در $\mathrm{LK}_{\mathrm{GL}}$ ارائه کنیم:

(۱) گزارهٔ ۴ (ب) $\langle \Box (p \equiv q) \Rightarrow A(p) \equiv A(q) \rangle$

(۲) $\langle p \equiv A(p), q \equiv A(q), A(p) \equiv A(q) \Rightarrow p \equiv q \rangle$

(۳) برش روی ۱ و ۲ $\langle p \equiv A(p), q \equiv A(q), \Box (p \equiv q) \Rightarrow p \equiv q \rangle$

(۴) $(\Box \mathrm{r})$ $\langle \Box (p \equiv A(p)), \Box (q \equiv A(q)) \Rightarrow \Box (p \equiv q) \rangle$

رشتهٔ (۲) راستگوست. بجز $(\Box \mathrm{r})$، برخی تضعیفها برای به‌دست آوردن (۴) از (۳) به‌کار رفته‌اند. □

نشان می‌دهیم که از نظر حسابی، گزارهٔ ۶ یکتاییِ جوابِ بعضی از معادلات خودارجاعی را نتیجه می‌دهد. مثلاً فرض کنید λ یک جملهٔ حسابی و φ_1 و φ_2 دو جواب یک معادلهٔ داده شده به‌وسیلهٔ فرمول $\mathsf{Pr}(x) \to \lambda$ باشند. بنابراین هر دو جملهٔ $\varphi_1 \equiv (\mathsf{Pr}(\overline{\varphi_1}) \to \lambda)$ و $\varphi_2 \equiv (\mathsf{Pr}(\overline{\varphi_2}) \to \lambda)$ در PA اثبات‌پذیر هستند. همچنین، بنابر D1،

$$\mathrm{PA} \vdash \mathsf{Pr}(\overline{\varphi_1 \equiv (\mathsf{Pr}(\overline{\varphi_1}) \to \lambda)})$$

(C) و

$$\mathrm{PA} \vdash \mathsf{Pr}(\overline{\varphi_2 \equiv (\mathsf{Pr}(\overline{\varphi_2}) \to \lambda)})$$

فرمول $\Box p \to r$ را به‌عنوان $A(p)$ در نظر بگیرید. درستی GL نسبت به معناشناسی حسابی و گزارهٔ ۶ نتیجه می‌دهد که

$$\mathrm{PA} \vdash \mathsf{Pr}(\overline{\varphi_1 \equiv (\mathsf{Pr}(\overline{\varphi_1}) \to \lambda)}) \;\&\; \mathsf{Pr}(\overline{\varphi_2 \equiv (\mathsf{Pr}(\overline{\varphi_2}) \to \lambda)})$$

$$\to \mathsf{Pr}(\overline{\varphi_1 \equiv \varphi_2}) \qquad \text{(D)}$$

از (C) و (D)، $\mathrm{PA} \vdash \mathsf{Pr}(\overline{\varphi_1 \equiv \varphi_2})$ را به‌دست می‌آوریم، و چون $\mathcal{N}$ مدلی از حساب پئانو است، $\mathcal{N} \models \mathsf{Pr}(\overline{\varphi_1 \equiv \varphi_2})$. اکنون شرط Def نتیجه می‌دهد که $\mathrm{PA} \vdash \varphi_1 \equiv \varphi_2$. بنابراین نشان داده‌ایم که تا حد هم‌ارزی در PA، معادلهٔ $\mathrm{PA} \vdash \varphi \equiv \mathsf{Pr}(\overline{\varphi}) \to \lambda$ دارای جواب یکتای φ است. استدلالی کاملاً مشابه در مورد هر معادلهٔ دیگر $\mathrm{PA} \vdash \varphi \equiv \psi(\overline{\varphi}, \neg \overline{\varphi})$ صادق است با فرض آنکه ψ شکل حسابی فرمولی وجهی باشد. یعنی $\psi(x, y)$ تنها با استفاده از ادوات منطقی و فرمول Pr ساخته شده و همهٔ رخدادهای x و y در ψ در (دامنهٔ عمل) فرمول Prی هستند. چنین معادله‌ای را یک معادلهٔ گودلی و جوابش را یک جملهٔ گودلی می‌نامیم. هر جملهٔ گودلی با معادله‌ای که در آن صدق می‌کند به‌طور یکتا معین می‌شود. مثالی از یک معادلهٔ خودارجاعی که گودلی نیست، معادلهٔ رُسر (B) در بالاست، و در حقیقت می‌توان نشان داد که جملهٔ ρ به‌طور یکتا به‌وسیلهٔ معادلهٔ (B) معین نمی‌شود، نگاه کنید به [۷] و [۱۳].

گزارهٔ ۷. فرض کنید $A(p)$ یک فرمول وجهی باشد که در آن p در A مربع‌دار است. در این‌صورت فرمولی وجهی چون D وجود دارد که تنها شامل اتمهای ظاهرشده در A بجز p است به‌طوری که $D \equiv A(D)$ در $\mathrm{LK}_{\mathrm{GL}}$ اثبات‌پذیر است.

اثبات. این گزاره در [۱۰] ثابت شده و در [۱۲] هم مورد بحث قرار گرفته است. من اثبات مذکور در کتاب اول را باز تولید می‌کنم.

