

فرضیه پیوستار، بخش I

هیوودین*

ترجمه نفیسه کسروی

مقدمه

به احتمال قوی مشهورترین مسأله به احاطه صوری حل ناپذیر ریاضیات مسأله اول هیلبرت است:

فرضیه پیوستار کانتور: فرض کنید که $X \subseteq \mathbb{R}$ مجموعه‌ای ناشمارا باشد، در این صورت یک نگاشت دوسویی $\pi: X \rightarrow \mathbb{R}$ وجود دارد، این مسأله به فهرست مداوماً بزرگ‌شونده‌ای از مسائل تعلق دارد که معلوم شده‌اند که بر اساس اصول موضوع (معمول) نگره مجموعه‌ها حل ناپذیرند. با این حال، بعضی از این مسائل تا اکنون حل شده‌اند. اما این حرف واقعاً به چه معنا است؟ آیا فرضیه پیوستار را هم می‌شد به نحو مشابهی حل کرد؟ این سؤالات موضوع این مقاله‌اند، و بحث در موردشان شامل عناصری از بسیاری از حیطه‌های پژوهشهای فعلی در نگره مجموعه‌ها خواهد بود. چشم‌گیرتر از همه، هم اصول موضوع اعداد اصلی بزرگ و هم اصول موضوع ذهنی نقشهای مهمی ایفا خواهند کرد. در مورد مسأله فرضیه پیوستار، توجه به رهیافت خاصی معطوف خواهد بود که طی سالهای اخیر پرورانده شده است. این را نباید به این صورت غلط و چنان این ادعا تعبیر کرد که این یگانه رهیافت است یا حتی بهترین رهیافت است. با این حال، این مطلب نشان می‌دهد که مسیرهای گوناگون کاملاً متفاوت پژوهش در نگره نون مجموعه‌ها می‌توانند، در مورد سؤالات بسیار پایه‌ای همچون فرضیه پیوستار، بصیرتهای تازه بالقوه بنیادینی ایجاد کنند.

اصول موضوع عموماً پذیرفته‌شده نگره مجموعه‌ها — که من آنها را انتخاب قرن بیستم خواهم خواند — عبارت‌اند از اصول موضوع تسرملو-فرنکل به همراه اصل موضوع انتخاب ZFC. برای بحثی در مورد این اصول موضوع و موضوعات مرتبط با آنها [Kanamori, 1994] را ببینید.

استقلال یک گزاره ϕ از اصول موضوع نگره مجموعه‌ها عبارت است از این حکم حسابی: ZFC ϕ را ثابت نمی‌کند، و ZFC $\neg \phi$ را ثابت نمی‌کند.

البته اگر ZFC سازگار باشد آنگاه ZFC هر چیزی را اثبات می‌کند، پس استقلال فقط در صورتی می‌تواند برقرار شود که دست‌کم فرض کنیم که ZFC سازگار است. چنان که خواهیم دید، گاه حتی فرضهای قویتری هم لازم‌اند.

اولین نتیجه در مورد فرضیه پیوستار، CH، را گودل به دست آورد.

قضیه (گودل). فرض کنید ZFC سازگار باشد، در این صورت ZFC + CH هم‌چنین است. $\square$

عصر نون نگره مجموعه‌ها با کشف روش قهقش^۱ توسط کوهن شروع شد که این روش جدید را به کار بست تا نشان دهد که:

قضیه (کوهن). فرض کنید ZFC سازگار باشد، در این صورت "CH غلط است" ZFC + هم‌چنین است. $\square$

با مرور بعضی مفاهیم پایه‌ای منطق ریاضی، به اختصار در مورد روش‌شناسی اثبات اینکه گزاره‌ای حل ناپذیر است بحث می‌کنم. مرسوم است که در درون نگره مجموعه‌ها کار شود، گرچه این قضایا را — که به نحوی بنیادی حسابی‌اند — نهایتاً می‌توان در نگره اعداد ثابت کرد.

($\in$, $\subseteq$) زبان صوری نگره مجموعه‌ها را نشان می‌دهد؛ این زبان گردایه‌ای شمارا از فرمول‌ها است. جمله‌ها آن فرمولهایی از ($\in$, $\subseteq$) هستند که در آنها هیچ مورد وقوعی از تغییری نیست که تحت یک سور نیامده باشد. هر دوی $\subseteq$ و $\in$ صرفاً نهادهایی از این زبان صوری‌اند بدون هیچ معنای پیشینی دیگری.

مفهوم ساختارهای این زبان را از طریق منطق مقدّماتی می‌شناسیم. هر ساختار این زبان یک جفت $M = (M, E)$ است، که در آن M مجموعه‌ای نا تهی است و $E \subseteq M \times M$ رابطای دوتایی روی مجموعه

1. forcing

تعریف کنید که $\sim$ از روی E تعریف شد. به استقراء ادامه دهید و دنباله‌های صعودی $\langle E_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ و $\langle \sim_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ را تعریف کنید. قرار دهید

$$\sim_{\infty} = \bigcup \{ \sim_n \mid n \in \mathbb{N} \},$$

و قرار دهید $E_{\infty} = \bigcup \{ E_n \mid n \in \mathbb{N} \}$. ساختار خارج قسمتی $(\mathbb{N} / \sim_{\infty}, E_{\infty} / \sim_{\infty})$ همه اصول موضوع ZFC غیر از اصل موضوع بینهایت را برآورده می‌کنند. اصل موضوع بینهایت نمی‌تواند برقرار باشد، چون به ازای هر $i \in \mathbb{N}$ مجموعه رده‌های هم‌ارزی $\{ [j]_{\sim_{\infty}} \mid (j, i) \in E_{\infty} \}$ متناهی است، چرا که مساوی مجموعه $\{ [j]_{\sim_{\infty}} \mid (j, i) \in E_i \}$ است، که به وضوح عدد اصلی‌اش حداکثر i است.

ساختن مدلهای جدید ZFC

آیا ZFC مدلی دارد؟ یک نتیجه قضیه دوم ناتمامیت گودل این است که اگر فقط با اصول موضوع ZFC کار کنیم نمی‌توانیم امیدوار باشیم که وجود مدلهای ZFC را ثابت کنیم. با این همه، هنوز می‌توانیم مسأله ساختن مدلهای جدیدی از ZFC را (که امیدواریم جالب هم باشند) از روی مدلهای مفروض ZFC، مطالعه کنیم.

گودل مسأله زیرساختار را در ۱۹۳۸ حل کرد: نشان داد که اگر $\langle M, E \rangle \models \text{ZFC}$ ، آنگاه یک $M^* \subseteq M$ وجود دارد که

$$\langle M^*, E \cap (M^* \times M^*) \rangle \models \text{ZFC} + \text{CH}.$$

بیش از ۲۵ سال بعد کوهن، که محققاً گالوی نگره مجموعه‌ها است، مسأله توسعه را حل کرد. ضعیف‌ترین صورت قضیه توسعه کوهن واقعاً به لحاظ صوری معادل است با بیانی از قضیه کوهن که در ابتدای این مقاله به دست داده شد. این صورت ضعیف صرفاً حکم می‌کند به اینکه اگر $\langle M, E \rangle \models \text{ZFC}$ ، آنگاه یک ساختار

$$\langle M^{**}, E^{**} \rangle \models \text{ZFC} + \text{"CH غلط است"}$$

وجود دارد که $M \subseteq M^{**}$ و $E = E^{**} \cap (M \times M)$. روش کوهن بسیار نیرومند از کار درآمده است: این روش و تعمیم‌هایش ابزارهای پایه‌ای اثبات استقلال‌اند. به علاوه، اساساً هیچ روش کارآمد دیگری برای ساختن توسعه‌هایی از مدلهای ZFC شناخته نشده است. یک نکته مهم آن است که نه روش توسعه کوهن و نه روش تحدید گودل هیچ یک بر احکام حسابی صادق در ساختارها تأثیر نمی‌گذارند، لذا شهود مربوط به یک مدل واقعی نگره اعداد بلامنازع می‌ماند.

به نظر می‌رسد که بیشتر ریاضیدانان واقعاً باور دارند که احکام حسابی یا درست‌اند یا غلط. تاکنون هیچ تعمیمی از روش کوهن کشف نشده که این نظر را زیر سؤال ببرد. اما این به این معنا نیست که چنین تعمیمی هرگز پیدا نخواهد شد.

تمامیت تجربی حساب، همراه با عدم تمامیت واضح نگره مجموعه‌ها باعث شده بعضی حدس بزنند که پدیده استقلال پدیده‌ای بنیادی است — علی‌الخصوص مسأله پیوستار ذاتاً مبهم است و راه‌حلی ندارد.

