مقالهٔ کلاسیک

برخی کاربردهای توپولوژی در جبر

هاینتس هوپف

ترجمهٔ مهدی مجیدی ذوالبنین

مقالهٔ زیر که شاهکاری در زمینهٔ تألیف مقالات توصیفی ریاضی به‌شمار می‌رود برای اولین بار در سال ۱۹۵۲ در مجلهٔ *گزارشهای سمینار ریاضی دانشگاه و پلی‌تکنیک تورینو* به چاپ رسید و در واقع، متن سخنرانیهای هاینتس هوپف در دانشگاههای تورینو و جنوا بود. در سال ۱۹۹۴، مجلهٔ *اِلِمِنته دِر ماتماتیک* (*Elemente der Mathematik*) چاپ سوئیس، این مقاله را در ویژه‌نامهٔ صدمین سال تولد هاینتس هوپف به چاپ رساند. عنوان مقاله در زبان اصلی، **Einige Anwendungen der Topologie auf die Algebra** است.

با وجود دوگانگی روشهای جبریِ محض و روشهای توپولوژیکِ محض، که اغلب با واژه‌های «گسسته» و «پیوسته» توصیف می‌شوند، همان‌طور که می‌دانیم، همبستگیها و روابط متعدد و مختلفی بین جبر و توپولوژی وجود دارد. من در این سخنرانی از میان انبوه این روابطْ چند مورد خاص را برخواهم گزید. همهٔ این موارد به یک بخشِ در واقع قدیمی از ریاضیات تعلق دارند، و کاربرد روشهای توپولوژیک در جبرِکلاسیک و «غیرنوین» هستند، یعنی جبری که بر روی هیأت اعداد حقیقی یا هیأت اعداد مختلط بنا می‌شود. بدین‌ترتیب در اینجا کم‌وبیش با اثبات وجود صفرهای چندجمله‌ایها یا دستگاههای چندجمله‌ای سروکار خواهیم داشت. از آنجا که مفاهیم پیوستگی دقیقاً همان چیزی است که باعث تمایز هیأتهای اعداد حقیقی و اعداد مختلط با سایر هیأتهای جبری می‌شود، عجیب نیست که روشهای توپولوژیک و در نتیجه، روشهای «هندسهٔ پیوسته» در اینجا کارایی زیادی دارند. به‌علاوه بخشهایی از هندسهٔ جبری کلاسیک مانند قضایای نقطهٔ بُرشی و نتایج آن نیز جایگاهی طبیعی در این بحث دارند ولی من نمی‌خواهم در این سخنرانی دربارهٔ مسائلی که در میان متخصصان هندسهٔ جبری مطرح است صحبت کنم. قصد من بیشتر آن است که نه تنها بار دیگر قابلیت کاربرد روشهای توپولوژیک در جبر را نشان بدهم، بلکه همزمان توجه جبردانها را به برخی قضیه‌ها و مسأله‌های جبریِ کمتر شناخته‌شده، که در جریان تحقیقات توپولوژیک پدیدار شده‌اند جلب کنم.

۱. شاید قدیمیترین مثال در زمینهٔ به‌کارگیری روشهای توپولوژیک برای اثبات یک قضیهٔ جبری، استدلالی باشد برای اثبات اینکه هر چندجمله‌ای

هاینتس هوپف (Heinz Hopf)، یکی از چهره‌های بارز ریاضیات در نیمهٔ اول قرن بیستم، درسال ۱۸۹۴ در شهر برسلاو آلمان (وروتسلافِ فعلی در لهستان) متولد شد. وی در دانشگاههای برلین، هایدلبرگ و گوتینگن به تحصیل پرداخت و زیرنظر ارهات اشمیت در برلین رسالهٔ دکتری خود را گذراند. هوپف در دههٔ ۱۹۲۰ از افکار مکتب می‌نوتر بهره گرفت و دوستی و همکاریِ علمی درازمدتی را با الکساندروف ریاضیدان روسی برقرارکرد که یکی از ثمرات آن کتاب معروف *توپولوژی* آن دو است. در سال ۱۹۳۱ که هرمان وایل زوریخ را ترک کرد، هوپف صاحب کرسی استادی ریاضیات در دانشگاه صنعتی فدرال (ETH) سوییس شد و بقیهٔ زندگی علمی خود را درآن دانشگاه گذراند. وی درسال ۱۹۷۱ درگذشت.

