نظریهٔ گرهها و مکانیک آماری *

وان جونز *

ترجمهٔ روزبه توسرکانی

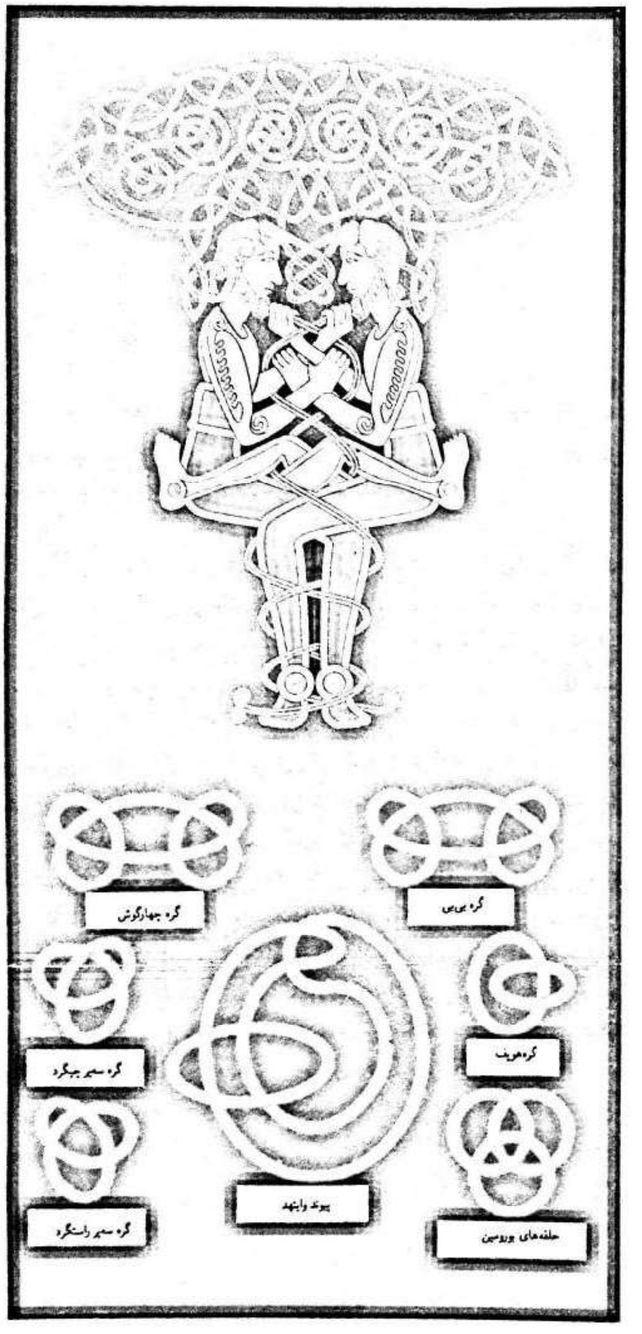
در سال ۱۹۸۴ تصادفاً به مجموعه‌ای از تکنیکها دست یافتم که بین دو زمینهٔ ریاضی و فیزیکی که بسیار دور از هم به‌نظر می‌رسیدند، یعنی نظریهٔ گرهها و مکانیک آماری، ارتباط برقرار می‌کردند. مکانیک آماری با مطالعهٔ سیستمهایی سروکار دارد که از اجزای فوق‌العاده زیادی تشکیل یافته‌اند و سیستمهای کوچک در این مبحث چندان مورد توجه نیستند، در حالی‌که در نظریهٔ گرهها، حتی کوچکترین گرهها و پیوندها (links) ممکن است خاصیتهای قابل توجه و پیچیده‌ای داشته‌باشند.

با وجود این، روابط جبری خاصی که در مکانیک آماری برای حل کردن مدلها به‌کار می‌روند، راه را برای توصیف یک خاصیت ریاضی مربوط به گرهها، موسوم به چندجمله‌ای ناوردا، گشودند. این ارتباط که در آغاز ضعیف بود، اکنون به جریان قوی و مهمی از ایده‌ها تبدیل شده‌است. در پیشرفتهای اخیر ریاضی و فیزیک، ظهور چنین زمینه‌های مشترکی چندان غیرمعمول نیست. اندیشه‌های موجود در حوزه‌های مختلف، برهم اثر می‌گذارند و نتایج غیر منتظره‌ای به‌بار می‌آورند. در واقع، کشف ارتباط بین گرهها و مکانیک آماری از طریق نظریه‌ای انجام شد که رابطهٔ نزدیکی با ساختار ریاضی مکانیک کوانتومی دارد. این نظریه، جبرهای فون نویمان خوانده می‌شود و وجه مشخصهٔ آن، ایدهٔ «پیوسته بودن بُعد» است. فضاها نوعاً ابعادی دارند که اعداد طبیعی‌اند مانند ۲، ۳، یا ۱۱، ولی در جبرهای فون نویمان وجود ابعادی مانند $\sqrt{2}$ یا π نیز به همان اندازه امکان‌پذیر است. این امکان وجود بعد پیوسته، نقش اساسی را در مرتبط ساختن نظریهٔ گرهها و مکانیک آماری ایفا کرد.