یک اتم qی جدید (یعنی ظاهرنشده در A) را در نظر بگیرید. در این‌صورت A و اتمهای p و q مانند آنهایی که در گزارهٔ ۶ آمده‌اند هستند و رشته‌های (۱) تا (۴) در اثباتش، در $\mathrm{LK}_{\mathrm{GL}}$ اثبات‌پذیرند. می‌توانیم آن اثبات صوری را با استفاده از قاعدهٔ برش روی (۱) و (۴) ادامه دهیم:

(۵) $\langle \Box (p \equiv A(p)), \Box (q \equiv A(q)) \Rightarrow A(p) \equiv A(q) \rangle$

(۶) ۵ $\langle \Box (p \equiv A(p)), \Box (q \equiv A(q)), A(p) \Rightarrow A(q) \rangle;$

اکنون گزارهٔ ۵ را در مورد رشتهٔ (۶) به‌کار می‌بریم: فرمول Dای وجود دارد که فاقد p و q است به‌گونه‌ای که هر دو رشتهٔ

(۷) $\langle \Box (p \equiv A(p)), A(p) \Rightarrow D \rangle$

(۸) $\langle \Box (q \equiv A(q)), D \Rightarrow A(q) \rangle$

در $\mathrm{LK}_{\mathrm{GL}}$ اثبات‌پذیرند. روشن است که رشته‌ای که با قرار دادن هر فرمولی به‌جای یک گزارهٔ اتمی در یک رشته اثبات‌پذیر به‌دست می‌آید، خودش اثبات‌پذیر است. بنابراین رشته‌های زیر در $\mathrm{LK}_{\mathrm{GL}}$ اثبات‌پذیرند:

(۹) ۷، جایگزینی $\langle \Box (D \equiv A(D)), A(D) \Rightarrow D \rangle$

(۱۰) ۸، جایگزینی $\langle \Box (D \equiv A(D)), D \Rightarrow A(D) \rangle$

(۱۱) ۹ و ۱۰ $\langle \Box (D \equiv A(D)) \Rightarrow D \equiv A(D) \rangle$

(۱۲) $(\Box \mathrm{r})$ روی ۱۱ $\langle \Rightarrow \Box (D \equiv A(D)) \rangle$

(۱۳) برش روی ۱۱ و ۱۲ $\langle \Rightarrow D \equiv A(D) \rangle$

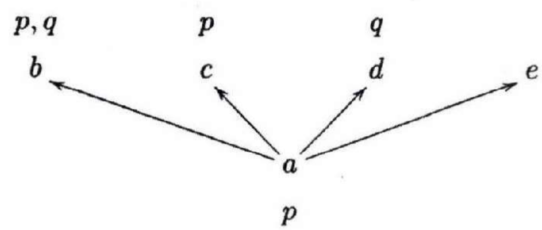
به یاد بیاورید که معلوم شد جملهٔ گودل ν با عبارت سازگاری Con هم‌ارز است. گزارهٔ ۷ توضیح می‌دهد که این امر تصادفی نبوده است: هر معادلهٔ گودلی، یک جوابِ صریحاً تعریف‌پذیر دارد، یعنی جوابی نمایش‌پذیر برحسب Pr، $\bot$ و ادوات منطقی دیگر. به‌عنوان مثال، معادلهٔ $\mathrm{PA} \vdash \varphi \equiv \mathsf{Pr}(\overline{\varphi}) \to \lambda$ را در نظر بگیرید. حدسی مبتنی بر آگاهی از یک اثبات در [۹] یا نگاهی به [۱۲، ص.۱۲۳]، نشان می‌دهد که $\varphi := \mathsf{Pr}(\overline{\lambda}) \to \lambda$ تنها جواب آن است.

قاب کریپکی عبارت است از یک جفت $\langle W, R \rangle$ که در آن W مجموعه‌ای ناتهی از گرهها (یا جهانهای ممکن) و R یک رابطهٔ دوتایی روی W است. رابطهٔ R، رابطهٔ دسترسی‌پذیری قاب $\langle W, R \rangle$ نامیده می‌شود. رابطهٔ $\Vdash$ بین فرمولهای وجهی و گرههای یک قاب $\langle W, R \rangle$، یک رابطهٔ اظهار[1] روی $\langle W, R \rangle$ است هرگاه حافظ همهٔ ادوات منطقی باشد (یعنی در $a \Vdash A \& B$ صدق کند اگر و تنها اگر $a \Vdash A$ و $a \Vdash B$، و همین‌طور برای بقیه) و در شرط

$$a \Vdash \Box A \Leftrightarrow \forall b (a R b \Rightarrow b \Vdash A) \qquad \text{(E)}$$

به‌ازای هر گره a و فرمول وجهی A صدق کند. مدل کریپکی یک سه‌تایی $\langle W, R, \Vdash \rangle$ است که در آن $\Vdash$ یک رابطهٔ اظهار روی قاب $\langle W, R \rangle$ است. یک فرمول در مدل $\langle W, R, \Vdash \rangle$ معتبر است هرگاه در همهٔ گرههای $a \in W$

1. forcing relation



شکل ۲ مثالی از یک مدل کریپکی.

اظهار شود. مدل $\langle W,R,\Vdash\rangle$ یک مدل نقض برای فرمول A است اگر A در آن معتبر نباشد، یعنی گره $a\in W$ موجود باشد به قسمی که $a\nVdash A$. مفهوم اظهار و اعتبار به‌طور طبیعی از فرمولها به رشته‌ها تسری می‌یابد: رشتهٔ $\langle\Gamma\Rightarrow\Delta\rangle$ در یک گره $a\in W$ از مدلی چون $\langle W,R,\Vdash\rangle$ اظهار می‌شود اگر $a\Vdash\wedge\Gamma\rightarrow\vee\Delta$؛ آن رشته در $\langle W,R,\Vdash\rangle$ معتبر است اگر در هر گره $a\in W$ اظهار شود، و $\langle W,R,\Vdash\rangle$ یک مدل نقض برای $\langle\Gamma\Rightarrow\Delta\rangle$ است اگر گرهی چون $a\in W$ همهٔ فرمولهای در Γ را اظهار کند و هیچ فرمولی در Δ را اظهار نکند. مطالب بیشتری در مورد معناشناسی کریپکیِ منطق وجهی در [۸] یا در هر منبع دیگری در مورد منطق وجهی یافت می‌شود.

