پرکولاسیون چیست؟*

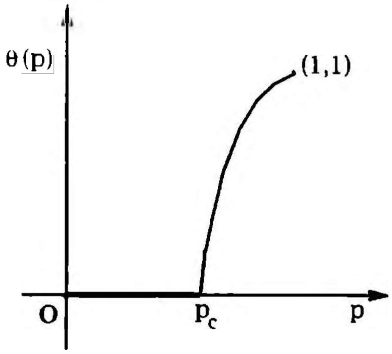
هری کِستِن*
ترجمهٔ محمدقاسم وحیدی‌اصل

پرکولاسیون مدل احتمالاتی ساده‌ای است که یک گذار فاز را (به‌گونه‌ای که در زیر شرح می‌دهیم) نمایش می‌دهد. ساده‌ترین صورت آن در $\mathbb{Z}^۲$ اتفاق می‌افتد که آن را گرافی در نظر می‌گیریم که یالهایی بین دو رأس همسایه دارد. همهٔ یالهای $\mathbb{Z}^۲$، مستقل از یکدیگر، با احتمال p باز و با احتمال $۱ - p$ بسته انگاشته می‌شوند. پرسش اساسی در این مدل این است: «احتمال اینکه مسیری باز، یعنی، مسیری که همهٔ یالهای آن باز باشند، از مبدأ به خارج از مربع $S_n := [-n, n]^۲$ موجود باشد، چقدر است؟» این سؤال را در سال ۱۹۵۴ برودبنت[1] در سمپوزیومی دربارهٔ روشهای مونت کارلو مطرح کرد، و بعداً او و همرزلی[2] آن را پیگیری کردند. آنها پرکولاسیون را مدلی برای محیطی تصادفی در نظر گرفتند و یالهای $\mathbb{Z}^۲$ را به‌صورت کانالهایی تعبیر کردند که مایع یا گاز می‌تواند به شرط آنکه کانال به‌قدر کافی گشاد باشد (یال باز) از آن عبور کند و اگر کانال بسیار تنگ باشد (یال بسته) از آن عبور نکند. فرض آنها این بود که مایع هر جا که بتواند برود، می‌رود به‌طوری که رفتار مایع به هیچ‌وجه تصادفی نیست و هر جنبهٔ تصادفی در این مدل وابسته به محیط است.

از نماد $\mathbf{o}$ برای نشان دادن مبدأ استفاده می‌کنیم. حالت حدی سؤالی که در بالا مطرح شد، وقتی $n \to \infty$، این است: «احتمال اینکه مسیری باز از $\mathbf{o}$ به بینهایت وجود داشته باشد، چقدر است؟» این احتمال، احتمال پرکولاسیون نامیده و با $\theta(p)$ نشان داده می‌شود. آشکار است که $\theta(۰) = ۰$ و $\theta(۱) = ۱$، زیرا وقتی $p = ۰$، هیچ یال بازی وجود ندارد و وقتی $p = ۱$، همهٔ یالها بازند. همچنین به‌طور شهودی روشن است که تابع $p \mapsto \theta(p)$ غیرنزولی است. بنابراین، نمودار θ به‌عنوان تابعی از p باید به همان صورتی باشد که در شکل ۱ نشان داده شده است و می‌توان احتمال بحرانی را با $p_c = \sup\{p : \theta(p) = ۰\}$ تعریف کرد.

جالب بودن این مدل در چیست؟ برای پاسخ دادن به این سؤال، خوشهٔ (باز) $C(\nu)$ی رأس $\nu \in \mathbb{Z}^۲$ را به‌صورت گردایهٔ همهٔ نقطه‌های مرتبط با ν از طریق مسیری باز تعریف می‌کنیم. خوشه‌های $C(\nu)$ مؤلفه‌های همبند

1. Broadbent 2. Hammersley



شکل ۱ نمودار θ. بسیاری از جنبه‌های این نمودار هنوز جنبهٔ حدس دارند.