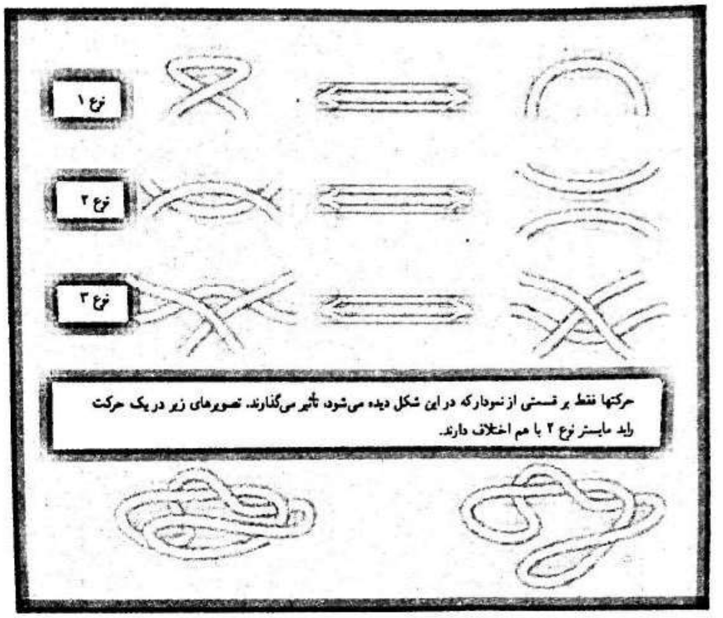
از سوی دیگر، خیلی زود کشف شد که ناورداهای گره در نظریهٔ میدان کوانتومی نیز ظاهر می‌شوند. ادوارد ویتن پژوهشگر مؤسسهٔ مطالعات عالی پرینستن در نیوجرسی، نشان داد که نظریهٔ میدان کوانتومی «توپولوژیک» راهی طبیعی برای بیان ایده‌های نو دربارهٔ گرهها پیش پای ما می‌گذارد. این پیشرفت نیز به‌نوبهٔ خود، تعمیم زیبایی را در مورد ناورداهای گرهها در فضاهای سه‌بعدی پیچیده‌تر ـ موسوم به خمینه‌های سه‌بعدی ـ امکان‌پذیر کرده‌است. این فضاها ممکن است خودشان شامل حفره‌ها و طوقه‌هایی نیز باشند.

نظریهٔ جدید گرهها در قلمرو دیگری نیز که کاملاً دور و نامرتبط به‌نظر می‌رسد، کاربرد پیدا کرده‌است. متخصصان زیست‌شناسی مولکولی ثابت کرده‌اند که مارپیچهای مضاعف DNA در جریان فرایندهای بیولوژیک مانند بازترکیب و همتاسازی، گره‌خورده و به هم زنجیر می‌شوند. مکانیسمهای بدون گره به‌کار رفته در سلولها شباهت مرموزی با ساده‌ترین روش ریاضی به‌کار رفته برای تولید ناورداهای جدید دارند.

از زمانهای بسیار قدیم از گرهها برای مقاصد عملی و تزیینی استفاده می‌شده‌است. ملوانها برای انجام کارهای خودشان گرههای استادانه‌ای می‌ساختند (و گاه در نامگذاری آنها هم همانقدر استادی به‌خرج می‌دادند). ریاضیدانان برای اولین بار در قرن نوزدهم به گرهها علاقه‌مند شدند. مثلاً لرد کلوین تلاش کرد ساختار جدول تناوبی عناصر را با فرض اینکه اتمها حلقه‌های گره‌خورده‌ای در «اتر» هستند، استنتاج کند (این تلاش هرچند به نتیجه نرسید، ولی الهام‌دهندهٔ پیتر تیت در خلق اولین جدولهای گره بود که در آنها، گرهها را برحسب مرتبهٔ پیچیدگی آنها مرتب کرده‌بود).



گرهها و پیوندها می‌توانند شکلهای مختلفی از ساده تا فوق‌العاده پیچیده داشته باشند. (گره بالایی از یک کتاب ایرلندی به نام *Book of Kells* متعلق به قرن هشتم میلادی اقتباس شده است.) گرههای سه‌پر راستگرد و چپگرد ساده‌ترین خمهای گره‌دار هستند. این دو گره قبل از کشف چندجمله‌ای جونز با ابزارهای ریاضی به آسانی قابل تمیز دادن نبودند. همچنین گرههای چهارگوش و بی‌بی را نیز نمی‌شد از هم تمیز داد. پیوند هوپف (Hopf) ساده‌ترین شکل با دو طوقهٔ به‌هم زنجیر شده است. طوقه‌های پیوند وایتهد به‌هم زنجیر نشده‌اند، با این حال نمی‌توان آنها را از هم جدا کرد. حلقه‌های بورومین (Borromean) نیز رفتاری غیرعادی دارند: هر سه طوقه به‌هم زنجیر شده‌اند ولی با بریدن یکی از آنها دوتای دیگر از هم باز می‌شوند.



حرکتهای راید مایستر تحلیل گرهها را آسان می‌کنند. دوگره یکسان هستند اگر و تنها اگر نمودارهای آنها را بتوان با ترکیبی از این حرکات به‌هم تبدیل کرد

از آن زمان تاکنون، نظریهٔ گرهها رشد کرده و به شاخهٔ پرباری از ریاضیات تبدیل شده است. یکی از زیباییهای این رشته در این است که مفاهیم اصلی مورد مطالعهٔ آن بسیار آشنا هستند: نخی را بردارید و دو انتهایش را به هم وصل کنید. این مدل کاملاً مناسبی است از چیزی که ریاضیدانان آن را "خم بستهٔ هموارى که خودش را قطع نمی‌کند" می‌نامند. شکل کلیتری از گره، موسوم به پیوند، ممکن است شامل بیش از یک طوقه باشد. دو گره یا پیوند یکی هستند اگر بتوان بدون پاره‌کردن نخ آنها را دقیقاً به‌هم تبدیل کرد.

طوقهٔ ساده‌ای از نخ را در نظر بگیرید که بر رویهٔ مسطحی قرارگرفته‌است. بلافاصله دو جنبهٔ مهم نظریهٔ گرهها آشکار می‌شود. اول اینکه گرهها را می‌توان به‌وسیلهٔ نمودارهای دوبعدی (مسطح) نشان داد. دوم اینکه تمیز دادن دو گره از هم بسیار مشکل است. نه متفاوت بودن دو گره مطلب واضحی است و نه این امر که یک طوقهٔ نخ واقعاً گره خورده‌باشد. اثبات چنین مدعایی محتاج درنظر گرفتن همهٔ تغییر شکلهای سه‌بعدی یک گره است. یافتن روشهای ریاضی برای تمیز دادن گرهها ـ و تشخیص یک گره از یک طوقهٔ گره‌نخورده ـ یکی از مسائل عمدهٔ نظریهٔ گرههاست.

در دههٔ ۱۹۲۰، کورت رایدمایستر (Reidemeister) با معرفی مجموعهٔ کوچکی از «حرکتها»ی دوبعدی روی نمودارهای گره، بررسی گرهها را بسیار ساده‌تر کرد. این حرکتها گرهها را تغییر نمی‌دهند و هر دو نمودار یک گره را می‌توان با دنباله‌ای از این حرکتها به هم تبدیل کرد. هرچند حرکتهای راید مایستر مسألهٔ هم‌ارزی را به یک مسألهٔ دوبعدی تقلیل می‌دهند، اما این حرکات را می‌توان به بینهایت صورت به‌کار برد، و بنابراین مسأله به‌هیچ‌وجه حل شده نیست.