M است. اگر ϕ جمله‌ای در زبان $(\mathcal{L}, \hat{E})$ باشد، آنگاه ساختار M یک مدل ϕ است، و می‌نویسیم " $M \models \phi$ "، اگر این جمله وقتی به صورت حکمی درون ساختار $\langle M, E \rangle$ تعبیر شود درست باشد، که در اینجا نماد $\hat{E}$ با رابطه دوتایی E تعبیر می‌شود و $\hat{=}$ با تساوی روی M تعبیر می‌شود. البته می‌شد ساختارهایی به صورت $\langle M, E, \sim \rangle$ را هم در نظر گرفت که در آنها $\sim$ رابطه‌ای هم‌ارزی روی M است که در مقام تعبیر $\hat{=}$ منظور شده است، اما در این صورت می‌توان به ساختار خارج قسمتی $(M / \sim, E / \sim)$ رفت. پس با این تلاش برای کلیت حقیقتاً چیزی عاید نمی‌شود. هر نگره مجموعه‌ای از جمله‌ها است، و به ازای هر نگره مفروض T ، می‌نویسیم " $\langle M, E \rangle \models T$ " تا نشان دهیم که به ازای هر جمله $\phi \in T$ ، $\langle M, E \rangle \models \phi$.

ZFC نگره (نامتناهی) خاصی را نشان می‌دهد. هر مدل ZFC صرفاً ساختار $\langle M, E \rangle$ ای است که

$$\langle M, E \rangle \models \text{ZFC}.$$

این را می‌توان به شکلی کاملاً طبیعی بدون یاری گرفتن از منطق صوری تعریف کرد. مثلاً یکی از اصول موضوع ZFC اصل موضوع صدافی بودن است، که به لحاظ صوری به صورت

$$\forall x_1 \forall x_2 (x_1 \hat{=} x_2 \leftrightarrow \forall x_3 (x_3 \hat{E} x_1 \leftrightarrow x_3 \hat{E} x_2))$$

قابل بیان است و به لحاظ غیر صوری صرفاً این حکم است که دو مجموعه مساوی‌اند اگر اعضای واحدی داشته باشند. بدین ترتیب

$$\langle M, E \rangle \models \text{"اصل موضوع صدافی بودن"}$$

اگر و فقط اگر به ازای هر $a \in M$ و به ازای هر $b \in M$ ، اگر

$$\{c \in M \mid (c, a) \in E\} = \{c \in M \mid (c, b) \in E\}$$

آنگاه $a = b$.

بنابراین "اصل موضوع صدافی بودن" $\models (\mathbb{R}, <)$ ؛ اما اگر $E \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ را با

$$E = \{ (n, m) \mid p^{n+1} \mid m \text{ و } p^{n+1} \nmid m \}$$

تعریف کنیم آنگاه "اصل موضوع صدافی بودن" $\nmodels \langle \mathbb{N}, E \rangle$. با ادامه دادن و بررسی سایر اصول موضوع، به نحوی طبیعی می‌توان به مفهوم مدل ZFC دست یافت.

نسبتاً به سادگی می‌توان مدلی تعریف کرد که همه اصول ZFC غیر از اصل موضوع بسیار مهم بینهایت را برآورده کند. مثلاً فرض کنید E رابطه‌ای دوتایی را که هم‌اکنون مشخص شد نشان دهد، و یک رابطه هم‌ارزی $\sim$ را به این صورت تعریف کنید که $j \sim i$ اگر $\{k \mid (k, j) \in E\} = \{k \mid (k, i) \in E\}$. یک رابطه دوتایی E_1 را به این صورت تعریف کنید که $(i, k) \in E_1$ اگر به ازای یک $j \sim i$ ، $(j, k) \in E$ ، و $\sim$ را از روی E_1 به همان صورتی

اگر و فقط اگر به ازای هر $a \in X$ و $b \in X$ ، اگر $a \neq b$ ، آنگاه یا $a \in b$ یا $b \in a$. یک نتیجه اصول موضوع آن است که اگر $(L, <)$ مجموعه‌ای کاملاً مرتب باشد که خوش‌ترتیب است (هر زیرمجموعه نامتناهی L یک $<$ -کوچکترین عضو دارد)، آنگاه یک عدد ترتیبی X هست که ترتیب‌های کامل $(L, <)$ و $(X, \in)$ یکریخت‌اند. گردایه عددهای ترتیبی خوش‌ترتیب است، و این ترتیب دقیقاً ترتیبی است که از مقایسه مرتبه‌مجموعه‌های مجموعه‌های خوش‌ترتیب ناشی می‌شود.

سه عدد ترتیبی نخست عبارت‌اند از $\emptyset$ ، $\{\emptyset\}$ ، $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$. عددهای ترتیبی متناهی عددهای صحیح نامتناهی هستند؛ ω کوچکترین عدد ترتیبی نامتناهی را نشان می‌دهد، و ω_1 کوچکترین عدد ترتیبی نامتناهی را. سرانجام، عدد ترتیبی κ یک عدد اصلی است اگر به ازای هیچ عدد ترتیبی $\alpha < \kappa$ ای نگاشتی دوسویی بین κ و α نباشد. عددهای ترتیبی متناهی، و نیز ω و ω_1 ، عدد اصلی‌اند. این حکم که مجموعه X عدد اصلی $\aleph_1$ دارد عبارت از این حکم است که نگاشتی دوسویی بین X و ω_1 وجود دارد. مشابهاً، X عدد اصلی $2^{\aleph_1}$ ، یا c ، دارد اگر نگاشتی دوسویی بین X و $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ باشد، که $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ مجموعه توانی $\mathbb{N}$ است، یعنی مجموعه همه زیرمجموعه‌های $\mathbb{N}$. عددهای ترتیبی ارتفاع را در عالم مجموعه‌ها اندازه می‌گیرند. فرض کنید که M مجموعه‌ای متعدی باشد و $(M, \in) \models \text{ZFC}$. در این صورت نتیجه می‌شود که مجموعه

$$\{a \in M \mid (M, \in) \models \text{"یک عدد ترتیبی است"}\}$$

دقیقاً مجموعه عددهای ترتیبی α متعلق به M است. به علاوه، این مجموعه قطعه‌ای آغازین از عددهای ترتیبی است. بدین ترتیب ارتفاع M دقیقاً عدد ترتیبی $M \cap \text{Ord}$ است، که Ord رده همه عددهای ترتیبی را نشان می‌دهد.

تعریف. فرض کنید که κ یک عدد اصلی نامتناهی باشد. $H(\kappa)$ مجموعه همه مجموعه‌های X ای را نشان می‌دهد که بستار متعدی‌شان عدد اصلی کمتر از κ دارند.

هر مجموعه به ازای عددهای اصلی κ به اندازه کافی بزرگ به $H(\kappa)$ تعلق دارد. این، در بافت سایر اصول موضوع، معادل با اصل موضوع انتخاب است. پاسخ مسأله پیوستار در درک $H(\omega_2)$ قرار دارد، که ω_2 کوچکترین عدد اصلی بزرگتر از ω_1 است. این امر رهیافت فزاینده‌ای را پیش می‌نهد. سعی می‌کنیم که به ترتیب ساختارهای $H(\omega)$ ، $H(\omega_1)$ ، و سپس $H(\omega_2)$ را بفهمیم. کمی دقیق‌تر: در جست‌وجوی اصول موضوع مربوط به این ساختارها هستیم. چون فرضیه پیوستار در مورد ساختار $H(\omega_2)$ است، هر گردایه نسبتاً کاملی از اصول موضوع برای $H(\omega_2)$ فرضیه پیوستار را حل و فصل خواهد کرد. اولین این ساختارها، $H(\omega)$ ، ساختار آشنایی در ابانس مبدل است: $(\mathbb{N}, +, \cdot)$. در واقع، می‌توان نشان داد که ساختارهای $(H(\omega), \in)$ و $(\mathbb{N}/\sim_{\text{co}}, E_{\text{co}}/\sim_{\infty})$ یکریخت‌اند، که دومی در بحث بلافاصله قبل از بحث ساختن مدل‌های جدید ZFC تعریف شده است. بدین ترتیب نگره اعداد صرفاً نگره مجموعه‌ها است در حضور نقیض اصل موضوع بینهایت. ساختار بعدی، $H(\omega_1)$ ، هم ساختار آشنایی است. این ساختار اساساً همان ساختار $(\mathbb{N}, +, \cdot, \in)$ است، که ساختار استانده نگره مرتبه دوم اعداد است.

مطابق این نظر مسأله پیوستار سؤالی است که به‌نجوی بنیادی فاقد معنا است، مثل پرسیدن اینکه " π چه رنگی است؟"

حقیقت امر در کجا است؟ من با توصیف بعضی سؤالات کلاسیک، نگره مرتبه دوم اعداد — که عبارت باشد از نگره اعداد صحیح به اضافه همه مجموعه‌های متشکل از اعداد صحیح — شروع می‌کنم که در ZFC حل‌پذیر نیستند. در اینجا اعتقاد من آن است که راه‌حلی هست: اصول موضوعی برای نگره مرتبه دوم اعداد صحیح هستند که نگره‌ای فراهم می‌کنند که به اندازه نگره اعداد کانونیک است. این اصول موضوع نسبتاً جدید بصیرتهایی در مورد نگره مرتبه دوم اعداد به دست می‌دهند که حتی از آنچه ZFC به دست می‌دهد هم فراتر می‌روند.