مثالی از یک مدل کریپکی در شکل ۲ نشان داده شده است. این مدل دارای پنج گره است و رابطهٔ دسترس‌پذیری‌اش ۴ جفت دارد که با پیکانها داده شده‌اند. برای هر گره، مشخص کرده‌ایم که کدام اتمها در آن اظهار می‌شوند. اگر اتمی ظاهر نشده است، می‌دانیم که اظهار نشده است. داریم $a\nVdash\Box(p\rightarrow q)$ و بنابراین $a\Vdash\neg\Box(p\rightarrow q)$ زیرا گرههایی موجودند ــ مثلاً c چنین گرهی است ــ که از a دسترس‌پذیرند، p را اظهار می‌کنند، اما q را اظهار نمی‌کنند. برای ثابت گزاره‌ای $\bot$، این شرط که همهٔ ادوات به‌وسیلهٔ $\Vdash$ حفظ می‌شوند می‌گوید که $\bot$ هیچ‌جا اظهار نمی‌شود. از آنجا که هیچ گرهی از b دسترس‌پذیر نیست (همین‌طور از c، d و e)، داریم $b\Vdash\Box\bot$. فرمول $\neg\Box\bot\rightarrow p$ در مدل ما معتبر است زیرا تنها گرهی که $\neg\Box\bot$ را اظهار می‌کند، a است و در حقیقت a، p را اظهار می‌کند. مدل شکل ۲ یک مدل نقض برای مثلاً فرمول $\neg\Box\bot\rightarrow\neg p$ است.

رابطهٔ R روی W وارون‌ْخوش بنیاد[1] است اگر هر زیرمجموعهٔ ناتهی از W دارای یک عنصر بیشین باشد. مدل $\langle W,R,\Vdash\rangle$ یک مدل کریپکی برای منطق اثبات‌پذیری است اگر R متعدی و وارون‌ْخوش بنیاد باشد. توجه کنید که هر رابطهٔ وارون‌ْخوش بنیاد نابازتابی است و اینکه رابطه‌ای متعدی روی یک مجموعهٔ متناهی وارون‌ْخوش بنیاد است اگر و تنها اگر نابازتابی باشد. بنابراین مدل در شکل ۲، مدلی برای منطق اثبات‌پذیری است.

گزارهٔ ۸. هر رشتهٔ اثبات‌پذیر در $\mathrm{LK_{GL}}$ در هر مدل کریپکی متعدیِ وارون‌ْخوش بنیاد، معتبر است. بنابراین $\mathrm{LK_{GL}}$ نسبت به معناشناسیِ کریپکیِ منطق اثبات‌پذیری، درست است.

اثبات. ما درست بودن قاعدهٔ وجهی $(\mathrm{r}\Box)$ را بررسی می‌کنیم. درستی مابقی قواعد سرراست است. بنابراین فرض کنید $\langle W,R,\Vdash\rangle$ یک مدل کریپکی با Rای وارون‌ْخوش بنیاد باشد و فرض کنید $\langle\Box\Gamma,\Gamma,\Box A\Rightarrow A\rangle$ یک رشتهٔ معتبر در $\langle W,R,\Vdash\rangle$ باشد. نشان می‌دهیم که $\langle\Box\Gamma\Rightarrow\Box A\rangle$ نیز در $\langle W,R,\Vdash\rangle$ معتبر است. فرض کنید چنین نباشد. پس گره $a\in W$ موجود است به‌طوری که $a\nVdash\Box A$، و $a\Vdash\Box B$ هرگاه $B\in\Gamma$. قرار دهید $Y=\{b: b\nVdash A$ و $aRb\}$. چون $a\nVdash\Box A$، مجموعهٔ Y ناتهی است. فرض کنید $b_\circ$ عضو بیشین Y باشد. چون $aRb_\circ$ و $a\Vdash\Box B$، داریم $b_\circ\Vdash B$ به‌ازای هر $B\in\Gamma$. بنابر متعدی بودن R، همهٔ گرههای دسترس‌پذیر از $b_\circ$، از a هم دسترس‌پذیر هستند. بنابراین $b_\circ\Vdash\Box B$ به‌ازای هر $B\in\Gamma$. اگر به‌ازای cای دسترس‌پذیر از $b_\circ$ می‌داشتیم $c\nVdash A$، آنگاه مجدداً بنابر متعدی بودن R، $b_\circ$ در Y بیشین نمی‌بود. بنابراین $b_\circ\Vdash\Box A$. پس به یک تناقض رسیده‌ایم: فرض اینکه $\langle\Box\Gamma,\Gamma,\Box A\Rightarrow A\rangle$ در $\langle W,R,\Vdash\rangle$ معتبر است در $b_\circ$ نقض شده است. □

مثالی از کاربرد گزارهٔ ۸ را نشان می‌دهیم. فرمول

$$\Box(p\vee q)\vee\Box(p\vee\neg q)\vee\Box(\neg p\vee q)\vee\Box(\neg p\vee\neg q)\quad(\mathrm{F})$$

دارای یک مدل نقض کریپکی است. در حقیقت، مدل در شکل ۲ چنین است. پس بنابر گزارهٔ ۳، فرمول (F) به‌طور حسابی معتبر نیست. بنابراین، ارزیاب e را داریم که

$$\mathrm{PA}\nvdash\Pr(\overline{e(p)\vee e(q)})\vee..\vee\Pr(\overline{\neg e(p)\vee\neg e(q)})$$

این همراه با شرط D۱ می‌گوید که هیچ‌یک از چهار مؤلفهٔ فصلی $e(p)\vee e(q)$، ...، $\neg e(p)\vee\neg e(q)$ در PA اثبات‌پذیر نیست. بنابراین، من نشان داده‌ام که جملات حسابی φ و ψ موجودند، یعنی $\varphi:=e(p)$ و $\psi:=e(q)$، که دوبه‌دو مستقل‌اند به این معنی که نظریه‌های $\mathrm{PA}\cup\{\varphi,\psi\}$، $\mathrm{PA}\cup\{\varphi,\neg\psi\}$، $\mathrm{PA}\cup\{\neg\varphi,\psi\}$ و $\mathrm{PA}\cup\{\neg\varphi,\neg\psi\}$ همگی سازگارند.