در قدیمیترین و موفقترین تکنیکهای نظریهٔ گرهها، نمودارهای دوبعدی و حرکات راید مایستر، حداقل از لحاظ نظری، کنار گذاشته می‌شوند و به جای آنها از تبدیلات توپولوژیک استفاده می‌شود. این روشها با حذف کردن گره از فضای سه‌بعدی معمولی و به‌دست آوردن چیزی که مکمل گره نامیده می‌شود، آغاز می‌گردند. سپس مکمل گره به‌طور هموار و دلخواه تغییر شکل داده‌می‌شود. از توپولوژی مکمل، «ناورداهای گره» به‌دست می‌آیند، یعنی عباراتی ریاضی که فقط به خود گره بستگی دارند و نه به تصویر خاصی از آن [۱].

معروفترین ناوردا، چندجمله‌ای الکساندر است که آن را ریاضیدان آمریکایی جیمز الکساندر درسال ۱۹۲۸ کشف کرد. این چندجمله‌ای که بانماد $\Delta_k(t)$ نمایش داده‌می‌شود براساس تعداد انواع مختلف نقاط تقاطع در نمودار یک گره ساخته می‌شود. به عنوان مثال برای یک گره سه پر (trefoil) ساده، $\Delta_k = t - 1 - \frac{1}{t}$. همه شکلهای تغییریافته یک گره، چندجمله‌ای الکساندر یکسانی دارند. گرههایی که‌چند جمله‌ایهای مختلف دارند، متفاوت هستند ولی دوگره باچند جمله‌ایهای یکسان لزوماً هم ارز نیستند. به عنوان مثال، چندجمله‌ای الکساندر بین گره چهارگوش (square) و گره بی‌بی (granny) فرقی نمی‌گذارد. نظریه‌پردازان درطی ۶۰ سال اخیر ناورداهای دیگری رانیزتعریف کرده‌اند ولی هنوز خیلی از مسائل حل نشده‌اند.

یک صبح گرم بهاری درماه مه ۱۹۸۴ بود که من سوارمتروی بالای شهر، که به دانشگاه کلمبیا می‌رود، شدم تا با جون برمن (Joan S. Birman) متخصص نظریهٔ تافته‌ها (braids) ملاقات کنم (تافته‌هارا می‌توان انواع خاصی از گرهها دانست). درکارهایم روی جبرهای فون نویمان ازکشف عبارتهایی که شباهت زیادی با صورت جبری روابط توپولوژیک بین تافته‌ها داشتند، شگفت زده‌شده بودم. امیدوار بودم ارزش تکنیکهای مورداستفاده‌ام در نظریهٔ گرهها به اثبات برسد. حتی احتمال می‌دادم که بتوانم حقایق جدیدی را دربارهٔ چندجمله‌ای الکساندر نتیجه بگیرم.

بعداز بحثهای طولانی بابرمن که تمام‌روز ادامه یافت با خاطری آزرده به خانه‌ام برگشتم.به نظر نمی‌رسید که ایده‌های من به چندجمله‌ای الکساندر یا هیچ چیزدیگری در نظریه‌گرههامربوط باشند.

اما هفتهٔ بعد، یک شب تا دیروقت در بسترم بیدار نشستم و بعد ناگهان برای انجام دادن پاره‌ای محاسبات برخاستم. با رویکردی بسیار ساده‌تر از رویکرد قبلی، موفقیت به‌دست آمد. فهمیدم یک چندجمله‌ای ناوردا برای گرهها خلق کرده‌ام که به احتمال زیاد، یا دقیقاً شکل جدیدی از همان چند جمله‌ای الکساندر است ـ که در این صورت وجود این ارتباط به‌خودی خود برای مکانیک آماری اهمیت فوق‌العاده‌ای داشت ـ و یا اینکه چندجمله‌ای جدیدی است ـ که این هم پیشرفتی غیرمنتظره در نظریهٔ گرهها بود. اتفاق نادری بود و در هر حال چیزی از دست نمی‌رفت.

معلوم شد که شق دوم درست است. این ناوردای جدید پیوندها را $V(t)$ نام نهادم و به‌زودی معلوم شد که این ناوردا شباهتهایی سطحی به چندجمله‌ای الکساندر دارد. هم $V(t)$ و هم $\Delta(t)$ را می‌توان با استفاده از رابطهٔ کلاف، که جان هورتن کانوی ریاضیدان انگلیسی آن را ابداع کرده، محاسبه کرد [به تابلو صفحهٔ بعد نگاه کنید.]

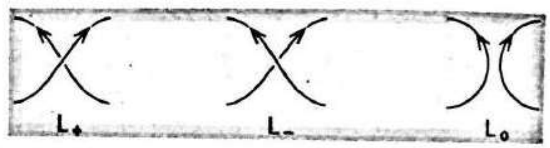
شباهت بین $V(t)$ و $\Delta(t)$ عده‌ای را ترغیب کرد چندجمله‌ای دو متغیره‌ای ابداع کنند که اکنون هامفلی (HOMFLY) نامیده می‌شود (این کلمه از حروف اول اسم شش نفر از هشت نفری که آن را کشف کرده‌اند تشکیل شده است)، و اطلاعات موجود در V و Δ را با مقداری اطلاعات اضافی شامل می‌شود. ولی شباهت بین Δ و V در اینجا به آخر می‌رسد. همهٔ تلاشهایی که به‌عمل آمده تا V را در همان چارچوب توپولوژیک مربوط به Δ تعبیر کنند، با شکست مواجه شده است. علاوه بر این، هنوز معلوم نیست که آیا گرهی غیر بدیهی وجود دارد که Δی آن همان Δی یک طوقهٔ گره نخورده باشد یا نه. در جهت مقابل، در سال ۱۹۳۴ گرههایی کشف شدند که چندجمله‌ای الکساندر آنها (مانند چندجمله‌ای الکساندر یک طوقهٔ ساده) مساوی ۱ است.