هوپف یکی از بنیانگذاران توپولوژیِ جبری و از نخستین ریاضیدانانی است که به جای ناورداهای عددی، ناورداهای جبری (گروه، حلقه، ...) را به‌ساختارهای توپولوژیک و هندسی نسبت داد. مفاهیم و قضایای متعددی در توپولوژیْ نام هوپف را برخود دارند (قضیهٔ پوانکاره‌ـهوپف، ناوردای هوپف، کلاف هوپف، ...). وی درسال ۱۹۵۵ به ریاست اتحادیهٔ بین‌المللی ریاضیدانان منصوب شد و تحت رهبری او بود که این اتحادیه که در زمان جنگ جهانی دوم متلاشی شده بود، به یک مجمع منسجم و فراگیر بین‌المللی مبدل شد.

حقیقی

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \qquad (۱.۱)$$

که درجهٔ آن فرد باشد، دارای یک صفر حقیقی است. باتوجه به تعمیمهای بعدی، مسیر این استدلال را با ذکر جزئیات مشخص می‌کنم. قرار می‌دهیم

$$g(x) = x^n, h(x) = a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 \qquad (۲.۱)$$

در نتیجه

$$f(x) = g(x) + h(x) \qquad (۳.۱)$$

و

(۴.۱) $|h(x)| < |g(x)|$ بهازای $|x|$بزرگ

بنابراین

(۵.۱) $\mathrm{sign}.f(x) = \mathrm{sign}.g(x)$ بهازای $|x|$بزرگ

از آنجا که n فرد است، $g(x) = x^n$ همواره با x هم‌علامت است و بدین‌ترتیب، از (۵.۱) نتیجه می‌شود

(۶.۱) $f(r) > 0$ ، $f(-r) < 0$ r مثبت بزرگ

تا اینجا اثبات ماهیت جبری داشته است؛ اکنون از پیوستگی f استفاده کرده قضیهٔ بولتسانو را بهکار می‌بندیم، یعنی قضیهٔ توپولوژیک زیر که من آن را B_1 خواهم نامید: «هرگاه تابع حقیقی f که دربازهٔ E پیوسته است، در دو نقطهٔ انتهایی E دارای مقادیری با علامتهای متفاوت باشد، آنگاه f دارای صفری در E است.» از اینجا و از (۶.۱) وجود صفری برای چندجمله‌ای $f(x)$ نتیجه می‌شود.

در اثبات معروف زیر برای «قضیهٔ اساسی جبر»، یعنی این قضیه که هر چندجمله‌ای مختلط با درجهٔ مثبت دارای یک صفر است، از استدلالی کاملاً مشابه استفاده می‌شود. فرض کنید در (۱.۱)، a_iها اعداد مختلط و x متغیری مختلط باشند. با تعریفهای (۲.۱)، روابط (۳.۱) و (۴.۱) مانند بالا برقرار خواهند بود. این‌بار به‌جای مطالب بالا در مورد علامتها، مطالبی در مورد «عدد پیچش» ذکر می‌شود: نگاشتهایی از صفحهٔ مختلط x به صفحه مختلط y را که بهصورت $y = f(x)$ و $y = g(x)$ به‌دست می‌آیند، در نظر می‌گیریم. (به بیان ساده f و g دو تابع پیوستهٔ دلخواه‌اند). وقتی x روی دایرهٔ S_r که بهصورت $|x| = r$ مشخص می‌شود حرکت کند، تصویر آن، $f(x)$، به دفعات معینی (برابر با تغییرات شناسهٔ آن تقسیم بر 2π) حول نقطهٔ $y = 0$ می‌پیچد. این عدد را با $C[f(S_r)]$ نشان می‌دهیم. بههمین ترتیب $C[g(S_r)]$ نیز تعریف می‌شود. (در اینجا به‌علاوه فرض می‌کنیم که نقطهٔ $y = 0$ روی $f(S_r)$ و $g(S_r)$ قرار نگرفته باشد). یک نتیجهٔ هندسی ساده، که اصل روشه* نامیده می‌شود، نشان می‌دهد که اگر $f(x) = g(x) + h(x)$ و $|h(x)| < |g(x)|$ بهازای $|x| = r$، آنگاه $C[f(S_r)] = C[g(S_r)]$. بدین‌ترتیب در مورد چندجمله‌ایهای f و g نیز به‌خاطر (۴.۱)، همانند (۵.۱)، نتیجه می‌شود که