آیا برای حل مسأله پیوستار می‌توان این اصول موضوع را به مجموعه‌های پیچیده‌تری گسترش داد؟ این سؤال در مرکز توجه بخش دوم این مقاله خواهد بود.

بعضی پیش‌نیازها

برای اهداف این مقاله مناسب است که در درون نگره مجموعه‌ها کار کنیم. این ممکن است در ابتدا به لحاظ مفهومی گیج‌کننده باشد، چرا که سعی خواهیم کرد با کار کردن در درون نگره مجموعه‌ها نگره مجموعه‌ها را تحلیل کنیم.

پس اجازه دهید فرض کنیم که عالم مجموعه‌ها وجود دارد و فرض کنیم که اصول موضوع احکام درستی درباره این عالم عرضه می‌کنند. در ابتدا فقط اصول موضوع ZFC را مفروض خواهیم گرفت. در نهایت بعضی اصول معمولی عددهای اصلی بزرگ را به این اصول موضوع اضافه خواهیم کرد. بحثی که انجام خواهد شد صرفاً به اشیاء این عالم مربوط می‌شوند.

تعریف. مجموعه X متعدی است اگر هر عضو X زیرمجموعه‌ای از X هم باشد. بستار متعدی هر مجموعه X عبارت است از

$$\cap \{Y \mid X \subseteq Y \text{ و } Y \text{ متعدی است}\}.$$

فرض کنید که (M, E) یک مدل ZFC باشد. در این صورت مدل (M, E) متعدی است اگر M متعدی باشد و

$$E = \{(a, b) \mid a \in b \text{ و } b \in M, a \in M\}$$

و لذا $\in$ با عضویت واقعی تعبیر شود. مدل‌های متعدی ZFC به طرز ویژه‌ای مطبوع‌اند، اما رسیدن به آنها حتی از مدل‌های داخواه هم سخت‌تر است. وجود یک مدل ZFC وجود یک مدل متعدی ZFC را نتیجه نمی‌دهد.

قضایای کوهن و گودل در مورد مدل‌های نگران‌کننده ZFC وقتی به بهترین صورت فهمیده می‌شوند که ساختار اولیه (M, E) متعدی و M شمارا باشد. در حالتی که (M, E) متعدی باشد، ساختار (M^*, E^*) ای که توسط روش ساخت گودل تولید می‌شود هم متعدی است. اگر (M, E) متعدی باشد و M شمارا باشد، آنگاه می‌توان، بدون کاستن از کلیت، فرض کرد که ساختارهای (M^{**}, E^{**}) ای که توسط روش کوهن تولید می‌شوند نیز متعدی‌اند.

عددهای ترتیبی آن مجموعه‌های X ای هستند که متعدی‌اند و با رابطه عضویت کاملاً مرتب شده‌اند. پس مجموعه متعدی X یک عدد ترتیبی است

تعریف (اوزین). مجموعه $X \subseteq \mathbb{R}^n$ یک مجموعه افکنشی است اگر به ازای عدد صحیح n این مجموعه را بتوان در تعداد متناهی مرحله، با اعمال عملگرهای پایه‌ای افکنش و متمم گرفتن، از زیرمجموعه بسته‌ای از $\mathbb{R}^{n+k}$ به دست آورد. $\square$

تذکر می‌دهم که چون داریم در فضاهای اقلیدسی کار می‌کنیم، عموماً رسیدن به چیز جالبی محتاج آن است که عملگرهای پایه‌ای مان را سه بار به کار بندیم. افکنش زیرمجموعه بسته‌ای از $\mathbb{R}^{n+2}$ زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}^{n+1}$ به دست می‌دهد که به سادگی دیده می‌شود که به صورت اجتماع شمارایی از مجموعه‌های بسته قابل بیان است. متمم گرفتن و افکنش دوباره ما را فراتر از مجموعه‌های بول و به مجموعه‌های فخطی می‌برد. به شکلی صورتی، مجموعه $X \subseteq \mathbb{R}^n$ مجموعه‌ای تحلیلی است اگر یک مجموعه بسته $C \subseteq \mathbb{R}^{n+2}$ وجود داشته باشد که X افکنش $\mathbb{R}^{n+1} \setminus Y$ باشد، که در آن Y افکنش C است.

چرا مجموعه‌های افکنشی را بررسی کنیم؟ پاسخ صرفاً آن است که ساختار $H(\omega_1)$ را می‌توان به صورت ساختار مجموعه‌های افکنشی تعبیر کرد. به شکلی صورتی، مجموعه‌های افکنشی متناظرند با آن مجموعه‌های $A \subseteq H(\omega_1)$ که به ازای آنها فرمول $\phi(x_1, x_2)$ از $\mathcal{L}(\equiv, \in)$ و یک عضو $a \in H(\omega_1)$ هست که

$$A = \{b \in H(\omega_1) \mid (H(\omega_1), \in) \models \phi[a, b]\}.$$

چنین مجموعه‌های A ای در $(H(\omega_1), \in)$ به وسیله پارامتر تعریف می‌شوند. این یک روش معمول منطق است: مطالعه یک ساختار از طریق مطالعه مجموعه‌ها و رابطه‌هایی که در آن ساختار می‌توان تعریف کرد.

اصل موضوع انتخاب وجود مجموعه‌های عجیب و غریب زیادی را الزام می‌کند. یک مثال معروف پارادوکس باناخ-تارسکی است: افزایشی متناهی از گوی واحد $\mathbb{R}^2$ به چند قطعه وجود دارد که از آنها می‌توان فقط با استفاده از حرکات صلب دو نسخه از گوی واحد ساخت. چنین افزایشی یک افزایش پارادوکسی است.

برای راه‌پردن بحثمان سؤال ذیل را در نظر بگیرید.

سؤال. آیا افزایش پارادوکسی‌ای از گوی واحد $\mathbb{R}^2$ به قطعاتی وجود دارد که هر یک مجموعه‌ای افکنشی باشد؟

هر زیرمجموعه تحلیلی $\mathbb{R}^n$ اندازه‌پذیر لبگ است؛ این را اولین بار اوزین در ۱۹۱۷ ثابت کرد. یک نتیجه این مطلب آن است که افزایش پارادوکسی‌ای از گوی واحد $\mathbb{R}^2$ به قطعاتی که هر یک در سطح تولید شده با مجموعه‌های تحلیلی باشد نمی‌تواند وجود داشته باشد. این به این علت است که هر افزایش پارادوکسی باید حاوی قطعاتی باشد که اندازه‌پذیر لبگ نباشد. البته سؤال هدایت‌کننده ما در مورد افزایش‌های پارادوکسی افکنشی حقیقتاً این سؤال بنیادی‌تر را پیش می‌نهد:

سؤال. آیا مجموعه‌های افکنشی اندازه‌پذیر لبگ اند؟

در دهه ۱۹۲۰ دیگر دشواری این سؤال آشکار شده بود:

البته نه $\langle N, +, \cdot, \in \rangle$ و نه $\langle P(N), N, +, \cdot, \in \rangle$ ساختاری برای زبان $\mathcal{L}(\equiv, \in)$ نیستند، بلکه هر یک به نحوی طبیعی ساختاری برای زبان صوری ویژه‌ای است که به سادگی تعریف می‌شود.

سؤالات طبیعی‌ای درباره $H(\omega_1)$ هستند که بر پایه ZFC حل‌پذیر نیستند. با این حال، اصول موضوعی برای $H(\omega_1)$ هستند که به وضوح صادق‌اند و از طریق فراهم کردن نگره‌ای که به اندازه نگره اعداد کانتینک است، این سؤالات را حل و فصل می‌کنند. اما صدق این اصول موضوع فقط دوازده کار بسیار زیاد است که آشکار می‌شود. در نظر من، یک جنبه برجسته این امر آن است این را مبرهن می‌کند که کشف صدق ریاضی کوشش کاملاً صوری‌ای نیست. بخش دوم این مقاله بر تلاش برای یافتن تعمیمی از این اصول موضوع برای $H(\omega_2)$ متمرکز خواهد بود. این آن جایی است که پاسخ به مسأله پیوستار در آن قرار دارد، چرا که فرضیه پیوستار به صورت گزاره‌ای درباره $H(\omega_2)$ قابل بیان است. پاسخ شگفت‌آور آن است که تعمیم‌هایی هستند اما هر تعمیمی که نگره‌ای به دست دهد که به مفهوم مشخص ویژه‌ای قویاً کانتینک باشد باید نتیجه دهد که CH غلط است.