محاسبهٔ ناورداهای گره

ناورداهای گره عبارتهایی ریاضی هستند که بعضی از خصوصیات گرهها را توصیف می‌کنند. نام ناوردا [نامتغیر] به این دلیل به آنها اطلاق می‌شود که با کشیدن، فشردن و یا پیچاندن گره تحت بررسی، تغییری در آنها حاصل نمی‌شود. اما راه رسیدن از یک طوقهٔ نخ به معادله‌ای بر حسب توانهای t، راهی پر پیچ و خم است. چگونه می‌توان ناوردایی مانند چندجمله‌ای الکساندر یا جونز از یک گره داده شده را به‌دست آورد؟ ساده‌ترین روش، استفاده از رابطهٔ کلاف است که ریاضیدان انگلیسی جان هورتن کانوی آن را ابداع کرده است. (کانوی در زمان دانش‌آموزی سعی داشت یک برنامهٔ کامپیوتری برای محاسبهٔ چندجمله‌ای الکساندر بنویسد، اما پی برد که رابطهٔ کلاف در این مورد آنچنان کاراست که نیازی به چنین برنامه‌ای ندارد.) تکنیک دیگر، استفاده از «مدل حالتها»ی کاوفمن (Kauffman) است که به‌خاطر ظرافتش و به‌دلیل اینکه مقدمات ارتباط با مکانیک آماری را در خود دارد، شایان توجه است.

رابطهٔ کلاف

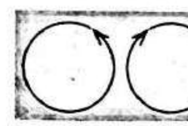
رابطهٔ کلاف با سه پیوند جهت‌دار (ساختارهای گره‌وار که می‌توانند شامل بیش از یک طوقه باشند) آغاز می‌شود که بجز در ناحیهٔ یک تقاطع، با هم یکسان هستند.



ولی در آن نقطهٔ تقاطع، پیوندها مطابق شکل فوق با هم تفاوت دارند. رابطهٔ کلاف حاکی است که

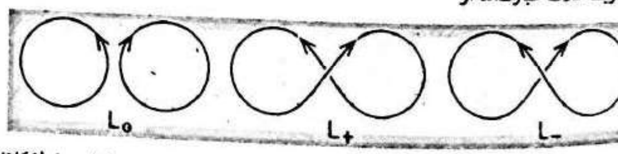
$$(1/t)V_{L+} - tV_{L-} = (\sqrt{t} - 1/\sqrt{t})V_{L_0}.$$

به‌علاوه، V و Δی یک طوقهٔ گره نخورده به ۱ تبدیل می‌شوند. این دو واقعیت، محاسبهٔ این دو ناوردا را برای هر پیوندی میسر می‌گرداند.



ساده‌ترین محاسبهٔ نابدیهی، Vی دوطوقهٔ گره نخورده است

این پیوند تنها دارای یک ناحیه است که تقاطع در آنجا امکانپذیر است، و سه پیوند متناظر در رابطهٔ کلاف عبارت‌اند از



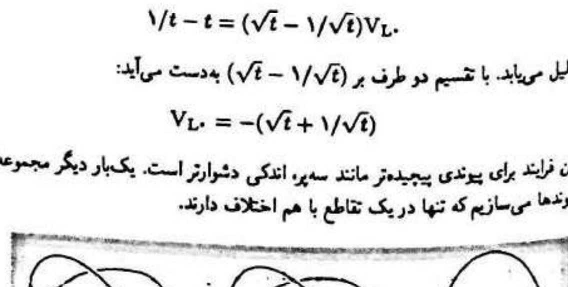
$L+$ و $L-$ هر دو گره نخورده‌اند، پس چندجمله‌ایهای آنها برابر ۱ هستند. بنابراین، رابطهٔ کلاف به

$$1/t - t = (\sqrt{t} - 1/\sqrt{t})V_{L_0}$$

تقلیل می‌یابد. با تقسیم دو طرف بر $(\sqrt{t} - 1/\sqrt{t})$ به‌دست می‌آید:

$$V_{L_0} = -(\sqrt{t} + 1/\sqrt{t})$$

این فرایند برای پیوندی پیچیده‌تر مانند سه‌پر، اندکی دشوارتر است. یک‌بار دیگر مجموعه‌ای از پیوندها می‌سازیم که تنها در یک تقاطع با هم اختلاف دارند.

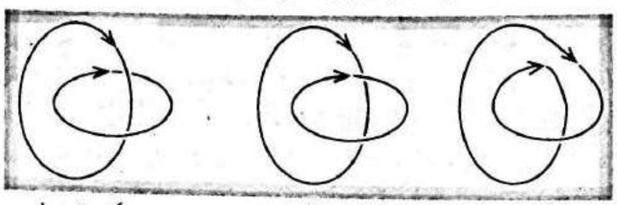


یک پیوند هوپف　　گره‌نخورده　　سه‌پر

رابطهٔ کلاف، V_L را برحسب V_H به‌دست می‌دهد:

$$(1/t)V_L - t = (\sqrt{t} - 1/\sqrt{t})V_H$$

برای محاسبهٔ V_H مجموعهٔ دیگری از پیوندها می‌سازیم:



گره‌نخورده　　دو طوقه　　یک پیوند هوپف

بابه‌کار بستن رابطهٔ کلاف در مورد این مجموعه به‌دست می‌آوریم

$$(1/t)V_H + t(\sqrt{t} + 1/\sqrt{t}) = (\sqrt{t} - 1/\sqrt{t})$$

و سرانجام

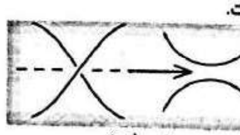
$$V_H = -\sqrt{t}(1 + t^2)$$

با جایگذاری این مقدار در رابطهٔ کلاف مربوط به سه‌پر خواهیم داشت

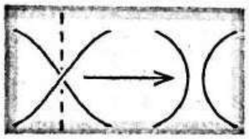
$$V_L = t + t^3 - t^4$$

مدل حالتها

در مدل حالتهای کاوفمن، همهٔ تقاطعهای یک پیوند حذف می‌شوند و دایره‌هایی ناهمبند جانشین پیوند می‌گردند. هر تقاطعی در یکی از دو حالت‌ممکن قرار دارد که از روی آن معلوم می‌شود چگونه باید حذف شود. هر ترکیب ممکن از حالتهای تقاطع، مشخص‌کنندهٔ حالتی از کل پیوند است.