گزارهٔ زیر قضیهٔ تمامیت کریپکی برای حساب $\mathrm{LK_{GL}}$ است. منظور من از طول یک رشتهٔ $\langle\Sigma\Rightarrow\Omega\rangle$ مجموع تعداد همهٔ رخدادهای ادوات منطقی و گزاره‌های اتمی در رشتهٔ $\langle\Sigma\Rightarrow\Omega\rangle$ است.

گزارهٔ ۹. اگر یک رشتهٔ $\langle\Sigma\Rightarrow\Omega\rangle$ به طول n در $\mathrm{LK_{GL}}$ اثبات‌پذیر باشد آنگاه آن رشته دارای یک اثبات بدون برش در $\mathrm{KL_{GL}}$ با عمق حداکثر $\mathcal{O}(n^2)$ است. در غیر این‌صورت دارای یک مدل نقض کریپکی با عمق حداکثر n است، که در آن هر گره حداکثر n تالیِ بلافصل دارد.

اثبات. فرایندی را توصیف می‌کنیم که در آن سعی می‌شود اثباتی از رشتهٔ مفروض $\langle\Sigma\Rightarrow\Omega\rangle$ ساخته شود. اگر این تلاش با شکست مواجه شود، اثبات ناموفق به یک مدل نقض کریپکی برای $\langle\Sigma\Rightarrow\Omega\rangle$ تبدیل می‌شود.

در بخش اول فرایند ما، یک درخت متناهی T که با رشته‌ها برچسب‌گذاری شده است، ایجاد می‌گردد. شروع کار عبارت است از اعلام $\langle\Sigma\Rightarrow\Omega\rangle$، رشتهٔ ورودی، به‌عنوان ریشهٔ T. سپس بخش اول فرایند گام‌به‌گام ادامه می‌یابد. در هر گام، یک رشتهٔ فوقانی در T که (تاکنون) به‌عنوان یک برگ اعلام نشده است، انتخاب و تحلیل می‌شود. اگر هیچ رشتهٔ فوقانی غیر برگ موجود نبود، بخش اول فرایند پایان می‌یابد.

فرض کنید $\langle\Gamma\Rightarrow\Delta\rangle$ یک رشتهٔ فوقانی باشد که به‌عنوان برگ اعلام نشده است. اگر $\Gamma\cup\Delta$ شامل فرمولی باشد که بیرونی‌ترین نماد آن یک ادات است، فرایند ما یک چنین فرمول Aای را برمی‌گزیند و یک گام گزاره‌ای

1. reversely well-founded

را شکل می‌دهد. این گام به معنی الحاق یک یا دو رشتهٔ جدید در بالای $\langle \Gamma \Rightarrow \Delta \rangle$ با استفاده از یک یا دو بار قاعدهٔ گزاره‌ای متناظر به‌طور وارون، و بنابراین به‌دست آوردن یک یا دو رشتهٔ فوقانی جدید است. در حالتهایی که A یک شرطی در تالی یا یک عطف در تالی است، به‌صورت زیر عمل می‌شود

$$\begin{array}{c} \langle \Gamma, B \Rightarrow \Lambda, C\rangle \\ \langle \Gamma \Rightarrow \Lambda, B \to C\rangle \end{array} \qquad \frac{\langle \Gamma \Rightarrow \Lambda, B\rangle \quad \langle \Gamma \Rightarrow \Lambda, C\rangle}{\langle \Gamma \Rightarrow \Lambda, B \,\&\, C\rangle}$$

اگر A یک عطف در مقدم یا یک فصل در تالی باشد، دو رشتهٔ جدید اما فقط یک رشتهٔ فوقانی جدید داریم

$$\begin{array}{cc} \langle \Pi, B, C \Rightarrow \Delta\rangle & \langle \Gamma \Rightarrow \Lambda, B, C\rangle \\ \langle \Pi, B \,\&\, C, C \Rightarrow \Delta\rangle & \langle \Gamma \Rightarrow \Lambda, B \vee C, C\rangle \\ \langle \Pi, B \,\&\, C \Rightarrow \Delta\rangle & \langle \Gamma \Rightarrow \Lambda, B \vee C\rangle \end{array}$$

هر یک از چهار حالت باقیمانده شبیه یکی از اینهاست. گامهای گزاره‌ای فرایند شبیه گامهای متناظر در منطق گزاره‌ای کلاسیک است.

در یک مثال نشان می‌دهیم که این فرایند چگونه عمل می‌کند. فرض کنید که رشتهٔ ورودی $\langle \Sigma \Rightarrow \Omega\rangle$ عبارت است از

$$\langle \Box(\Box p \to q) \vee \Box\neg(p \vee q), \neg\Box q \Rightarrow \Box(\Box\bot \to \neg p), p\rangle.$$

در این‌صورت، فرایند ما قاعدهٔ $(\mathrm{l}\neg)$ و $(\vee \mathrm{l})$ را به‌کار می‌برد تا یک درخت چهار عضوی

$$\frac{\dfrac{\langle \Box(\Box p \to q) \Rightarrow \Box q, \Box(\Box\bot \to \neg p), p\rangle^{b} \quad \langle C \Rightarrow \Box q, \Box(\Box\bot \to \neg p), p\rangle^{c}}{\langle \Box(\Box p \to q) \vee \Box\neg(p \vee q) \Rightarrow \Box q, \Box(\Box\bot \to \neg p), p\rangle^{a}}}{\langle \Box(\Box p \to q) \vee \Box\neg(p \vee q), \neg\Box q \Rightarrow \Box(\Box\bot \to \neg p), p\rangle}$$

با دو رشتهٔ فوقانی به‌دست آید که تنها شامل گزاره‌های اتمی و فرمولهای مربع‌دار (یعنی فرمولهایی که با $\Box$ شروع می‌شوند) هستند. C فرمول $\Box\neg(p \vee q)$ را نشان می‌دهد.