در طی این بحث باید از این ادعا دفاع کنم که نه $\langle P(\mathbb{R}), \mathbb{R}, +, \cdot, \in \rangle$ ، که $\langle H(\omega_2), \in \rangle$ تعمیم بلاواسطه ساختار $\langle H(\omega_1), \in \rangle$ (یا، معادلاً تعمیم بلاواسطه $\langle P(N), N, +, \cdot, \in \rangle$) است. سنت بیشتر در این جهت بوده است که ساختار $\langle P(\mathbb{R}), \mathbb{R}, +, \cdot, \in \rangle$ ، که به نحو طبیعی توسط مجموعه توانی $\mathbb{R}$ به دست داده می‌شود، در سفر به ترامت‌ناهی در مقام توقف‌گاه بعدی نامی شود. روش به کار رفته برای تحلیل امکانات مختلف نگره‌های قویاً کانتینک برای $\langle H(\omega_2), \in \rangle$ عملاً نشان می‌دهد که برای $\langle P(\mathbb{R}), \mathbb{R}, +, \cdot, \in \rangle$ نگره قویاً کانتینکی نمی‌تواند در کار باشد. اگر CH برقرار باشد، آنگاه این دو ساختار $\langle H(\omega_2), \in \rangle$ و $\langle P(\mathbb{R}), \mathbb{R}, +, \cdot, \in \rangle$ ، در اساس ساختار واحدی‌اند (هر یک را می‌توان در دیگری تعبیر کرد)، درست همان‌طور که ساختارهای $\langle H(\omega_1), \in \rangle$ و $\langle P(N), N, +, \cdot, \in \rangle$ چنین‌اند. اگر CH برقرار نباشد، آنگاه این دو ساختار می‌توانند بسیار متفاوت باشند، که در این حال ساختار اول احتمالاً به نحوی بنیادی ساده‌تر از ساختار دومی است.

قدم اول، $H(\omega_1)$

این عملگرهای پایه‌ای برای زیرمجموعه‌های $\mathbb{R}^n$ را در نظر بگیرید؛ اینها مجموعه‌های افکنشی را از روی مجموعه‌های بسته تولید می‌کنند:

(افکنش) فرض کنید $X \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$. افکنش X به $\mathbb{R}^n$ تصویر

X تحت نگاشت افکنش

$$\pi : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

است که با $\pi(a_1, \dots, a_n, a_{n+1}) = (a_1, \dots, a_n)$ تعریف می‌شود.

(متممها) فرض کنید $X \subseteq \mathbb{R}^n$. متمم X عبارت است از مجموعه

$$X^* = \{(a_1, \dots, a_n) \mid (a_1, \dots, a_n) \notin X\}.$$

تعیین

زیر مجموعه مشخص A ای از $\{0, 1\}$ را در نظر بگیرید. یک بازی G_A تعریف می‌کنم، که بازی‌ای نامتناهی است با دو بازیکن.

بازیکن I و بازیکن II به نوبت یک

$$\epsilon_i \in \{0, 1\}$$

را انتخاب می‌کنند به این صورت که بازیکن I ϵ_i را به ازای i های فرد، و بازیکن II ϵ_i را به ازای i های زوج انتخاب می‌کنند. بازیکن I با انتخاب ϵ_1 شروع می‌کند؛ بازیکن II ϵ_2 را برمی‌دارد، و به همین ترتیب بازیکن I می‌برد اگر

$$\sum_{i=1}^{\infty} \epsilon_i 2^{-i} \in A;$$

در غیر این صورت بازیکن II می‌برد.

فرض کنید SEQ مجموعه همه دنباله‌های دودویی متناهی باشد. هر استراتژی τ یک تابع

$$\tau: SEQ \rightarrow \{0, 1\}$$

است. دور $(\epsilon_i: i \in \mathbb{N})$ از بازی مطابق با τ توسط بازیکن I تولید می‌شود اگر $\epsilon_1 = \tau(\emptyset)$ و به ازای هر $k \in \mathbb{N}$

$$\epsilon_{2k+1} = \tau(\epsilon_1, \dots, \epsilon_{2k}).$$

مشابهاً دور مطابق با τ توسط بازیکن II تولید می‌شود اگر به ازای هر $k \in \mathbb{N}$

$$\epsilon_{2k} = \tau(\epsilon_1, \dots, \epsilon_{2k-1}).$$

استراتژی τ یک استراتژی جد برای بازیکن I است اگر بازیکن I هر دور از بازی را که مطابق با τ توسط بازیکن I تولید شود ببرد. مشابهاً، τ یک استراتژی جد برای بازیکن II است اگر بازیکن II هر دور از بازی را که مطابق با τ توسط بازیکن II تولید شود ببرد.

تعریف. فرض کنید که $A \subseteq \{0, 1\}$. بازی G_A معین است — به اختصار: A معین است — اگر استراتژی بردی برای یکی از بازیکنان باشد. $\square$

اصل موضوع انتخاب مجموعه A ای به دست می‌دهد که G_A معین نیست. این استدلال ساده قطری سازی‌ای است. فقط $2^{\aleph_0}$ تا استراتژی ممکن هست، و به ازای هر استراتژی τ این حکم که τ یک استراتژی برد برای یکی از بازیکنان در بازی G_A است عملاً $2^{\aleph_0}$ تا پیش‌بینی درباره عضویت در A انجام می‌دهد.

با این حال، مجموعه نامعینی که اصل موضوع انتخاب به دست می‌دهد در حالت کلی مجموعه‌ای افکنشی نیست. این (اساساً) میتسیلسکی-استینه‌هاوس، (۱۹۶۲) این اصل موضوع را پیش می‌نهد:

تعیین افکنشی: فرض کنید که A یک زیر مجموعه افکنشی

$\{0, 1\}$ باشد. در این صورت بازی G_A معین است.

نمی‌دانیم و هرگز نخواهیم دانست [که آیا مجموعه‌های افکنشی اندازه‌پذیر لبگ هستند یا نه]. [Luzin, 1925].

عجیب آنکه روش پایه‌ای گودل برای نشان دادن سازگاری (نسبی) CH با ZFC مزیت شگفت‌انگیزی در پی داشت که خود گودل برای آن اهمیتی هم‌تراز با اهمیت نتایجش در مورد CH قائل بود.

قضیه (گودل). فرضی کنید ZFC سازگار باشد، در این صورت "مجموعه افکنشی اندازه‌ناپذیری وجود دارد" $ZFC +$ هم چنین است. $\square$

در واقع، یک نتیجه فوری اثبات این قضیه سازگاری (نسبی) این حکم با اصول موضوع نگره مجموعه‌ها است:

افزایی پارادوکسی از گوی واحد $\mathbb{R}^2$ به قطعاتی وجود دارد که هر یک افکنش متمم مجموعه‌ای تحلیلی است.

پس قضیه اوزین در مورد اندازه‌پذیر لبگ بودن مجموعه‌های تحلیلی در واقع قویترین قضیه‌ای بود که می‌شد آرزو کرد که فقط با کار کردن بر اساس اصول موضوع ZFC بتوان ثابت کرد.

سازگاری این مطالب با ZFC که هر مجموعه افکنشی اندازه‌پذیر لبگ است را، گرچه درست است، نمی‌توان با صرف مفروض گرفتن سازگاری ZFC ثابت کرد. با این همه، یک نتیجه فوری قضایای سالووی در مورد مسأله اندازه درباره مجموعه‌های افکنشی آن است که اگر ZFC سازگار باشد، آنگاه ZFC همراه با حکم ذیل هم سازگار است:

افزایی پارادوکسی از گوی واحد $\mathbb{R}^2$ به قطعاتی که هر یک مجموعه‌ای افکنشی باشد وجود ندارد.

بدین ترتیب در خود $H(\omega_1)$ هم سؤالات ساختاری طبیعی‌ای هستند که به لحاظ صوری حل‌ناپذیرند. حل و فصل این سؤالات، اگر واقعاً بتوان حل و فصل‌شان کرد، محتاج کشف اصول موضوع جدیدی است. هم روش تحدید گودل و هم روش توسیع کوهن می‌توانند $H(\omega_1)$ را، حتی در حالتی که مدل‌های ابتدایی و انتهایی متعددی باشند، از نظر مدل‌ها تغییر دهند. به بیانی غیرصوری، تحدید عموماً مجموعه‌هایی از اعداد صحیح را حذف می‌کند، و مجموعه‌های جدیدی از اعداد صحیح می‌توانند در توسیعی کوهنی ظاهر شوند. بدین ترتیب اصلاً واضح نیست که این سؤالات درباره مجموعه‌های افکنشی به هیچ صورتی مهارشدنی‌تر از فرضیه پیوستار باشند.

شاید اصول موضوعی باشند که نتایج قابل تأییدشان آن قدر فراوان باشند، آن قدر کل یک مبحث را روشن کنند، و برای حل مسائل داده‌شده روشهایی آن قدر نیرومند تدارک ببینند (و حتی، تا حد امکان، آنها را به شیوه‌ای ساخت گریانه حل کنند) که کاملاً قطع نظر از ضرورت ذاتی‌شان لازم باشد که مفروض گرفت‌شان — دست‌کم به همان مفهوم که هر نگره فیزیکی تثبیت شده‌ای را باید مفروض گرفت. [Gödel, 1974].

اکنون در مورد یک کاندیدا برای چنین اصل موضوعی بحث می‌کنم.

تابع $f: B \rightarrow \mathbb{R}$ مجموعه A را یکپارچه می‌کند اگر به ازای هر $f(x) \in A_x, x \in B$ شکل را ببینید. تابع f افکنشی است اگر نمودارش زیرمجموعه‌ای افکنشی از $\mathbb{R}^2$ باشد.