حالت A^{-1}



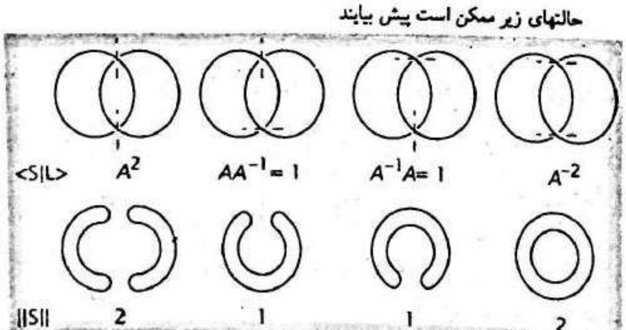
حالت A

کاوفمن سپس «چندجمله‌ای کروشه» را برای یک پیوند به‌عنوان مجموعی روی همهٔ حالتهای پیوند تعریف می‌کند

$$< L > = \sum_{S} < S|L > (-A^2 - A^{-2})^{\|S\|-1}$$

$< S|L >$ نشان‌دهندهٔ حاصلضرب همهٔ Aها و $1/A$ در نقاط تقاطع است و $\|S\|$ تعداد دایره‌های موجود در نمودار حاصل است.

برای مثال، چندجمله‌ای کروشهٔ پیوند هوپف، $(-A^4 - A^{-4})$ است. حالتهای زیر ممکن است پیش بیایند



$$A^2(-A^2 - A^{-2}) + 1 + 1 + A^{-2}(-A^2 - A^{-2}) = -A^4 - A^{-4}$$

برای به‌دست آوردن $V(t)$ از چندجمله‌ای کروشه، قرار می‌دهیم $t = A^4$، و چندجمله‌ای کروشه را در توان مناسبی از A ضرب می‌کنیم:

$$-A^4 - A^{-4} = A^{-6}(-A^2(1 + A^8)) = A^{-6}(-\sqrt{t}(1 + t^2)) = A^{-6}V_H(t)$$

تا اینجا به‌نظر می‌رسد هیچ اشاره‌ای به اینکه نظریهٔ گرهها و مکانیک آماری چگونه ممکن است به‌هم مربوط شوند نشده است. این ارتباط، ارتباطی سطحی نیست و ابتدا لازم است توضیحاتی در بارهٔ اینکه مکانیک آماری چیست و به‌چه‌کار می‌آید، داده شود. به این منظور هم باید از مکانیک کلاسیک شروع کنیم.

در مکانیک کلاسیک، وضعیت سیستمی از ذرات را می‌توان با تعیین مکان و اندازهٔ حرکت هر یک از ذرات در یک زمان معین، مشخص کرد. آنگاه تحولات آتی سیستم به‌طورکامل توسط قوانین فیزیکی تعیین می‌شود. اما چون مثلاً یک گرم گاز هیدروژن حدوداً شامل 3×10^{23} مولکول است، کوشش برای تعیین مکان و اندازهٔ حرکت همهٔ ذرات گازکار نامعقولی است، به‌علاوه، تغییری که در اثر حذف تعداد کمی از مولکولها در سیستم پدید می‌آید برای ناظری که به کل سیستم نظر دارد، کاملاً قابل صرفنظرکردن است.

تنها کمیتهایی که در مکانیک آماری مورد نظرند، آنهایی هستند که نسبت به تغییرات میکروسکوپی حساس نیستند مانند انرژی متوسط (دمای) توده‌ای از مولکولها. اگر سیستم بزرگی را در نظر بگیریم که برای ساخته شدن آن، اتمها یکی‌یکی روی‌هم گذاشته شده باشند، وقتی اندازهٔ سیستم به بینهایت میل کند، این کمیتها حد معینی خواهند داشت.

ولی بررسی رفتار انبوهه‌ها نیز معماهایی به‌وجود می‌آورد. یکی از آشکارترین معماها، بازگشت ناپذیری است. قوانین حرکت در صورت وارونه شدن جهت زمان تغییر نمی‌کنند. به‌عنوان مثال، برخورد الاستیک یک توپ به یک مانع، خواه زمان به جلو برود یا به عقب، یکسان به‌نظر می‌رسد. اکنون سیستمی از توپها را در نظر بگیرید که روی میز مستطیل شکل بدون اصطکاکی حرکت می‌کنند و دیواره‌ای که در وسط میز قرار دارد حرکتشان را محدود می‌کند. اگر دیوار برداشته شود، توپها به‌سرعت روی تمام میز پخش می‌شوند و هرگز توطئه‌ای نخواهند چید که به نیمه‌ای که حرکت را از آن شروع کرده‌اند برگردند. از این حقیقت ساده چنین بر می‌آید که سیستمی که شامل تعداد زیادی ذره است، به زمان، جهت معینی می‌دهد.

واقعیت غیرمنتظرهٔ دیگر در مورد سیستمهای بزرگ، گذارهای فاز است. یخ ذوب می‌شود و آب می‌جوشد. کمیتهایی مانند فشارکه برای سیستمهای کوچک می‌توان آنها را به‌عنوان توابعی هموار از پارامترها تعریف کرد، جهشهایی خودبه‌خودی بروز می‌دهند. کافی است سیستمهایی را که از ذرات زیادی تشکیل شده‌اند در نظر بگیریم تا این توابع هموار، ناپیوسته باشند.

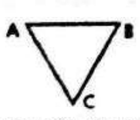
گذارهای فاز، رفتارکیفی جالبی بروز می‌دهند و به این جهت فیزیکدانها برای درک آنها مدلهایی یعنی سیستمهایی که به‌طور مجرد تعریف می‌شوند، ابداع کرده‌اند. برای این مدلها، کمیتهای ماکروسکوپی مانند فشار یا ظرفیت گرمایی را می‌توان به‌عنوان توابعی از پارامترهایی مانند دما به‌طور صریح محاسبه کرد.