حال می‌گوییم یک رشتهٔ بحرانی است هرگاه فقط شامل گزاره‌های اتمی و فرمولهای مربع‌دار باشد. با فرمول $\bot$ نیز مانند اتمها رفتار می‌شود. اکنون می‌خواهیم مشخص کنیم که این فرایند با رشته‌های بحرانی چه می‌کند. یعنی می‌خواهیم گامهای بحرانی را توصیف کنیم. یک رشتهٔ بحرانی به شکل $\langle \Box\Gamma, \Pi \Rightarrow \Box\Delta, \Lambda\rangle$ است، که در آن $\Pi \cup \Lambda$ تنها شامل گزاره‌های اتمی است. اگر $\Pi \cap \Lambda \neq \emptyset$ یا $\bot \in \Pi$ یا $\Lambda = \emptyset$، آنگاه رشته یک برگ می‌شود. در غیر این‌صورت، فرایند همهٔ رشته‌های به شکل $\langle \Box\Gamma, \Gamma, \Box A \Rightarrow A\rangle$ را که در آن $A \in \Delta$، به‌عنوان تالیهای بلافصل رشتهٔ $\langle \Box\Gamma, \Pi \Rightarrow \Box\Delta, \Lambda\rangle$ الحاق می‌کند. توجه کنید که اگر بعضی از تالیهای بلافصل آن اثبات‌پذیر باشند، آنگاه $\langle \Box\Gamma, \Pi \Rightarrow \Box\Delta, \Lambda\rangle$ نیز در $\mathrm{LK_{GL}}$ اثبات‌پذیر است. همچنین توجه کنید که گزاره‌های اتمی در خلال این گام کنار گذاشته شده‌اند.

همان‌طوری که در بالا گفتیم، گامهای گزاره‌ای و بحرانی مادام که رشته‌ای فوقانی وجود دارد که یک برگ نیست، تکرار می‌شود. در طرف راست مثال ما، بالای رشتهٔ c، فرایندْ اثبات زیر را به‌دست می‌دهد، که در آن C باز فرمول $\Box\neg(p \vee q)$ را نشان می‌دهد. پیشنهاد می‌کنیم که خواننده آنچه را در طرف چپ بالای رشتهٔ b اتفاق می‌افتد بنویسد.

$$\begin{array}{cc}
 & \langle C, \Box(\Box\bot \to \neg p), \Box\bot, p \Rightarrow p, q\rangle \\
 & \langle C, \Box(\Box\bot \to \neg p), \Box\bot, p \Rightarrow p, p \vee q\rangle \\
 & \langle C, \Box(\Box\bot \to \neg p), \Box\bot, p \Rightarrow p \vee q\rangle \\
\langle C, \Box q \Rightarrow p, q\rangle^{d} & \langle C, \Box(\Box\bot \to \neg p), \Box\bot \Rightarrow \neg p, p \vee q\rangle \\
\langle C, \Box q \Rightarrow q, p \vee q\rangle & \langle C, \Box(\Box\bot \to \neg p)\Box \Rightarrow \Box\bot \to \neg p, p \vee q\rangle \\
\langle C, \neg(p \vee q), \Box q \Rightarrow q\rangle & \langle C, \neg(p \vee q), \Box(\Box\bot \to \neg p) \Rightarrow \Box\bot \to \neg p\rangle \\
\hline
\multicolumn{2}{c}{\langle \Box\neg(p \vee q) \Rightarrow \Box q, \Box(\Box\bot \to \neg p), p\rangle^{c}}
\end{array}$$

هر گام بحرانی، یک فرمول مربع‌دار به مقدم اضافه می‌کند. از آنجا که حداکثر n فرمول مربع‌دار وجود دارد، هر شاخه از درخت حاصل، حداکثر n رشتهٔ بحرانی دارد. فاصلهٔ دو رشتهٔ بحرانی متوالی در هر شاخه دارای کران بالای $2n$ است زیرا هر گام گزاره‌ای یک ادات منطقی را حذف می‌کند، بجز آنکه ۲ گام لازم است که یک فصل از تالی یا یک عطف از مقدم را حذف کند، که این را می‌توان در بالای قسمت راست مثال ما دید. بنابراین درخت حاصل متناهی است و بخش اول فرایند ما همواره پایان می‌پذیرد.

فرایند ما سپس با علامت‌گذاری هر رشته در درخت به‌عنوان «مثبت» یا «منفی»، ادامه می‌یابد. یک برگ مثبت است اگر یک رشتهٔ آغازی باشد، یعنی اگر مقدم و تالی‌اش، اتم مشترکی داشته باشند یا مقدم آن شامل $\bot$ باشد؛ در غیر این‌صورت منفی است. در حالت اخیر، آن برگ شامل هیچ فرمول مربع‌داری در تالی نیست و به آسانی می‌توان نشان داد که یک مدل نقضِ یک عنصریِ کریپکی دارد. هر رشتهٔ بحرانی دیگر مثبت است اگر بعضی از مابعدهای بلافصل آن مثبت باشند، و در غیر این‌صورت منفی است. رشتهٔ غیر بحرانی دارای یک یا دو تالیِ بلافصل است (زیرا هر قاعدهٔ گزاره‌ای دارای حداکثر ۲ فرض است)، و علامت مثبتْ می‌گیرد اگر و تنها اگر همهٔ مابعدهای بلافصل آن مثبت باشند. در مثال ما، همهٔ رشته‌ها در شاخهٔ سمت چپ روییده از رشتهٔ c منفی هستند، اما همهٔ رشته‌ها در شاخهٔ سمت راست مثبت هستند، که کافی است برای آنکه c نیز مثبت باشد. رشتهٔ (غیربحرانی) a منفی است زیرا اگر خواننده آنچه را بالای b اتفاق می‌افتد نوشته باشد، متوجه می‌شود که b منفی است. با انجام این کار، او همچنین بایستی سه رشتهٔ بحرانی منفی دیگر e، f، و g را کشف کرده باشد.