در ۱۹۳۰ لوزین این پرسش را مطرح کرد که آیا هر زیرمجموعه افکنشی از صفحه را می‌توان با تابعی افکنشی یکپارچه کرد یا نه. تقریباً نیم قرن بعد موسخوواکیس ثابت کرد که جواب مثبت است اگر که تعین افکنشی برقرار باشد.

بدین ترتیب، با مفروض گرفتن تعین افکنشی، تحلیل کاملی از اصل موضوع انتخاب در سطح افکنشی داریم، که می‌توانیم به این صورت خلاصه‌اش کنیم. برای این خلاصه‌سازی، مناسب است مفهوم زیرمجموعه افکنشی $\mathbb{R}^n$ را به مفهوم مجموعه افکنشی عمومی تعمیم دهیم. پس بیایید بگوییم که مجموعه A یک مجموعه افکنشی عمومی است اگر یک تابع پوشای $\pi: \mathbb{R} \rightarrow M$ که در آن M بسطار متعددی $\{A\}$ است، وجود داشته باشد که

$$\{(x, y) | \pi(x) \in \pi(y)\}$$

زیرمجموعه‌ای افکنشی از $\mathbb{R}^2$ باشد. این دو مفهوم در مورد زیرمجموعه‌های $\mathbb{R}^n$ با هم مطابقت دارند؛ مجموعه $A \subseteq \mathbb{R}^n$ یک مجموعه افکنشی عمومی است اگر و فقط اگر یک مجموعه افکنشی باشد. مجموعه‌های افکنشی طبق تعریف زیرمجموعه $\mathbb{R}^n$ اند؛ مجموعه‌های افکنشی عمومی می‌توانند عدد اصلی و تابع و غیره باشند. اینک آن خلاصه وعده داده شده.

۱. اصل موضوع انتخاب، به لحاظ افکنشی برقرار نیست، به این مفهوم که خوش‌ترتیبی افکنشی‌ای از اعداد حقیقی وجود ندارد.
۲. اصل موضوع انتخاب، به لحاظ افکنشی برقرار است به این مفهوم که اگر $F: \mathbb{R} \rightarrow V$ یک مجموعه افکنشی عمومی باشد، آنگاه تابع انتخابی برای F وجود دارد که یک مجموعه افکنشی عمومی هم هست.

تعین افکنشی و عددهای اصلی بزرگ

می‌شد سعی کرد که تعین افکنشی را به صورت فزاینده تحلیل کرد.

در ۱۹۵۳ گیل‌استیوارت ثابت کردند که هر زیرمجموعه باز $[0, 1]$ معین است، و این پرسش جسورانه را مطرح کردند که آیا هر مجموعه بول معین است یا نه. دو دهه بعد، در شاهکاری تکنیکی، مارتین ثابت کرد که جواب مثبت است. یک جنبه برجسته اثبات مارتین آن است که فریدمن [Friedman, 1971] قبلاً نشان داده بود که تعین مجموعه‌های بول را نمی‌توان در نگره مجموعه‌های تسرمو همراه با اصل موضوع انتخاب ثابت کرد. این نگره عبارت است از نظام ZC از اصول موضوع، یعنی ZFC بدون اصل (یا اصول) موضوع جایگزینی. بیشتر ریاضیدانان با این نظام محدود اصول موضوع کار می‌کنند، خواه این امر را تشخیص دهند خواه ندهند.

به بیانی تقریبی، روش مارتین این بود که به هر مجموعه بول A ، با استقراء بر رتبه بول A ، یک مجموعه باز $A^* \subset Z^N$ مربوط کند که در آن Z گسسته است. A^* چنان ساخته می‌شود که از معین بودن بازی مربوط شده به A^* (در اینجا بازیکنان با اعضای Z بازی می‌کنند)، معین بودن A نتیجه شود. قضیه گیل‌استیوارت برای نشان دادن اینکه A^* معین است به کار

در این نقطه از بحث مان باید اذعان کرد که اصل موضوع تعین افکنشی نه فقط این طور نیست که به وضوح درست باشد، حتی این طور هم نیست که به وضوح سازگار باشد. با این حال، اصل موضوع ثمربخشی است، اما (و این یک شوخی منطق‌دانان است) اصل موضوع $\omega = 1$ هم چنین است.

در این مقاله، که بخش اول مقاله‌ای دو بخشی است، هدف اصلی من عرضه بعضی شواهد قوی برای این مطلب است که اصل موضوع تعین افکنشی "اصل موضوع صحیح" برای مجموعه‌های افکنشی است. شواهدی که عرضه می‌کنم حقیقتاً بخش کوچکی است از آنچه اکنون در دسترس است. مبحث مجموعه‌های افکنشی اکنون از جهاتی گسترش یافته است که بنیادگذاران آن پیش‌بینی یا حتی تصور نمی‌کردند.

در ۱۹۶۴ میسلیسکی و شوپرچکروسکی ثابت کردند که اگر اصل موضوع تعین افکنشی برقرار باشد، آنگاه هر مجموعه افکنشی اندازه‌پذیر لیگ است. نتیجتاً، این اصل موضوع ایجاب می‌کند که افزایش پارادوکسی از گوی واحد $\mathbb{R}^2$ به قطعات افکنشی وجود ندارد.

این اصل موضوع همچنین ایجاب می‌کند که هر مجموعه افکنشی ناشمارا عدد اصلی $2^{\aleph_0}$ دارد. دیویس، باز هم کمی بعد از آنکه این اصل موضوع معرفی شد، ثابت کرد که این اصل موضوع ایجاب می‌کند که هر مجموعه افکنشی ناشمارا شامل یک زیرمجموعه بسته ناشمارا است.

این اثبات می‌کند که (با مفروض گرفتن تعین افکنشی) هیچ مثال نقض صوری‌ای برای CH در میان مجموعه‌های افکنشی یافت نخواهد شد. با کمال تعجب، رابطه واقعی بین CH و مجموعه‌های افکنشی، حتی با مفروض گرفتن تعین افکنشی، کاملاً غامض است. این نقطه شروع بخش دوم این مقاله خواهد بود.

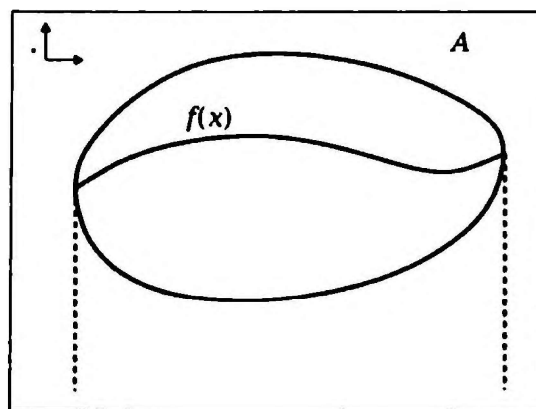
همچنین می‌توانیم به نحوی طبیعی صورتهایی از اصل موضوع انتخاب برای مجموعه‌های افکنشی را تحلیل کنیم.

فرض کنید که $A \subseteq \mathbb{R}^2$ به ازای هر $x \in \mathbb{R}$ مقطع A در x را برابر

$$A_x = \{y \in \mathbb{R} | (x, y) \in A\}$$

قرار دهید.

فرض کنید B افکنش A باشد، $B = \{x | A_x \neq \emptyset\}$.



قویترین فرضیه شناخته شده عددهای اصلی بزرگ در آن زمان بود موفق شد تعیین همه مجموعه های Σ_1^1 را ثابت کند. سرانجام، در ۱۹۸۳ من، با استفاده از اصول موضوع عددهای اصلی بزرگ، در سلسله مراتبی طبیعی که با اصول موضوعی برای عددهای اصلی بزرگ شروع می شود که مارتین در اثبات تعیین همه مجموعه های Σ_1^1 از آنها استفاده کرده بود، تعیین همه مجموعه های Σ_2^1 را ثابت کردم.

از سرشت طبیعی این اثباتهای تعیین این طور برمی آید که فرضیه های اساساً بهینه عددهای اصلی بزرگ به کار گرفته شده بوده است. اما این تصویر گرچه بسیار جذاب بود (دست کم برای مارتین و من)، به کلی غلط بود. اصول موضوع عددهای اصلی بزرگ که برای اثبات تعیین افکنشی به کار رفته بود، از جمله اصل موضوعی که مارتین برای اثبات تعیین همه مجموعه های Σ_2^1 به کار گرفته بود، بسیار قویتر از حد لازم بوده اند. اولین نشانه های اینکه این تصویر نادرست بود از جهتی پدیدار شد که شگفت انگیز بود: شواهدی که فورمن-مگیدور-شلایه در اثر دورانسانشان در مورد بیشینه مارتین کشف کردند، که یک اصل موضوع حداکثری^۱ تحمیل است که در ذیل در موردش بحث می کنم. این نهایتاً در ۱۹۸۴ منجر به قضیه ذیل شد.