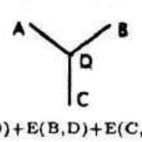
ارتباط نظریهٔ گرهها و مکانیک آماری

برای یافتن ارتباط بین این دو حوزهٔ ظاهراً نامرتبط ـ که یکی با انبوهه‌های بزرگی از ذرات که رفتار انفرادی آنها بسیار ساده است سروکار دارد و دیگری عمدتاً با سیستمهای کوچکی که خصوصیات ظریفی را به نمایش می‌گذارند ـ بهتر است از سمت مکانیک آماری آغاز کنیم. فیزیکدانان برای شبیه‌سازی پدیده‌هایی طبیعی مانند ذوب شدن و جوشیدن به مدلهای اسپین روی آورده‌اند. این مدلها، انبوهه‌های ساده شده‌ای هستند که بر شبکه‌هایی نقاط تعریف می‌شوند. هر نقطه، «اسپین» خاصی دارد و با نزدیکترین همسایه‌اش، مطابق تابع انرژیی که به آن دو اسپین بستگی دارد، برهمکنش می‌کند. یک «تابع افراز» مدل عبارت است از

$$\sum_{\text{حالتها}} e^{-E(\text{حالت})/kT} \quad (k \text{ ثابت بولتسمان است})$$

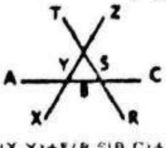
رابطهٔ ستاره‌ـمثلث که تنها برای انواع خاصی از مدلهای اسپین برقرار است (از جمله مدل ایزینگ و مدل ظروف Q حالته)، حاکی است که توابع افراز مدلهای اسپینی که روی دو گراف متعارف زیر تعریف می‌شوند، با هم متناسب‌اند.

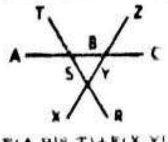




$$e^{-(E(A,B)+E(A,C)+E(B,C))/kT} = R \sum_{D} e^{-(E(A,D)+E(B,D)+E(C,D))/kT}$$

این موضوع در مورد مدلهای رأسی نیز درست است. در این مدلها، اسپینهایی به هر یال یک گراف تخصیص داده می‌شوند و انرژی برحسب چهار اسپینی که در یک رأس به‌هم می‌رسند محاسبه می‌گردد. رابطهٔ ستاره‌ـمثلث برای یک مدل رأسی به‌وسیلهٔ معادلهٔ یانگ‌ـباکستر بیان می‌شود.





$$\sum_{BSY} e^{-\left(\frac{E(A,B|X,Y)+E(R,S|B,C)+E(Y,Z|S,T)}{kT}\right)} = \sum_{BSY} e^{-\left(\frac{E(A,B|S,T)+E(X,Y|R,S)+E(B,C|Y,Z)}{kT}\right)}$$

حتی در حالتهای ساده، محاسبهٔ کمیتهای ماکروسکوپی بسیار دشوار است. بنابراین در مدلها از انطباق جزئیات با واقعیت صرفنظر می‌شود. ساده‌ترین مدل، مدل ایزینگ است که در حالت دوبعدی قابل حل است و شامل سیستمی از «اسپینها»ست که طبق الگوی منظمی آرایش یافته‌اند. (اسپینها اساساً کمیتهای ریاضی خالصی هستند و لزوماً معنیِ فیزیکیِ ذاتی ندارند). هراسپینی فقط با نزدیکترین همسایگانش برهمکنش دارد. یک «حالتِ» سیستم با دادن مقدار ۱+ یا ۱− به هراسپین تعریف می‌شود. انرژی یک حالت به‌عنوان مجموع انرژیهای حاصل از برهمکنشهای بین نزدیکترین همسایگان تعریف می‌شود.

بسیاری از کمیتهای جالب مربوط به سیستمهای بزرگ را می‌توان از آنچه تابع افراز، Z، نامیده می‌شود، به‌دست آورد. تابع افراز به‌صورت مجموع عبارتهایی به شکل e^x که x منهای انرژی حالت است، برای کلیهٔ حالتهای ممکن تعریف می‌شود. مدل ایزینگ می‌تواند تعداد بسیار زیادی «حالت» داشته باشد و بنابراین، محاسبهٔ چنین مجموعی سرچشمهٔ مشکلاتی است که در هنگام حل چنین مدلی پیش می‌آیند. حتی محاسبات کامپیوتری هم در محدودهٔ شبکه‌های کوچک کارایی دارند. باوجوداین، تکنیکهای ریاضی جالب و متعددی در این زمینه ابداع شده‌اند. ریاضیدان نروژی لارس اُنساگر (Onsager) در سال ۱۹۴۴ مدل ایزینگ با شبکهٔ مربعی دوبعدی را حل کرد. فرمول راهگشای او نشان دهندهٔ وجود یک انتقال فاز در مدل بود.

یکی از نتایج مهم کارهای اُنساگر به نام رابطهٔ ستاره‌ـمثلث معروف است.

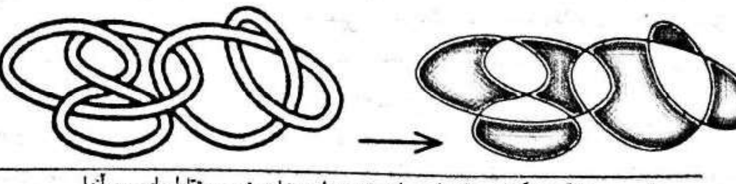
برای یک مدل ایزینگ که برروی یک زوج گراف خاص تعریف شده باشد، رابطهٔ ستاره‌ـمثلث بیانگر این است که اگر مقادیر اسپینهای رئوس گراف ثابت باشند، توابع افراز تنها باید در یک ضریب تناسب با هم اختلاف داشته باشند. [به تابلو صفحهٔ قبل نگاه کنید]. نام رابطهٔ مزبور از این واقعیت گرفته شده که یکی از دو گراف به شکل مثلث و دیگری به شکل ستاره است.

رادنی باکستر از دانشگاه ملی استرالیا جوابی برای مدل ایزینگ به‌دست آورده است که کاملاً بر نتایج این رابطه استوار است. یک خصوصیتِ بسیار خوبِ روش باکستر، قابلیت تعمیم آن است. با مجاز دانستن مقادیر دیگری غیر از ۱+ یا ۱− برای اسپینهای هر «مکان» می‌توان مدل ایزینگ را تعمیم داد. چنین مدلی را یک مدل اسپین می‌نامند و به‌عنوان مجموعهٔ انرژیهای مربوط به برهمکنشهای بین مکانهای همسایه، برای همهٔ مقادیر ممکن اسپینها، تعریف می‌کنند.