اگر رشتهٔ ریشهٔ $\langle \Sigma \Rightarrow \Omega\rangle$ مثبت باشد (که در مثال ما چنین نیست)، فرایند ما همهٔ رشته‌های منفی را کنار می‌گذارد، سپس مابقی رشته‌ها را کنار می‌گذارد به‌طوری که هر رشتهٔ غیر برگ بحرانی دارای دقیقاً یک مابعدِ بلافصل باشد. و سرانجام چند تضعیف را می‌افزاید. نتیجهٔ اثبات رشتهٔ بحرانی $\langle \Sigma \Rightarrow \Omega\rangle$ است. از طرف دیگر، اگر رشتهٔ ریشهٔ $\langle \Sigma \Rightarrow \Omega\rangle$ منفی باشد، مدل نقض کریپکی $\langle W, R, \Vdash\rangle$ برای $\langle \Sigma \Rightarrow \Omega\rangle$ مطابق زیر ساخته می‌شود. W مجموعهٔ همهٔ رشته‌های بحرانی منفی است. R از درخت $\mathcal{T}$ به ارث می‌رسد. رابطهٔ اظهار $\Vdash$ با این شرط معین می‌شود که هر اتم p در رشتهٔ بحرانی $\langle \Gamma \Rightarrow \Delta\rangle$ اظهار می‌شود اگر و تنها اگر عنصری از Γ باشد. در مثال ما مدل عبارت است از

$$
\begin{tikzcd}
q & & & \\
\langle\,\rangle^f & & p,q & \\
\langle\,\rangle^e \arrow[u] & & \langle\,\rangle^g & \langle\,\rangle^d \\
& \langle\,\rangle^b \arrow[ul] \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}
$$

این حقیقت که $\langle W,R,\Vdash\rangle$ یک مدل نقض برای $\langle \Sigma\Rightarrow\Omega\rangle$ است از زیرلم زیر نتیجه می‌شود.

زیرلم. فرض کنید $s'\in T$ و نیز فرض کنید $s\in W$ به‌گونه‌ای باشد که s نخستین رشتهٔ بحرانی روی مسیر از s' به s (در T به‌عنوان یک گراف سودار) باشد اگر یک فرمول وجهی A در مقدم s' باشد آنگاه $s\Vdash A$. اگر آن فرمول در تالی s' باشد آنگاه $s\Vdash\neg A$.

نخستین رشتهٔ روی مسیر از s' به s می‌تواند خود s باشد، که در صورتی چنین است که s' بحرانی باشد.

زیرلم با استقرا روی پیچیدگی A ثابت می‌شود. ما سه حالت نمونه را معرفی و مابقی را به خواننده واگذار می‌کنیم. اگر A یک اتم در تالی s' باشد آنگاه A در مقدم s نیست، در غیر این‌صورت s یک برگ مثبت می‌بود. بنابراین $s\nVdash A$. اکنون فرض کنید $A=\Box B$ و A در تالی s' باشد. می‌خواهیم نشان دهیم که $s\nVdash\Box B$. از آنجا که s منفی است و یک فرمول مربع‌دار $\Box B$ در تالی دارد، دارای یک عنصر بلافاصله بعد چون t' است که B را در تالی‌اش دارد. بنابر ساختار، t' منفی است. مسیری از t' به یک tی بحرانی انتخاب کنید به‌گونه‌ای که همهٔ گرهها روی این مسیر منفی باشند و t نخستین رشتهٔ بحرانی روی این مسیر باشد. داریم $t\in W$ و sRt. فرض استقرای به‌کار رفته در مورد t'، t، و B نتیجه می‌دهد $t\nVdash B$. بنابراین $s\nVdash\Box B$. سرانجام فرض کنید که $A=\Box B$ و A در مقدم s' باشد. می‌خواهیم نشان دهیم که $s\Vdash\Box B$. فرض کنید $t\in W$ گرهی دلخواه به‌گونه‌ای باشد که sRt؛ و نیز s_1 آخرین رشتهٔ بحرانی روی مسیر از s به t باشد که با t متفاوت است. حال فرض کنید t' عنصر بلافاصله بعد از s_1 روی این مسیر باشد. از آنجا که فرمولهای مربع‌دار هرگز از مقدم ناپدید نمی‌شوند، $\Box B$ در مقدم s_1 است. در این‌صورت B در مقدم t' است و فرض استقرا را در مورد t'، t، و B می‌توان به‌کار برد. □

در مثال ما گره (منفی) b نخستین رشتهٔ بحرانی روی مسیری از رشتهٔ ریشهٔ $s'=\langle\Sigma\Rightarrow\Omega\rangle$ است. پس، بنابر زیرلم، s' در b اظهار نمی‌شود و کل مدل یک مدل نقض برای s' است. البته گره d در این مورد نقشی ندارد. توجه کنید که زیرلم در مورد s' و d به‌کار نمی‌رود زیرا d نخستین رشتهٔ بحرانی روی مسیر از s' به d نیست.

خاطر نشان می‌کنیم که یک فرایند تصمیم مشابه هم می‌توان برای منطق شهودی گزاره‌ای ساخت.

۵. دیگر چه؟

دیدیم که منطق اثبات‌پذیری می‌تواند در مطالعه و فهم خواص جملات و معادلات خودارجاعی سودمند باشد. یک نتیجهٔ بلافصل گزارهٔ ۹ این است که GL خاصیت مدل متناهی را دارد و تصمیم‌پذیر است، که اینها خواصی هستند که خیلی از منطقهای وجهی نیز دارند. یک خاصیت نه چندان معمولِ GL این است که معناشناسی کریپکی آن فشرده نیست؛ [۱۲] یا [۳] را ببینید. در حقیقت GL تنها منطق طبیعیِ آشنا برای نویسنده است که دارای یک معناشناسی معقول اما نافشرده است.