ماکسیمال گردایهٔ یالهای باز $\mathbb{Z}^۲$ هستند و $\theta(p)$ احتمال آن است که $C(\mathbf{o})$ نامتناهی باشد. اگر $p < p_c$، آنگاه بنابر تعریف، $\theta(p) = ۰$ به‌طوری که $C(\mathbf{o})$ با احتمال یک متناهی است. دشوار نیست که ببینیم در این حالت همهٔ خوشه‌های باز، متناهی‌اند. اگر $p > p_c$، آنگاه $\theta(p) > ۰$ و با احتمال اکیداً مثبتی $C(\mathbf{o})$ نامتناهی است. کاربردی از قانون صفر-یک کولموگوروف نشان می‌دهد که با احتمال یک، خوشه‌ای نامتناهی در این حالت وجود دارد. در واقع معلوم می‌شود که یک خوشهٔ نامتناهی یکتا موجود است. بنابراین رفتار سراسری سیستم به‌ازای $p < p_c$ و به‌ازای $p > p_c$ کاملاً با هم تفاوت دارد. متخصصان فیزیک آماری چنین گذار تندوتیزی در رفتار سراسری یک سیستم به‌ازای مقداری از پارامتر را گذار فاز یا پدیدهٔ بحرانی می‌نامند و مقداری از پارامتر که گذار به‌ازای آن اتفاق می‌افتد، مقدار بحرانی نامیده می‌شود. نوشتگان فراوانی در فیزیک دربارهٔ چنین پدیده‌هایی در دست است. برودبنت و همرزلی ثابت کردند که برای پرکولاسیون در $\mathbb{Z}^۲$، $۰ < p_c < ۱$؛ بنابراین، در واقع یک گذار فاز نابدیهی روی می‌دهد. بخش عمدهٔ علاقه به پرکولاسیون از این امید ناشی می‌شود که در مقایسه با سایر مدلهای پیچیده‌تر برای محیطهای نامنظم، رفتار تابعهای مختلف در حوالی نقطهٔ بحرانی را برای این مدل سادهٔ پرکولاسیون، با توجه به خواص استقلال نهفته در آن، بهتر بتوان تحلیل کرد. در واقع پرکولاسیون ساده‌ترین مدل در خانوادهٔ مدلهای موسوم به خوشه‌ای تصادفی یا فورتوین[1]-کستهاین[2] است که مدل آیزینگ[3] مشهور برای مغناطیس را هم دربرمی‌گیرد. بررسیها روی پرکولاسیون و مدلهای خوشه‌ای تصادفی بر یکدیگر اثر گذاشته‌اند.

بدیهی است که پرکولاسیون را می‌توان به هر گراف $\mathcal{G}$، حتی به گرافهای سودار (جزئی) تعمیم داد. همچنین می‌توان مدلی را در نظر گرفت که در آن رأسها، مستقل از هم، باز یا بسته باشند اما همهٔ یالها باز فرض شوند. این صورت پرکولاسیون را می‌توان پرکولاسیون بستی[4]، در قیاس با صورتی که تاکنون در نظر داشتیم و پرکولاسیون بندی[5] نامیده می‌شود، نامید. پژوهشها در آغاز بر یافتن مقدار دقیق p_c برای گرافهای گوناگون متمرکز بود. این کار با موفقیت همراه نبوده است و p_c تنها برای چند مشبکهٔ مسطح معلوم است (مثلاً برای پرکولاسیون بندی در $\mathbb{Z}^۲$، و برای پرکولاسیون بستی در مشبکهٔ مثلثی، $p_c = ۱/۲$). مقدار p_c قویاً به خواص هندسی $\mathcal{G}$ بستگی دارد. در نتیجه، توجه به پرسشهایی دربارهٔ

1. Fortuin 2. Kasteleyn 3. Ising 4. site percolation
5. bond percolation

توزیع تعداد رأسها در $\mathcal{C}(\mathbf{o})$ و خواص هندسی خوشه‌های باز وقتی p به p_c نزدیک است، معطوف شد. تصور می‌شود که تعدادی از این خاصیتها عام‌اند به این معنی که تنها به بُعد $\mathcal{G}$ بستگی دارند و نه به جزئیات ساختار آن.