قضیه (شلایه وودین). فرض کنید تعدادی نامتناهی عدد اصلی وودین وجود داشته باشد، در این صورت هر مجموعه افکنشی اندازه پذیر لگند است. $\square$

تعریف عدد اصلی وودین را به دست نخواهم داد، بلکه در عوض صرفاً تذکر می دهم که این اصل موضوع مربوط به عددهای اصلی بسیار ضعیفتر از آنهایی است که در اثباتهای تعیینی به کار گرفته شدند که هم اکنون در موردشان بحث شد.

چوناه مدل درونی می کوشد ساخت زیرساختاری گودل را به مدلهایی تعمیم دهد که اصول موضوع گوناگون در مورد عددهای اصلی بزرگ در آنها صادق باشند (و هر چه اصل موضوع قویتر باشد، مسأله مشکلتر است). به بیانی دقیقتر، با در نظر گرفتن یک اصل موضوع مشخص Ψ در مورد عددهای اصلی بزرگ، به ازای هر مدل (M, E) برای $ZFC + \Psi$ در جست و جوی یک زیرساختار $(M^*, E \cap (M^* \times M^*))$ هستیم که یک مدل $ZFC + \Psi$ هم باشد و جملات گوناگونی که در زیرساختار گودل درست اند در آن صادق باشند. برای مثال، اگر Ψ این اصل موضوع مربوط به عددهای اصلی بزرگ باشد که "یک عدد اصلی وودین وجود دارد"، صرف خواستن اینکه در زیرساختار تولید شده، جمله "مجموعه های افکنشی هست که اندازه پذیر لگ نیست" برقرار باشد مسأله مشکلی ایجاد می کند. در مورد اصول موضوع قویتری درباره عددهای اصلی بزرگ تعمیمهایی از این خواسته هستند که مسائلی ایجاد می کنند که همین قدر غیر بدیهی اند. در مورد این اصل موضوع مربوط به عددهای اصلی بزرگ که "عدد اصلی اندازه پذیری هست"، تعمیم صحیح روش ساخت گودل را سالووی کشف کرد و بعداً این تعمیم در آثار کیون^۱ و سیلور بیشتر تحلیل شد. با این قضایا برنامه مدل درونی شروع شد.

بسته می شود، و به این صورت تعیین A حاصل می شود. همچنان که A روی مجموعه های بول ممکن تغییر می کند، مجموعه های مربوط شده Z روی

$$\{\mathcal{P}^\alpha(\mathbb{R}) \mid \alpha < \omega_1\}$$

تغییر می کنند. و همگام با رتبه بول A عدد اصلیشان افزایش می یابد. در اینجا $\mathcal{P}^\alpha(\mathbb{R})$ مجموعه توانی α بار تکرار شده $\mathbb{R}$ را نشان می دهد، که به استقراء به صورت ذیل تعریف می شود، که در آن به ازای هر مجموعه X ، $\mathcal{P}(X) = \{Y \mid Y \subseteq X\}$ ، $\mathcal{P}^0(X) = X$ ، $\mathcal{P}^{\alpha+1}(\mathbb{R}) = \mathcal{P}(\mathcal{P}^\alpha(\mathbb{R}))$ ، $\mathcal{P}^*(\mathbb{R}) = \mathcal{P}^\alpha(\mathbb{R}) = \bigcup \{\mathcal{P}^\beta(\mathbb{R}) \mid \beta < \alpha\}$

اگر $\alpha > 0$ و α یک عدد ترتیبی حدی باشد.

در نگره مجموعه های تسرملو نمی توان ثابت کرد که حتی $\mathcal{P}^\omega(\mathbb{R})$ وجود دارد، و لذا چنان که قضیه فریدمن پیش بینی کرده بود، اثبات مارتین را نمی توان با مفروض گرفتن فقط اصول موضوع ZC به انجام رساند.

تعیین همه مجموعه های تحلیلی $[0, 1]$ را نمی توان در ZFC ثابت کرد. این به این سبب است که ZFC واقعاً خیلی قوی نیست. بدین ترتیب قضیه مارتین در مورد تعیین همه مجموعه های بول قویترین قضیه ای است که می توان آرزو کرد که بدون توسل به اصول موضوع جدید ثابت کرد. در اینجا اصول موضوع عددهای اصلی بزرگ وارد می شوند، که به طور غیر ضروری اصول موضوعی اند که وجود عددهای اصلی "بزرگ" را ادعا می کند. عدد اصلی ناشمارای κ یک عدد اصلی اندازه پذیر است اگر فراصفای^۱ غیر اصلی U ای روی زیرمجموعه های κ وجود داشته باشد که تکامل باشد؛ یعنی اگر $X \subset U$ و X عدد اصلی کمتر از κ داشته باشد، آنگاه $\{A \subset \kappa \mid A \in X\} \in U$.

مارتین در حوالی ۱۹۷۰، حدوداً پنج سال پیش از آنکه ثابت کند که همه مجموعه های بول معین اند، ثابت کرد که اگر عدد اصلی اندازه پذیری وجود داشته باشد، آنگاه همه مجموعه های تحلیلی معین اند (هر مجموعه بول، مجموعه ای تحلیلی است، و لذا این این را هم، گرچه نه در ZFC ، اثبات کرد که همه مجموعه های بول معین اند).

اما سالووی نشان داد که نمی توان امید داشت که صرفاً بر پایه وجود یک عدد اصلی اندازه پذیر تعیین افکنشی را ثابت کرد. دلیل، مثل قبل، کمی قدرت است: "تعیین افکنشی" $ZFC +$ سازگاری "عدد اصلی اندازه پذیری هست" $ZFC +$ را ایجاب می کند. بنابراین، مطابق قضیه دوم ناتمامیت گودل نمی توان تعیین افکنشی را از وجود یک عدد اصلی اندازه پذیر نتیجه گرفت. اصول موضوع باز هم قویتری لازم اند، و مورد خاص اثبات تعیین همه زیرمجموعه های Σ_1^1 از $[0, 1]$ تبدیل به مسأله ای عمده شد (مجموعه های Σ_1^1 آن مجموعه های افکنشی ای هستند که می توان به صورت افکنش متهم یک مجموعه تحلیلی نمایش شان داد). برخی حدس زدند که هیچ اصل موضوع شناخته شده ای برای عددهای اصلی بزرگ آن قدر قوی نیست که این بخش از تعیین افکنشی را ایجاب کند. در ۱۹۷۸ مارتین با استفاده از آنچه اساساً

1. maximal 2. Kunen

1. ultrafilter

به هم نتیجه می‌شود. تعیین افکنشی در نگاره مجموعه‌ها حضور همه‌جایی دارد.

در واقع، این نمونه‌ای است از پدیده فراگیرتری که در آن گزاره‌ها را، بر مبنای سازگاری، توسط اصول موضوع عددهای اصلی بزرگ درجه‌بندی می‌کنند. اکنون مثال‌های متعددی از این پدیده وجود دارد؛ بسیاری از نتایج اولیه از این نوع با لم پوششی دفسن اثبات شده بودند. در واقع، با استفاده از لم پوششی می‌توان تعیین همه مجموعه‌های تحلیلی را بر پایه آرایه احتمالاً حیرت‌آوری از گزاره‌ها ثابت کرد. برای جزئیات بیشتر خواننده را به [Kanamori, 1994]

ارجاع می‌دهم.

یک مثال متأخر که در آن روشهای برنامه مدل مرکزی برای اثبات تعیین افکنشی به کار گرفته می‌شود متضمن اصول موضوعی است که می‌کوشند مسأله پیوستار را از این طریق حل کنند که فرضیه پیوستار را به صراحت غلط سازند.

اصول موضوع تحمیل

اصول موضوع تحمیل در اساس اصل موضوعهایی اند که تعمیمهایی از قضیه دسته جز را ادعا می‌کنند. این ارتباط در جنبه‌های فنی روش کوهن برای ساختن توسیعیهای مدل‌های ZFC نهفته است.

فرض کنید که $\langle M, E \rangle \models \text{ZFC}$. توسیعیهای کوهنی مربوط شده به ساختار $\langle M, E \rangle$ متناظرند با جبرهای بولی کامل به مفهوم $\langle M, E \rangle$ ، یعنی متناظرند با آن عضوهای $b \in M$ که

$$\langle M, E \rangle \models "b \text{ یک جبر بولی کامل است}."$$

اگر b بدیهی باشد، مثلاً اگر

$$\langle M, E \rangle \models "b \text{ یک جبر بولی متناهی است}."$$

آنگاه توسیع مربوط شده صرفاً $\langle M, E \rangle$ است. اما اگر

$$\langle M, E \rangle \models "b \text{ جبر اندازه‌ای}^1 \text{ فضای حاصل ضرب } \Pi_{\alpha} [0, 1] \text{ است}."$$

آنگاه در توسیع مربوط شده فرضیه پیوستار ضرورتاً غلط است. یک خصوصیت دیگر بسیار جالب این توسیع آن است که در این توسیع یک اندازه به طور شمارا جمعی روی $\mathbb{R}^2$ وجود دارد که اندازه لبگ را گسترش می‌دهد، که نسبت به آن همه مجموعه‌های افکنشی اندازه‌پذیرند و نسبت به حرکات صلب ناورد است. پس در این توسیع حکم ذیل برقرار است:

هیچ افزاز پارادوکسی‌ای از گوی واحد $\mathbb{R}^2$ به قطعات افکنشی وجود ندارد.