در اثبات گزارهٔ ۹ در واقع به پدیده‌ای اشاره کرده‌ایم که علمای علوم رایانه آن را تناوب[1] می‌نامند: در برخی موارد یک گره مثبت است اگر و تنها اگر همهٔ عناصر مابعد آن مثبت باشند؛ در موارد دیگر، گره مثبت است اگر و تنها اگر یک عنصر مابعد آن مثبت باشد. تناوب برای مثال در الگوریتم تصمیم منطق گزاره‌ای کلاسیک رخ نمی‌دهد و خصوصیت نوعیِ مسائلی در PSPACE‌ـکامل است، یعنی رده‌ای از مسائل تصمیم که به‌وسیلهٔ الگوریتمی قابل حل‌اند که حافظهٔ مورد نیاز آن برحسب اندازهٔ ورودی تنها به‌صورت چندجمله‌ای رشد می‌کند. در واقع حکمی قوی‌تر از این صحیح است: مسألهٔ تصمیم GL، PSPACE‌ـکامل است، یعنی به زیر ردهٔ مشکل‌ترین مسائل در PSPACE تعلق دارد. در یک مقالهٔ آتی [۱۴] نشان می‌دهیم که مسألهٔ تصمیم GL، PSPACE‌ـکامل است حتی اگر تعداد گزاره‌های اتمی به یک محدود شود.

یک قدم اساسی در اثبات PSPACE‌ـکامل بودن مسألهٔ تصمیم GL، ساخت یک دنبالهٔ $A_0, A_1, A_2, \ldots$ از فرمولهای وجهی است به‌طوری که طول A_n برحسب n به‌صورت چندجمله‌ای رشد کند، هر A_n دارای یک مدل نقض کریپکی باشد، اما طول مدل نقض کمینه (یعنی تعداد گرهها در مدل نقض) برحسب n، نمایی باشد. مسألهٔ مشابه زیر، در رابطه با فرمولهای اثبات‌پذیر، احتمالاً حل نشده است: آیا می‌توان دنباله‌ای چون $A_0, A_1, A_2, \ldots$ از فرمولهای وجهی اثبات‌پذیر در GL ساخت به‌طوری که طول A_n برحسب n به‌صورت چندجمله‌ای رشد کند، اما اندازهٔ اثبات کمینهٔ A_n برحسب n به‌صورت نمایی رشد کند؟

در بخش ۳ نشان داده‌ایم که طرح $\Box A\to A$ موسوم به طرح بازتاب یک PA‌ـراستگو نیست زیرا ارزیاب حسابی e موجود است به‌طوری که $\mathrm{PA}\nvdash e(\Box p\to p)$. این حرف، حرف آخر دربارهٔ طرح اصل موضوعی بازتاب نیست. می‌توانیم به‌راحتی تحقیق کنیم که به‌ازای هر ارزیاب e، داریم $\mathcal{N}\Vdash e(\Box A\to A)$: اگر $\mathcal{N}\Vdash e(\Box A)$، یعنی $\mathcal{N}\Vdash \mathsf{Pr}(\overline{e(A)})$، آنگاه بنابر شرط Def، $\mathrm{PA}\vdash e(A)$. از آنجا که $\mathcal{N}$ مدلی از PA است، داریم $\mathcal{N}\Vdash e(A)$. این استدلال منجر به مفهوم $\mathcal{N}$ـراستگو و منطق موجهات دیگر GL^ω می‌شود. فرمول وجهی A یک $\mathcal{N}$ـراستگوست اگر به‌ازای هر ارزیاب e، $\mathcal{N}\Vdash e(A)$. روشن است که هر PA‌ـراستگو یک $\mathcal{N}$ـراستگو است و هر مورد از طرح بازتاب نیز یک PA‌ـراستگو است. بنابراین منطق GL^ω دارای یک مجموعهٔ اصول مرکب از همهٔ فرمولهای اثبات‌پذیر در GL و همهٔ فرمولهای به شکل $\Box A\to A$ است، و تنها قاعدهٔ استنتاج آن وضع مقدم است. قاعدهٔ ضرورت $A/\Box A$ به‌عنوان یک قاعدهٔ استنتاجی GL^ω پذیرفته نیست زیرا مجموعهٔ همهٔ $\mathcal{N}$ـراستگوها تحت این قاعده بسته نیست. هر فرمولی در GL^ω اثبات‌پذیر است اگر و تنها اگر $\mathcal{N}$ـراستگو باشد، که معنی آن این است که GL^ω نسبت به معناشناسی حسابی کامل است. نتیجهٔ این حکم که سالووی آن را در سال ۱۹۷۶ ثابت کرد و اسمورینسکی آن را در سال ۱۹۸۵ قضیهٔ دوم تمامیت سالووی نامید [۱۲]، می‌تواند به‌صورت زیر فرمول‌بندی شود: طرح اصل موضوعی بازتاب تنها اطلاعات کلی در مورد

1. alternation

اثبات‌پذیری در PA را که در خود PA صوری شدنی نیستند درکار می‌آورد. GL^{ω} تصمیم‌پذیر است و پیچیدگی محاسباتی آن شبیه GL است.