به‌ویژه می‌خواهیم رفتار تابعهای مختلف را وقتی p به p_c میل می‌کند، یا پارامتر دیگری به بینهایت میل می‌کند در حالی‌که p در p_c می‌ماند، بررسی کنیم. عقیده بر این است که تابعهای بسیاری از به اصطلاح قانونهای توانی پیروی می‌کنند. به‌عنوان مثال اعتقاد بر این است که تعداد مورد انتظار رأسها در $\mathcal{C}(\mathbf{o})$، که با $\chi(p)$ نشان داده می‌شود، وقتی $p \uparrow p_c$ به‌ازای مقدار مناسبی از ثابت γ مانند $(p_c - p)^{-\gamma}$ رفتار می‌کند، به این معنی که $-\log \chi(p)/\log(p_c - p) \to \gamma$. به همین نحو تصور می‌شود که به‌ازای βای وقتی $p \downarrow p_c$، رفتار $\theta(p)$ مانند رفتار $(p - p_c)^{\beta}$ است، یا اینکه احتمال وجود مسیری باز از $\mathbf{o}$ به خارج S_n به‌ازای $p = p_c$، به‌ازای ρای مانند $n^{-1/\rho}$ رفتار می‌کند. گرچه چنین قانونهای توانی تنها برای پرکولاسیون بستی در مشبکهٔ مثلثی یا مشبکه‌های با ابعاد زیاد ثابت شده‌اند، تصور بر این است که نماهای β، γ، ρ، و غیره (که معمولاً نماهای بحرانی نامیده می‌شوند)، موجودند و مطابق با فرض عام بودن که در بالا ذکر شد، تنها به بعد $\mathcal{G}$ بستگی دارند. مثلاً پرکولاسیون بندی و بستی در مشبکهٔ $\mathbb{Z}^{۲}$ یا مشبکهٔ مثلثی همه نماهای یکسانی دارند. فیزیکدانان، گروه باز بهنجارش را برای توصیف یا اثبات چنین قانونهای توانی و عام بودن ابداع کردند اما این مطالب برای پرکولاسیون به‌صورت دقیق ریاضیاتی در نیامده است.

به‌ازای dهای بزرگ از بسیاری جهات $\mathbb{Z}^d$ مانند یک درخت منظم عمل می‌کند و برای پرکولاسیون روی درخت منظم به آسانی می‌توان قانونهای توانی را ثابت و نماهای بحرانی نظیر را محاسبه کرد. در مورد پرکولاسیون بندی روی $\mathbb{Z}^d$ به‌ازای $d \geq ۱۹$، هارا[1] و اسلید[2] از عهدهٔ اثبات قانونهای توانی و نشان دادن این مطلب که نماها با نماهای مربوط به درختی منظم مطابقت دارند، برآمدند. آنها نشان دادند که نظریهٔ آنها وقتی یالهایی به $\mathbb{Z}^d$ بین هر دو بستی که فاصلهٔ آنها از یکدیگر مقداری مانند $L_\circ = L_\circ(d)$ است، افزوده شود به‌ازای مقادیر کمتر از $d = ۱۹$ تا $d > ۶$ همچنان معتبر است.

ما به یمن این نظریه، شناخت نسبتاً زیادی از پرکولاسیون در ابعاد بالا داریم. طی چند سال اخیر، لالر[3]، شرام[4]، اسمیرنوف[5]، و ورنر[6] قانونهای توانی را برای پرکولاسیون بستی روی مشبکهٔ مثلثی ثابت کرده و صحت اغلب مقادیر نماهای بحرانی را که فیزیکدانان حدس زده بودند به ثبوت رسانیده‌اند. برهانهای آنها متکی بر ابداع شرام در زمینهٔ تکاملهای لوئونری تصادفی[7] یا تکاملهای شرام-لوئونر (SLE) و برهان زیبای اسمیرنوف دربارهٔ وجود و خواص ناوردای همدیسی برخی احتمالهای گذر است. معنی آن، به تسامح، این است: فرض کنید که $\mathcal{D}$ ناحیه‌ای «خوش‌رفتار» در $\mathbb{R}^{۲}$ باشد و A و B دو کمان در مرز آن باشند. همچنین به‌ازای $\lambda > ۰$، فرض کنید که $P_\lambda(\mathcal{D}, A, B)$ به‌ازای $p = p_c$ عبارت از احتمال آن باشد که مسیری باز از پرکولاسیون بستی بر مشبکهٔ مثلثی در $\lambda\mathcal{D}$ از λA به λB وجود داشته باشد. در واقع بهتر است $P_\lambda(\mathcal{D}, A, B)$ را به‌عنوان احتمال ارتباط بازی در $\mathcal{D}$ از A به B به‌ازای p_c روی $(۱/\lambda)$ برابر مشبکهٔ مثلثی بگیریم. بنابه ناوردایی همدیسی،