(۵'.۱) $C[f(S_r)] = C[g(S_r)]$ بهازای rبزرگ

از $g(x) = x^n$ بهروشنی نتیجه می‌شود

(۷.۱) $C[g(S_r)] = n$ بهازای هر $r > 0$

از اینجا مشابه با (۶.۱) نتیجه می‌شود

(۶'.۱) $C[f(S_r)] = n \neq 0$ بهازای r بزرگ

اکنون از قضیهٔ توپولوژیک B_2 استفاده می‌کنیم که تعمیم مستقیمی از قضیهٔ B_1 است: «فرض کنید f چنین نگاشت پیوسته‌ای از ناحیهٔ دایره‌ای E محدود به S_r، به صفحهٔ y باشد، بهطوری که $C[f(S_r)] \neq 0$. در این‌صورت، نقطه‌ای در E وجود دارد که توسط f به صفر صفحهٔ y نگاشته می‌شود». از اینجا و از (۶'.۱) وجود صفری برای چندجمله‌ای $f(x)$ نتیجه می‌شود[۱]. من قضیهٔ B_2 را در اینجا اثبات نخواهم کرد، و بهطور کلی در این سخنرانی هرگز در مورد اثبات قضیه‌های توپولوژیک صحبت نمی‌کنم و فقط به چگونگی استنتاج قضیه‌های جبری از قضیه‌های توپولوژیک خواهم پرداخت. قضیهٔ B_2 فقط حالت خاصی است از یک قضیهٔ B_k که ناظر به نگاشتهای پیوسته از یک فضای اقلیدسی kبعدی به فضایی همانند می‌باشد. در اینجا می‌خواهم در مورد این قضیهٔ کلی و یک کاربرد آن صحبت کنم. فرض کنید فضای x و فضای y، فضاهای kبعدی اقلیدسی باشند. در این فضاها از نماد جمع برداری استفاده می‌کنیم و نرم اقلیدسی را با $|x|$ و $|y|$ نمایش می‌دهیم. S_r کرهٔ $(k-1)$بعدیِ مشخص‌شده بهوسیلهٔ $|x| = r$ است، E کرهٔ توپر kبعدی احاطه‌شده توسط S_r است، f نگاشت پیوسته‌ای است از E به فضای y که در آن نقطهٔ $y = 0$، که من آن‌را به اختصار o خواهم نامید، روی تصویر $f(S_r)$ قرار ندارد. اکنون، عدد $C[f(S_r)]$ که آن‌را «مرتبهٔ o نسبت به $f(S_r)$» و یا «شاخص کرونکر f روی S_r» می‌نامند، به‌صورت زیر تعریف می‌شود: این عدد، درجهٔ براوئری نگاشتی از S_r به S'_1 (که در فضای y بهصورت $|y| = 1$ مشخص می‌شود) است که با تصویر کردن $f(S_r)$ از نقطهٔ o روی S'_1 به‌دست می‌آید (و درجهٔ نگاشت، به‌عنوان تعداد پوششهای مثبت S'_1 بهوسیلهٔ تصویر S_r منهای تعداد پوششهای منفی مشخص می‌شود). بهسادگی دیده می‌شود که این عدد بهازای $k = 2$، همان عدد پیچش است. اکنون قضیهٔ B_k، که آن‌را «قضیهٔ وجودی کرونکر» نیز می‌نامند چنین می‌گوید: «اگر $C[f(S_r)] \neq 0$، آنگاه نقطه‌ای مانند x در E وجود دارد که $f(x) = 0$»[۲].

این قضیه کاربردهای متعددی در قضایای وجودی صفرهای دستگاههای توابع دارد، بهویژه هنگامی که آن‌را با اصلِ پیشگفتهٔ روشه که برای فضای kبعدی درست همانند صفحه بیان و اثبات می‌شود، ترکیب کنیم. بهویژه، از طریق همان نتایجی که پیشتر ما را بهسمت اثبات قضیهٔ اساسی جبر کشاند،

---

۱. در اثباتهای متداول، به‌جای قضیهٔ توپولوژیک B_2ی فوق، قضیهٔ آنالیزی زیر را بهکار می‌برند: «اگر f تحلیلی باشد، آنگاه:
$C[f(S_r)] = (2\pi i)^{-1} \oint f^{-1} f' dz = E$ تعداد صفرهای f در».