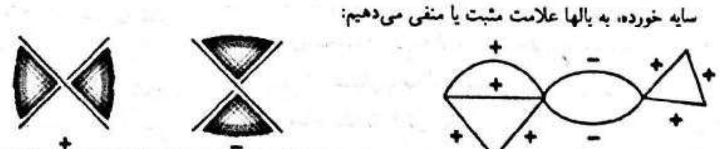
در حالت کلی، مدلهای اسپین در رابطهٔ ستاره‌ـمثلث صدق نمی‌کنند. برای به‌کارگرفتن روش باکستر باید مجموعه‌هایی از انرژیهای مربوط به برهمکنشها یافت که در معادلات ستاره‌ـمثلث صدق کنند و سپس مدل تعریف شده توسط آن مجموعه‌های انرژی را حل کرد. ساده‌ترین جواب، مدل موسوم به «ظروف Q حالتهٔ خود دوگان» است. در این مدل در هر مکان، Q اسپین مجاز شمرده می‌شود (به‌جای دو حالت مجاز در مدل ایزینگ) و همسایه‌ها فقط در صورتی که دارای اسپینهای مشابه باشند برهمکنش می‌کنند (این مدل برای اولین بار به روشی دیگر به‌وسیلهٔ نویل تمپرلی (Temperley) در

از گرهها به گرافها

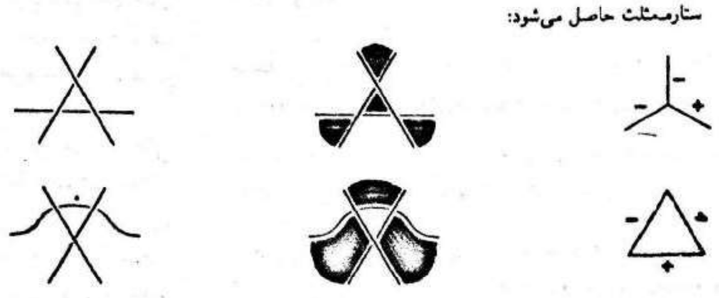
برای رسیدن از مدلهای اسپین و مکانیک آماری به نظریهٔ گرهها، لازم است گرهها را به گراف تبدیل کنیم. ابتدا گره (یا پیوند) را مانند یک صفحهٔ شطرنج سایه می‌زنیم.



برای به‌دست آوردن گراف، خانه‌های سایه خورده را به‌عنوان رئوس و تقاطعهای بین آنها را به‌عنوان یالهای گراف در نظر می‌گیریم. سپس برحسب جهت هر تقاطع نسبت به خانه‌های سایه خورده، به یالها علامت مثبت یا منفی می‌دهیم:



حال با انجام دادن یک حرکت راید مایستر نوع ۳ در روی گراف گره، بلافاصله رابطهٔ ستاره‌ـمثلث حاصل می‌شود:



زمانی که در دانشگاه سوانسی‌ـولز (Swansea-Wales) بود و الیوت لیب (Lieb) از دانشگاه پرینستن حل شد).

چه رابطه‌ای بین نظریهٔ گرهها و مدلهای مکانیک آماری می‌تواند وجود داشته باشد؟ اولین گام در راه ایجاد ارتباط این است که نواحی یک «نمودار پیوند» (تصویر دوبعدی گره) را مانند صفحهٔ شطرنج سایه بزنیم. حال اگر نواحی سایه‌خورده را به‌عنوان رأس و نقاط تقاطع را به‌عنوان یال در نظر بگیریم، یک گراف به‌دست می‌آید. اکنون می‌توان به یالها با توجه به جهت نسبی تقاطعها در طرح شطرنجی، علامت جبری نسبت داد [تابلو صفحه قبل، این روند را به‌طور کامل نشان می‌دهد]. با اِعمال یک حرکت راید مایستر نوع ۳ روی نمودار، فوراً رابطهٔ ستاره‌ـمثلث تولید می‌شود!

حرکتی که در گره تغییری ایجاد نمی‌کند، (به‌عنوان مثال) تابع افرازِ مدل ایزینگِ حاصل از نمودار گره را نیز اساساً تغییر نمی‌دهد. با توجه به این امر کاملاً طبیعی است که تابعهای افراز مدلهای اسپین تعریف شده بر گرافِ حاصل از فرایند فوق را بیازماییم تا معلوم شود که آنها ناورداهای پیوند هستند یا نه.

تابع افراز فقط به مجموعی که روی همهٔ حالتهای تابع انرژی مدل اسپین محاسبه می‌گردد، بستگی دارد. یعنی هر حالت، اسپینهای همهٔ رأسهای گراف و در نتیجه انرژی برهمکنشهای بین آنها را تعیین می‌کند. برای محاسبهٔ تابع افراز به هر یال، مقدار e^{x} را نسبت می‌دهیم که x انرژی برهمکنش بین دو رأس یال است. سپس این فرایند برای همهٔ حالتهای ممکن تکرار می‌شود. (برای به‌حساب آوردن علامت تفاضلها باید دو تابع انرژی برای برهمکنش بین رئوس مجاور فرض کنیم، یکی مثبت و دیگری منفی).

حال سؤال این است که دو تابع انرژی در چه شرایطی باید صدق کنند تا تابع افراز، یک ناوردای پیوند باشد. (این بدان معنی است که مقدار تابع افراز نباید در صورتِ اِعمال یک حرکت راید مایستر به نمودار مربوطه تغییر کند). بهترین پاسخ با مراجعه به مکانیک آماری به‌دست می‌آید: تابعهای انرژیِ مدلهایی که در رابطهٔ ستاره‌ـمثلث (و دیگر روابط متناظر با سایر حرکات راید مایستر) صدق می‌کنند، توابع افرازی به‌دست می‌دهند که ناورداهای پیوند هستند. مثلاً مدل ایزینگ ناوردایی به‌دست می‌دهد که متخصصان نظریهٔ گرهها آن را به نام ناوردای آرف (Arf) یا کرور (Kervaire) می‌شناسند.