این توسیع را، که اولین بار سالووی تعریف و تحلیل‌اش کرد، گاهی توسیع سالووی می‌نامند.

اگر Ω یک فضای هاؤسدرف فشرده باشد، آنگاه جبر باز بقاعده Ω جبر بولی کامل است که با شبکه زیرمجموعه‌های باز بقاعده Ω (آن مجموعه‌های

۱. جبر بولی زیرمجموعه‌های بول به یسانه مجموعه‌های بوج.

این امر که بر مبنای تعدادی نامتناهی عدد اصلی وودین می‌توان ثابت کرد که مجموعه‌های افکنشی اندازه‌پذیر لبگ‌اند شاهدی است قوی بر اینکه بر مبنای همان فرض باید بتوان تعیین افکنشی را ثابت کرد. در ۱۹۸۵، با استفاده از تکنیکهایی که در برنامه مدل درونی پروارنده شده بود، مارتین-استیل در این کار موفق یافتند. در کمال تعجب، خاصیت‌های ترکیبیاتی عددهای اصلی وودین که باعث این اکتشاف شدند — مثلاً آن خصوصیتی که اندازه‌پذیری همه مجموعه‌های افکنشی را نتیجه می‌دهند — در این اثبات تعیین هیچ نقشی ایفا نمی‌کنند.

قضیه (مارتین-استیل). فرض کنید تعدادی نامتناهی عدد اصلی وودین وجود داشته باشند، در این صورت هر مجموعه افکنشی معین است. □

در اثباتهای تعیین اصول موضوع عددهای اصلی بزرگ چگونه به کار گرفته می‌شوند؟ استراتژی پایه همان استراتژی مارتین در اثبات تعیین همه مجموعه‌های بول است، گرچه اثبات مارتین برای تعیین همه مجموعه‌های تحلیلی بر پایه وجود یک عدد اصلی اندازه‌پذیر الگوی دقیق‌تری است. با مفروض بودن یک مجموعه $A \subseteq [0, 1]$ ، در اینجا هم به مجموعه A یک مجموعه باز $A^* \subset \mathbb{Z}^N$ مربوط می‌کنیم، که Z مجموعه گسسته‌ای است که با دقت چنان ساخته شده است که از تعیین بازی‌ای که به نحو طبیعی به A^* مربوط می‌شود تعیین مجموعه اولیه A حاصل می‌شود. قضیه گیل-استوارت نشان می‌دهد که A^* معین است، و لذا مثل قبل تعیین A حاصل می‌شود. به ازای یک مجموعه افکنشی نوعی A مجموعه مربوط شده Z بسیار بزرگ است — عدد اصلی‌اش از مرتبه عددهای اصلی بزرگی است که فرض می‌گیریم که وجود دارند.

ارتباط بین تعیین افکنشی و اصول موضوع عددهای اصلی بزرگ بنیادین است. این ادعا را قضیه ذیل تأیید می‌کند که در ۱۹۸۷ اثبات شده و نشان می‌دهد که تصویر این بار صحیح است.

قضیه (وودین). اینها معادل‌اند:

۱. تعیین افکنشی.

۲. به ازای هر $k \in \mathbb{N}$ ، یک مجموعه معددی شمارای M وجود دارد که

$$\langle M, \in \rangle \models \text{ZFC} + "k \text{ عدد اصلی وودین وجود دارد}."$$

و M به نحو شمارایی تکرارپذیر است. □

مفهوم اینکه M به نحو شمارایی تکرارپذیر است مفهومی فنی است که از برنامه مدل درونی می‌آید.

جوانه مدل مرکزی^۱، که بلندپروازانه‌تر از برنامه مدل درونی است، از کار دورانساز داد^۲ و بنسن^۳ سرچشمه می‌گیرد. این برنامه بلندپروازانه‌تر است چون می‌کوشد زیرساختارهای برنامه مدل درونی را بسازد بدون اینکه ضرورتاً فرض کند که اصول موضوع مربوطه درباره عددهای اصلی بزرگ حتی در ساختار اولیه برقرارند.

گسترش برنامه مدل مرکزی به قلمرو عددهای اصلی وودین در وهله اول کار استیل [Steel, 1996] است، و با این پیشرفت روشن شده است که تعیین افکنشی واقعاً از تعداد عظیمی گزاره‌های ترکیبیاتی ظاهراً نامربوط

قضیه (فورمن-مگیدور-شلاه). فرض کنید که Ω یک فضای هائوسدورف فشرده باشد و فرض کنید که به ازای هر مجموعه باز ناختمی $O \subseteq \Omega$ مجموعه O اجتماع $\aleph_1$ تا زیرمجموعه فک Ω نباشد. در این صورت جبر باز بقاعده Ω حافظ مجموعه‌های پایا است. $\square$

این، تعریف پیشینه مارتین را پیش می‌نهد. قضیه اصلی [Foreman-Magidor-Shelah, 1988] آن است که سازگاری این اصل موضوع با ZFC از سازگاری اصول موضوع (مناسبی) مربوط به عددهای اصلی بزرگ با ZFC نتیجه می‌شود؛ به عبارت دیگر، این پیشینه می‌تواند محقق شود.

پیشینه مارتین: فرض کنید که Ω فضای هائوسدورف فشرده‌ای باشد که جبر باز بقاعده‌اش حافظ مجموعه‌های پایا است. در این صورت Ω اجتماع $\aleph_1$ تا زیرمجموعه فک Ω نیست.

اصول موضوع تمیل چنان طراحی شده‌اند که ایجاب کنند که فرضیه پیوستار غلط است در واقع، پیشینه مارتین (بر خلاف صورت ضعیفتر اصل موضوع مارتین (ω_1)) درباره عدد اصلی پیوستار اطلاعات به مراتب بیشتری به دست می‌دهد.

قضیه (فورمن-مگیدور-شلاه). فرض کنید که اصل موضوع پیشینه مارتین برقرار باشد، در این صورت $\aleph_2 = 2^{\aleph_0}$. $\square$

پژوهشهای بعدی آشکار کرده‌اند که این قضیه واقعاً به ازای هر اصل موضوع تمیل که به نحوی نابديهی قویتر از اصل موضوع مارتین (ω_1) باشد برقرار است. پس، به نحوی غیرعادی، اصرار بر آنکه مجموعه‌های با عدد اصلی $\aleph_1$ به مجموعه‌های شمارا شباهت دارند الزام می‌کند که $\aleph_2 = 2^{\aleph_0}$. آن اصول موضوع عددهای اصلی بزرگ که در اثبات سازگاری پیشینه مارتین به کار گرفته شدند بسیار قویتر از آن اصول موضوع عددهای اصلی بزرگ‌اند که در اثبات تعیین افکنشی به کار گرفته شدند. بنابراین طبیعی است حدس بزنیم که پیشینه مارتین ممکن است تعیین افکنشی را ایجاب کند، اگر چه پیشینه مارتین، به مفهوم پذیرفته‌شده عدد اصلی بزرگ، اصل موضوعی مربوط به عددهای اصلی بزرگ نیست.

گفتم که کار فورمن-مگیدور-شلاه در مورد پیشینه مارتین الهام‌بخش کشف اصول موضوع صحیح مربوط به عددهای اصلی بزرگ برای تعیین افکنشی بود. بنابراین قضیه بعدی شاید پایان‌بخش مناسبی برای این بخش داستان باشد. من صورتی را بیان می‌کنم که اندکی قویتر است و متضمن شکل ضعیف‌شده‌ای از پیشینه مارتین است. این شکل ضعیف‌شده پیشینه مارتین (c) است، که این اصل موضوع است که پیشینه مارتین برای همه فضاهای هائوسدورف فشرده Ω ‌ای که جبر باز بقاعده‌شان حافظ مجموعه‌های پایا باشد و برایشان پایه‌ای برای توپولوژی Ω با عدد اصلی حداکثر c وجود داشته باشد برقرار است. بدین ترتیب پیشینه مارتین (c) اصل موضوعی است که فقط به فضاهای هائوسدورف فشرده نسبتاً "کوچک" مربوط می‌شود.

قضیه (ودین). فرض کنید که اصل موضوع پیشینه مارتین (c) برقرار باشد، در این صورت تعیین افکنشی برقرار است. $\square$

باز $O \subseteq \Omega$ که مساوی درون بستارشان هستند) به دست داده می‌شود. این خصوصیت توسیع اولیه کوهن به نحوی طبیعی انگیزه‌ای است برای اصول موضوع تمیل؛ این توسیع بر مبنای عضوهای b_α از M تعریف می‌شود که

" b جبر باز بقاعده فضای حاصل ضرب $\prod_{\alpha \in \gamma} [0, 1]$ است"

خصوصیت جالب این توسیع آن است که این تعمیم قضیه رسته بتر در آن برقرار است.