۲. رجوع کنید به
Alexandroff-Hopf. *Topologie I* (Berlin 1935), 12. Kap. §§ 1.2.

* Roché

می‌توان اکنون قضیهٔ زیر را به‌دست آورد: «فرض کنید f نگاشت پیوسته‌ای از کل فضای x به فضای y باشد و فرض کنید بتوان آن‌را (با نماد جمع برداری) به‌صورت (۳.۱) نوشت، طوری که (۴.۱) برقرار باشد. به‌علاوه، فرض کنید

$$C[g(S_r)] \neq 0 \qquad (\text{برای } r \text{ بزرگ}) \qquad (۸.۱)$$

آنگاه نقطهٔ xی وجود دارد که $f(x) = 0$.»

به‌عنوان مثالی خاص از این قضیه، در مورد «قضیهٔ اساسی جبر برای کواترنیونها» (متعلق به آیلنبرگ و نیون[۳]) صحبت می‌کنم: فرض کنید a_iها کواترنیونهای همیلتنی و x متغیری کواترنیونی باشد. یک «تکجمله‌ای از درجهٔ n» حاصلضربی به‌صورت $a_0 x a_1 x \ldots a_{n-1} x a_n$ است که در آن $a_i \neq 0$؛ و یک چندجمله‌ای نسبت به x، مجموعی متناهی از تکجمله‌ایهاست. در اینجا توجه می‌کنیم که به‌دلیل فقدان قانون تعویض‌پذیری، مجموع دو تکجمله‌ای با درجهٔ یکسان، در حالت کلی یک تکجمله‌ای نیست. «قضیهٔ اساسی» می‌گوید: «*اگر چندجمله‌ای کواترنیونی $f(x)$ دقیقاً یک تکجمله‌ای از درجهٔ n دربر داشته باشد و سایر تکجمله‌ایها از درجهٔ کمتر باشند، آنگاه کواترنیونی* چون x_0 وجود دارد که $f(x_0) = 0$».

برای اثبات این قضیه، فرض کنیم $g(x)$ تکجمله‌ایِ از درجهٔ n موجود در $f(x)$ باشد و $h(x)$ را مانند (۳.۱) تعریف می‌کنیم. در این‌صورت به‌آسانی ملاحظه می‌شود که (۴.۱) برقرار است. تنها (۸.۱) برای اثبات باقی می‌ماند و در واقع نشان‌دادن اینکه (۷.۱) و به‌دنبال آن (۸.۱) برقرارند، زیاد مشکل نیست.

در اینجا نمی‌خواهم وارد کاربردهای بعدی قضیهٔ وجودی کرونکر شوم. بسیاری از این کاربردها بیشتر به آنالیز منتهی می‌شوند تا به جبر. اکنون می‌خواهم در مورد کاربردهای روشهای توپولوژیک در جبر خطی صحبت کنم.

۲. مثال زیر، نمونهٔ خوبی از کاربرد سادهٔ توپولوژی در جبر خطی است: با کمک قضیهٔ کلاسیک نقطهٔ ثابت براوئر، که می‌گوید «هر نگاشت پیوسته از هر سادکِ با بعد دلخواه به خودش، دارای نقطهٔ ثابت است»[۴]، قضیهٔ زیر (متعلق به فروبنیوس) به‌آسانی اثبات می‌شود: «*هر ماتریس مربعی با درایه‌های حقیقیِ غیرمنفی، دارای یک مقدار ویژهٔ حقیقی غیرمنفی است.*»

در واقع اگر (a_{ij}) یک ماتریس مربعی حقیقی از درجهٔ n باشد و $a_{ij} \geq 0$، برای هر nتایی حقیقی $x = (x_1, \ldots, x_n)$ قرار می‌دهیم $\sum a_{ij} x_j = f_i(x)$. باید نشان دهیم که عدد $\lambda \geq 0$ و nتایی $x \neq (0, \ldots, 0)$ وجود دارند به‌طوری که

$$f_i(x) = \lambda x_i\,, \qquad i = 1, 2, \ldots, n \qquad (۱.۲)$$

مجازیم فرض کنیم که هیچ nتایی $x \neq (0, \ldots, 0)$ وجود ندارد که به‌ازای آن، همهٔ f_iها صفر شوند، زیرا یک چنین nتایی، جوابی از (۱.۲) با ضابطهٔ $\lambda = 0$ است. مختصات فضای تصویری $(n-1)$بعدی P را به‌صورت