مهمتر اینکه مدل ظروف Q حالته به ازای هر Q (یعنی تعداد اسپینهای مجاز) یک ناوردا به‌دست می‌دهد. در واقع، این همان چندجمله‌ای $V(t)$ است. Q و t با رابطهٔ $Q = ۲ + t + t^{-۱}$ به‌هم مربوط‌اند (درستی این رابطه با استفاده از رابطهٔ کلاف به‌راحتی قابل تحقیق است).

شگرد استفاده از طرح شطرنجی در واقع ارتباطی بین مکانیک آماری و نظریهٔ گرهها برقرارکرده است ولی این‌کار را به شیوه‌ای عجیب و نامأنوس انجام داده است. رابطهٔ ستاره‌ـمثلث در مکانیک آماری به‌عنوان روشی برای حل کردن مدلها و در نظریهٔ گرهها به‌عنوان ابزاری ضروری برای تولید ناورداهای توپولوژیک مطرح شد. اگر ارتباط حاصل بین مکانیک آماری و نظریهٔ گرهها فراگیر نبود، ممکن بود این دوکاربرد کاملاً نامرتبط به‌نظر برسند و ارتباط دو رشته، ساختگی جلوه کند.

گذشته از مدلهای ایزینگ و ظروف، سایر مدلهای اسپین هم ناورداهایی برای گرهها به‌دست می‌دهند که مورد استفادهٔ ریاضیدانان هستند. به‌علاوه، سایر انواع مدلها از نظر تولید ناورداهای گره قویترند؛ مثلاً در مدلهای رأسی، اسپینها بر یالها قرار می‌گیرند و انرژیها از رئوس می‌آیند. می‌توان با استفاده از مدلهای رأسی و گروههایی که نام مناسب گروههای کوانتومی را برخود دارند (سیستمهایی با تقارنهای پیچیده‌تر از تقارنهای هندسیِ فضای معمولی)، انبوهی از ناورداهای چندجمله‌ای ساخت که برای تعیین کامل چندجمله‌ای دومتغیرهٔ هامفلی و چندجمله‌ای کاوفمن ـ که یک چندجمله‌ای دومتغیرهٔ دیگر است ـ کفایت می‌کنند.

پس با وجود اسرارآمیز بودنِ ارتباط بین نظریهٔ گرهها و مکانیک آماری، شواهد قوی برای این ارتباط موجود است. بیشترین امید برای درک بهتر این ارتباط معطوف به نظریهٔ میدان است. این نظریه، نگرشی است به جهان، که در آن هر نقطه‌ای از فضا حامل متغیری است (مثلاً در یک سیال متحرک، سرعت سیال میدانی است با یک بردار در هر نقطه، که سرعت سیال در آن نقطه را مشخص می‌کند).

رویکردی پربار به نظریهٔ میدان، ساختن میدان به‌عنوان حد میدانهای تعریف شده بر یک شبکهٔ گسسته است که فاصلهٔ نقاط مجاور آن به سمت صفر میل داده می‌شود. به این طریق مدلهای مکانیک آماری مانند مدل ایزینگ در نظریهٔ میدان هم کاربرد پیدا می‌کنند. در واقع با نگاهی دقیق به محتوای ریاضی دو موضوع معلوم می‌شود که حد پیوستاری مدل ایزینگ دوبعدی همان نظریهٔ میدان کوانتومی یک بعدی است (نظریهٔ میدان کوانتومی، نظریهٔ میدانی است که متغیرهای آن، عملگرهایی روی حالتهای کوانتومی‌اند نه روی حالتها کلاسیک).

عده‌ای از ریاضیدانان و فیزیکدانان کوشیده‌اند جنبهٔ نظریهٔ گرهیِ مدل مکانیک آماری را با بررسی رفتار آن در حد پیوستاری تبیین کنند. هر چند امید ایشان برای یافتن جواب هنوز براورده نشده است، اما ویتن نشان داده که زبان نظریهٔ میدان کوانتومی دست‌کم چارچوبی برای تعریف آن‌دسته از ناورداهای گره که در این مقاله توصیف شدند، فراهم می‌آورد.

نکتهٔ مهم این است که از تحقیقات ویتن معلوم می‌شود ناورداها باید در هر فضای سه‌بعدی وجود داشته باشند. علاوه بر فضای سه‌بعدی معمولی که در آن زندگی می‌کنیم، فضاهای سه‌بعدیِ بسیاری وجود دارند که خمینه‌های سه‌بعدی نامیده می‌شوند [نگاه کنید به ۲]. به‌عنوان مثال برای ساختن چنبرهٔ سه‌بعدی، مکعبی را می‌کشیم و وجوه بالا و پایین، چپ و راست، و جلو و عقب آن را چنان «به‌هم می‌چسبانیم» که اگر ذره‌ای از سمت چپ مکعب خارج شود، در همان حال از سمت راست به داخل آن برگردد (این‌کار را در فضای سه‌بعدی نمی‌توان عملاً انجام داد).

نظریهٔ ویتن در واقع بیانگر این مطلب است که ناورداهای پیوند در یک خمینهٔ سه‌بعدی دلخواه ـ حتی برای پیوندی که هیچ مولفه‌ای ندارد ـ وجود دارند. این بدان معناست که ناورداها نه تنها در بارهٔ پیوندها بلکه در بارهٔ خود خمینه‌های سه‌بعدی نیز اطلاعاتی توپولوژیک به‌دست می‌دهند. ریاضیدانان و فیزیکدانانِ بسیاری فعالانه مشغول بررسی این دستاورد جدیدند که ممکن است باعث ارتباط دادن نظریهٔ گرهها با زمینه‌های علمی دیگری شود که حتی بیشتر از مکانیک آماری در شش سال قبل، نامرتبط با نظریهٔ گرهها به‌نظر می‌رسند.

مراجع

1. Lee Neuwirth, "The theory of knots," *Scientific American*, June 1979.

2. Jeffrey R. Weeks AND William P. Thurston, "The Mathematics of Three-Dimensional Manifolds", *Scientific American*, July, 1984.

* * * * *

• Vaughan F. R. Jones, "Knot theory and statistical mechanics", *Scientific American*, November 1990.

★ وان جونز، دانشگاه کالیفرنیا در برکلی آمریکا