بازه واحد $[0, 1]$ اجتماع $\aleph_1$ تا مجموعه فک نیست.

فضای هائوسدورف فشرده Ω ccc [کوته‌نوشت countable chain condition - م] است اگر هر گردایه از زیرمجموعه‌های باز دوبه‌دو مجزای Ω شمارا باشد.

اصل موضوع مارتین (ω_1) : فرض کنید که Ω فضای هائوسدورف فشرده‌ای باشد که ccc است. در این صورت Ω اجتماع $\aleph_1$ تا زیرمجموعه فک Ω نیست.

یک انگیزه ساده برای چنین اصل موضوعی آن است که اگر بنا باشد CH غلط باشد، آنگاه مجموعه‌های با عدد اصلی $\aleph_1$ باید، تا حد امکان، مثل مجموعه‌های شمارا رفتار کنند.

می‌توان کوشید که با منظور کردن رده بزرگتری از فضاهای هائوسدورف فشرده، این اصل موضوع را قویتر کرد. پیشینه رده ممکن را فورمن-مگیدور-شلاه شناسایی کردند. این تعریف متضمن مفهوم زیرمجموعه بیکران بسته ω_1 است: مجموعه هم‌پایان $\omega_1 \subset C$ بسته و بیکران است اگر با توپولوژی ترتیبی ω_1 بسته باشد.

فرض کنید که $\mathbb{B}$ یک جبر بولی کامل باشد. هر مجموعه $S \subseteq \mathbb{B}$ یک بزرگترین کران پایین دارد، که با $S \wedge$ نشان داده می‌شود، و یک کوچکترین کران بالا که با $S \vee$ نشان داده می‌شود.

تعریف (فورمن-مگیدور-شلاه). فرض کنید که $\mathbb{B}$ یک جبر بولی کامل باشد. جبر بولی $\mathbb{B}$ حافظ مجموعه‌های پایا است اگر که این مطلب درست باشد. فرض کنید که b یک عضو غیرصفر $\mathbb{B}$ باشد و فرض کنید که $(b_\alpha : \alpha < \omega_1)$ دنباله‌ای از اعضای $\mathbb{B}$ باشد. در این صورت یک $c \leq b$ وجود دارد که یا به ازای α ‌های به حد کافی بزرگ $c \wedge b_\alpha = 0$ یا یک مجموعه بیکران بسته $\omega_1 \subset C$ وجود دارد که به ازای هر $\gamma \in C$

$$c \wedge \left(\bigwedge_{\alpha < \gamma} \left(\bigvee_{\alpha < \eta < \gamma} b_\eta \right) \right) \neq 0. \quad \square$$

رده فضاهای هائوسدورف فشرده‌ای که جبرهای باز بقاعده‌شان حافظ مجموعه‌های پایا است بزرگترین رده‌ای است که در موردش می‌توان امید داشت که اصل موضوع مارتین (ω_1) را تعمیم داد.

[Gale and Stewart 1953] D. GALE and F. STEWART, Infinite games with perfect information *Contributions to the Theory of Games* (Harold W. Kuhn and Alan W. Tucker, eds.) Ann. of Math. Stud., vol. 28, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1953, pp. 245-266.

[Gödel 1940] K. GÖDEL, *The Consistency of the Axiom of Choice and of the Generalized Continuum Hypothesis with the Axioms of Set Theory*, Ann. of Math. Stud., vol. 3, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1940, pp. 33-101.

[Gödel 1947] K. GÖDEL, What is Cantor's continuum problem? *Amer. Math. Monthly* **54** (1947), 515-545.

[Kanamori 1994] A. KANAMORI, *The Higher Infinite: Large Cardinals in Set Theory from Their Beginnings*, Perspect. Math. Logic, Springer-Verlag, Berlin, 1994.

[Luzin 1925] N. LUZIN, Sur les ensembles projectifs de M. Henri Lebesgue, *C. R. Hebdomadaires des Seances Acad. Sci. Paris* **180** (1925), 1572-1574.

[Martin 1975] D. MARTIN, Borel determinacy, *Ann of Math.* **102** (1975), 363-371.

[Martin and Steel 1989] D. MARTIN and J. STEEL, A proof of projective determinacy, *J. Amer. Math. Soc.* **2** (1989), 71-125.

[Moschovakis 1980] Y. MOSCHOVAKIS, *Descriptive Set Theory*, Stud. Logic Found. Math., vol. 100, North Holland, Amsterdam, 1980.

[Mycielski and Steinhaus 1962] J. MYCIELSKI and H. STEINHAUS, A Mathematical axiom contradicting the axiom of choice, *Bull. Acad. Polonaise Sci., Ser. Sci. Math., Astron. Phys.* **10** (1962), 1-3.

[Solovay 1970] R. SOLOVAY, A model of set theory in which every set of reals is Lebesgue measurable, *Ann. of Math.* **92** (1970), 1-56.

[Steel 1996] J. STEEL, *The Core Model Iterability Problem*, Lecture Notes Logic, vol. 8, Springer-Verlag, Heidelberg, 1996.

[Woodin 1999] W. HUGH WOODIN, *The Axiom of Determinacy, Forcing Axioms, and the Nonstationary Ideal*, Ser. Logic Appl., vol. 1, de Gruyter, Berlin, 1999.

- W. Hugh Woodin, "The continuum hypothesis, part I", *Notices Amer. Math. Soc.*, (6) **48** (2001) 567-576.

* هیو وودین، دانشگاه کالیفرنیا، برکلی، آمریکا

woodin@math.berkeley.edu

هیچ اثبات مستقیمی برای این قضیه دانسته نیست. روش اثبات استفاده از دستگاه به وجود آمده در برنامه مدل مرکزی است برای نشان دادن اینکه، با مفروض گرفتن بیشینه مارتین (c)، به ازای هر $n < \omega$ یک مجموعه متعدی شمارای M وجود دارد که

$$(M, \in) \models \text{ZFC} + "n \text{ تا عدد اصلی وودین وجود دارد}"$$

و چنان است که M (به نحو شمارایی) تکرارپذیر است. تعیین افکنشی را اساساً بر پایه وجود این مجموعه‌ها، به توسط قضیه‌ای به دست می‌آوریم که تعیین افکنشی را با عددهای اصلی بزرگ یکپارچه می‌کند. این روش را می‌توان به کار برد — و به کار برده شده است — تا تعیین افکنشی را بر پایه تعداد زیادی از گزاره‌های ترکیبیاتی ثابت کرد، که بسیاری از آنها، مثل بیشینه مارتین، هیچ ارتباط واضحی با مجموعه‌های افکنشی ندارند. این ادعا از این‌جا است که ظاهر می‌شود: تعیین افکنشی در نگره مجموعه‌ها حضور همه‌جایی دارد.

- وضع موجود در مورد نگره مجموعه‌های افکنشی را خلاصه کنیم:
- تعیین افکنشی اصل موضوع صحیح در مورد مجموعه‌های افکنشی است؛ اصول موضوع ZFC ده وضوح ناکامل‌اند و به نحوی بنیادین ناکامل‌اند.
- با مفروض گرفتن تعیین افکنشی، در تحایل ساختار $\langle H(\omega_1), \in \rangle$ (یا، معادلاً، در تحایل $\langle P(N), N, +, \cdot, \in \rangle$ ، که ساختار استانده نگره مرتبه دوم اعداد است) هیچ استفاده‌ای از اصل موضوع انتخاب در کار نخواهد بود.
- در حیطه تعیین افکنشی، تنها مثالهای شناخته‌شده از مسائل حل‌ناپذیر همانند مثالهای شناخته‌شده مسائل حل‌ناپذیر در نگره اعدادند: جمله‌های گودلی و احکام سازگاری.
- به طور خلاصه، این همانندی اصول موضوع برای ساختارها را داریم:

$$\frac{\text{اصول موضوع پتانو}}{\langle N, +, \cdot \rangle} \sim \frac{\text{تعیین افکنشی + اصول موضوع پتانو}}{\langle P(N), N, +, \cdot, \in \rangle}$$

آیا درک ساختار $\langle H(\omega_1), \in \rangle$ ، که از طریق کشف اصول موضوع صحیح برای این ساختار حاصل شود، می‌تواند به درک ساختار $\langle H(\omega_2), \in \rangle$ گسترش یابد؟ این سؤال موضوع اصلی بخش دوم و پایانی این مقاله خواهد بود.

مراجع

[Cohen 1966] P. COHEN, *Set Theory and the Continuum Hypothesis*, Benjamin, New York, 1966.

[Foreman, Magidor, Shelah 1988] M. FOREMAN, M. MAGIDOR, and S. SHELAH, Martin's Maximum, saturated ideals and non-regular ultrafilters I. *Ann. of Math.* **127** (1988), 1-47.

[Friedman 1971] H. FRIEDMAN, Higher set theory and mathematical practice, *Ann. of Math. Logic* **2** (1971), 325-357.

۱. در اینجا صورت‌بندی دقیق‌تر تعیین افکنشی مجموعه‌سازی را در بر می‌گیرد.