در بخش ۲ متذکر شدیم که محمول اثبات‌پذیری را می‌توان برای هر توسیع بازگشتیِ اصل‌پذیر T از PA ساخت. تعمیم دیگری هم ممکن است: محمول اثبات‌پذیری Pr_T را که در شرایط لاب، D۱ – D۳، با تغییراتی سرراست، صدق کند، می‌توان برای هر توسیع بازگشتیِ اصل‌پذیر T از $I\Delta_0 + \Omega_1$ ساخت. در اینجا $I\Delta_0$ عبارت است از حساب پئانو با طرح استقرای تحدیدشده به فرمولهای Δ_0 (یعنی فرمولهایی که فاقد سور بی‌کران هستند)، و Ω_1 یک اصل موضوع واحد است حاکی از تام بودن تابع $x \mapsto x^{|x|}$، که در آن $|x|$ طول بسط دودویی x را نشان می‌دهد. یک چنین محمول اثبات‌پذیری را می‌توان برای ترجمهٔ نماد $\Box$ به‌کار برد. این بدان معنی است که می‌توانیم بپرسیم چه اصول کلی‌ای دربارهٔ اثبات‌پذیری در T در خود T می‌توانند اثبات شوند، یعنی می‌توانیم بپرسیم منطق اثبات‌پذیری نظریهٔ T چیست. جوابی شاید غیرمنتظره به این سؤال این است که منطق اثبات‌پذیریِ خیلی از نظریه‌های معقول، مشابه است. به بیان دقیق‌تر، GL منطق اثبات‌پذیریِ هر نظریهٔ درستِ بازگشتیِ اصل‌پذیر است که $I\Delta_0 + \mathrm{Exp}$ را گسترش دهد؛ در اینجا Exp اصلی است که بیان می‌کند تابع نمایی $x \mapsto 2^x$ تام است. اصل Exp از Ω_1 قوی‌تر است. هر دو نظریهٔ $I\Delta_0 + \Omega_1$ و $I\Delta_0 + \mathrm{Exp}$ به تفصیل بررسی شده‌اند و دارای ارتباطهایی با پیچیدگی محاسبه هستند. می‌توان به آسانی تحقیق کرد که GL نسبت به منطق اثبات‌پذیری $I\Delta_0 + \Omega_1$ درست است، اما اثبات سالووی برای گزارهٔ ۳ به اصل موضوع Exp نیاز دارد، و دانسته نیست که آیا GL نسبت به منطق اثبات‌پذیری $I\Delta_0 + \Omega_1$ کامل است یا نه. علی‌رغم تلاش فراوان و نتایج جزئی نویدبخش ([۱] را ببینید)، مسألهٔ اینکه منطق اثبات‌پذیری $I\Delta_0 + \Omega_1$ چیست، هنوز حل نشده است.

اثبات‌پذیریِ صوری تنها مفهوم فراریاضی نیست که می‌توان آن را به کمک منطق موجهات مطالعه و روشن کرد. توسیعهایی از GL موجودند که در مورد شکلهای مختلفی از جملات رُسر ([۷] و [۱۱] را ببینید) به‌کار می‌آیند. توسیعهای جالب دیگری از GL، تحت‌عنوان منطق تعبیرپذیری قرار می‌گیرند. زبان منطق تعبیرپذیری دارای یک «وجه» دوتایی $\rhd$ به‌علاوهٔ نماد $\Box$ است. معناشناسی حسابی منطق تعبیرپذیری با افزودن عبارت $e(A \rhd B) = \mathsf{Intp}_T(\overline{e(A)}, \overline{e(B)})$ به تعریف ارزیاب حسابی به‌دست می‌آید. $\mathsf{Intp}_T(x, y)$ یک فرمول حسابی است که می‌گوید **تعبیری از نظریهٔ $T \cup \{y\}$ در نظریهٔ $T \cup \{x\}$ موجود است**، که در آن تعبیر (نحوی) دارای همان معنایِ معمولی است که تارسکی و دیگران در[۱۶] بیان کرده‌اند. اگر T مطابق معمول باشد، آنگاه نظریهٔ $T \cup \{\neg\mathsf{Con}(T)\}$ در T تعبیرپذیر است. اگر، به‌علاوه، T سازگار باشد آنگاه $T \cup \{\mathsf{Con}(T)\}$ در T تعبیرپذیر نیست (برای هر دو موضوع، مثلاً [۵] را ببینید). بنابراین فرمولهای وجهی $\neg\bot \rhd \Box\bot$ و $\neg\Box\bot \to \neg(\neg\bot \rhd \neg\Box\bot)$ مثالهایی از راستگوهای منطق تعبیرپذیری هستند. برای آشنایی با این حوزهٔ بزرگ و غنی، مقالهٔ مروری آلبرت ویسر[۱۷] را توصیه می‌کنیم.

مراجع

1. Berarducci, A. and Verbrugge, R. 1993. On the provability logic of bounded arithmetic. *Annals of Pure and Applied Logic*, vol. 61, pp. 75-93.
2. Boolos, G. 1993. *The Logic of Provability.* Cambridge University Press.
3. Boolos, G. and Sambin, G. 1991. Provability: The emergence of a mathematical modality. *Studia Logica*, vol. L, no. 1, pp. 1-23.
4. Carnap, R. 1934. *Logische Syntax der Sprache.* Springer.
5. Feferman, S. 1960. Arithmetization of metamathematics in a general setting. *Fundamenta Mathematicae*, vol. 49, pp. 35-92.
6. Gödel, K. 1930. Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I. *Monatshefte für Mathematik und Physik*, vol. 37, pp. 349-60.
7. Guaspari, D. and Solovay, R. M. 1979, Rosser sentences. *Annals of Mathematical Logic*, vol. 16, pp. 81-99.
8. Hughes, G. and Cresswell, M. 1996. *New Introduction to Modal Logic.* Routledge, London.
9. Löb, M. H. 1955. Solution of a problem of Leon Henkin. *Journal of Symbolic Logic*, vol. 20, pp. 115-18.
10. Sambin, G. and Valentini, S. 1982. The modal logic of provability: The sequential approach. *Journal of Philosophical Logic*, vol. 11, pp. 311-42.
11. Smoryński, C. 1984. Modal logic and self-reference. In D. Gabbay and F. Guenthner (eds.), *Handbook of Philosophical Logic*, vol. 2, chap. 9. Kluwer, Dordrecht.
12. ———. 1985. *Self-Reference and Modal Logic.* Springer-Verlag, New York.
13. Solovay, R. M. 1976. Provability interpretations of modal logic. *Israel Journal of Mathematics*, vol. 25, pp. 287-304.
14. Švejdar, V. 1998. Complexity of some decision problems in non-classical logics. In preparation.
15. Takeuti, G. 1975. *Proof Theory.* North-Holland, Amsterdam.
16. Tarski, A., Nostowski, A., and Robinson, R. M. 1953. *Undecidable Theories.* North-Holland, Amsterdam.
17. Visser, A. 1997. An overview of interpretability logic. Logic Group Preprint Series 174, Department of Philosophy, Utrecht University, Utrecht.

******

• Vítězslav Švejdar, "On provability logic", *Nordic Journal of Philosophical Logic*, (2) **4** (2000) 95-116.

* دانشکدهٔ فلسفهٔ دانشگاه چارلز، جمهوری چک