$$Q(\mathcal{D}, A, B) := \lim_{\lambda \to \infty} P_\lambda(\mathcal{D}, A, B)$$

موجود است و به‌ازای هر نگاشت همدیس از $\mathcal{D}$ به روی $\Phi(\mathcal{D})$،

$$Q(\mathcal{D}, A, B) = Q(\Phi(\mathcal{D}), \Phi(A), \Phi(B)).$$

دیگر اجزای اساسی کار عبارت‌اند از مشخص‌سازیهای یک فرایند SLE به‌دست لالر و ورنر روی یک ناحیه به‌وسیلهٔ خواص تکامل آن پیش از آنکه به مرز اصابت کند. ناوردایی همدیسی را قبلاً فیزیکدانان حدس زده بودند و کاردی[1] فرمولی برای $Q(\mathcal{D}, A, B)$ ارائه کرده بود. کار اسمیرنوف در این زمینه، برهانی دقیق برای فرمول کاردی در مورد پرکولاسیون روی مشبکهٔ مثلثی به‌دست داده است. کارهای بعدی (ر.ک.[۱])، همچنین به توصیفی از حد الگوی کامل پیکربندی تصادفی مسیرهای باز در وضعیت بحرانی، یعنی به‌ازای $p = p_c$، وقتی $\lambda \to \infty$، منجر شده است. از زمان کشف آنها، فرایندهای SLE به‌نوبهٔ خود به نظریهٔ هیجان‌انگیز جدیدی در نظریهٔ احتمال، به‌عنوان مثال به قانونهای توانی برای احتمالهای برخورد چندین حرکت براونی (ر.ک.[۳])، انجامیده است.

نتایج ناوردایی همدیسی تاکنون تنها دستاوردهایی برای پرکولاسیون بستی در مشبکه‌های مثلثی داشته است. شاید مسألهٔ حل‌نشدهٔ اساسی در این موضوع، اثبات ناوردایی همدیسی برای پرکولاسیون در دیگر مشبکه‌های دوبعدی باشد. یک مسألهٔ مرتبط عمدهٔ دیگر، اثبات قانونهای توانی و عام بودن برای پرکولاسیون در مشبکه‌های d بعدی با $۲ \leq d \leq ۶$ است. سرانجام، یک مسألهٔ حل‌نشدهٔ پانزده ساله آن است که آیا مسیر نامتناهی بازی برای پرکولاسیون بحرانی در $\mathbb{Z}^d$، $d \geq ۳$، وجود دارد یا خیر.

برای مطالعهٔ بیشتر

1. Federico Camia and Charles M. Newman. The full scaling limit of two dimensional critical percolation, arXiv:math.PR/0504036.
2. Geoffrey Grimmett. *Percolation*, second edition, Springer, 1999.
3. Gregory F. Lawler, *Conformally Invariant Processes in the Plane*, Amer. Math. Soc., 2005.

******

- Harry Kesten, "What is percolation?", *Notices Amer. Math. Soc.*, (5) **53** (2006) 572-573.

* هری کستن، استاد بازنشستهٔ ریاضیات دانشگاه کورنل، آمریکا

Kesten@math.cornell.edu.

1. Hara 2. Slade 3. Lawler 4. Schramm 5. Smirnov 6. Werner 7. Stochastic Loewner Evolutions

1. Cardy