۳. رجوع کنید به

S. Eilenberg und I. Niven, The *Fundamental theorem of Algebra* for Quaternions. Bulletin Am. Math. Soc. 50 (1944).

۴. اثبات این قضیه در صفحات ۳۷۷، ۴۸۰، و ۵۳۲ از مرجع ذکرشده در پانوشت ۲ آمده است.

$x_1 : x_2 : \cdots : x_n$ نمایش می‌دهیم، در این‌صورت از طریق

$$x_i = f_i(x)$$

نگاشت $x' = f(x)$ از P به خودش تعریف می‌شود که سادک $(n-1)$بعدی T را که به‌صورت

$$x_1 \geqslant 0, \ldots, x_n \geqslant 0$$

مشخص می‌شود، به‌خودش می‌نگارد. در T نقطهٔ ثابتی برای f وجود دارد. (۱.۲) به‌ازای این نقطه صادق است و در نتیجه، چون به‌ازای $i = 1, \ldots, n$، $x_i \geq 0$ و $f_i \geq 0$ ولی همهٔ x_iها صفر نیستند، پس $\lambda \geq 0$ (و به دلیل فرضی که در بالا کردیم، حتی $\lambda > 0$).

بدین‌ترتیب، نه‌تنها قضیهٔ فروبنیوس بلکه تعمیم زیر نیز اثبات می‌شود: «فرض کنید توابع حقیقی $f_1, \ldots, f_n$ از متغیرهای حقیقی $x_1, \ldots, x_n$ همه‌جا پیوسته باشند و به‌ازای xهای مثبت، غیرمنفی باشند. در این‌صورت عدد $\lambda \geq 0$ و nتایی $x = (x_1, \ldots, x_n) \neq (0, \ldots, 0)$ با ضابطهٔ $x_i \geq 0$ به‌ازای هر i، وجود دارند چنانکه (۱.۲) برقرار است.» این شرایط به‌طور مثال هنگامی برآورده می‌شوند که f_iها چندجمله‌ایهایی با ضرایب مثبت باشند؛ در این‌صورت یک قضیهٔ جدید جبری خواهیم داشت.

۳. این واقعیت ساده که هر ماتریس مربعیِ حقیقی از درجهٔ فرد، همواره یک مقدار ویژهٔ حقیقی دارد، نقطهٔ شروع مناسبی است برای کاربردهای بعدی توپولوژی در قضیه‌های وجود مقدارهای ویژه حقیقی و قضیه‌های همخانوادهٔ آن در جبر خطی. هرچند این قضیه به‌سادگی از این موضوع نتیجه می‌شود که معادلهٔ مشخصهٔ ماتریس از درجهٔ فرد است و یک ریشهٔ حقیقی دارد و هرچند قضیه ارزش جستجو برای یافتن اثباتهای دیگر را ندارد، من می‌خواهم آن‌را به‌شکلی دیگر براساس دیدگاهی توپولوژیک اثبات کنم، زیرا این دیدگاه ما را به سمت تعمیمهایی خواهد کشاند که چندان هم قابل انتظار نیستند.

قضایای توپولوژیکی که در اینجا وارد کار می‌شوند، با میدانهای برداری مماس و پیوسته روی کره‌ها سروکار دارند. بر روی کرهٔ $(n-1)$بعدی S^{n-1} که گاهی در فضای اقلیدسی $(x_1, \ldots, x_n)$، $\mathbb{R}^n$، به‌صورت $\sum x_i^2 = 1$ مشخص می‌شود، می‌توان وقتی n زوج است، یک میدان برداری مماس و پیوسته طوری ساخت که همواره به نقطهٔ $(x_1, \ldots, x_n)$، بردار $\{-x_2, x_1, \ldots, -x_n, x_{n-1}\}$ منسوب شود. وقتی n فرد باشد چنین چیزی غیرممکن است، زیرا قضیهٔ زیر که پوانکاره آن‌را به‌ازای $n = 3$ و براوئر در حالت nهای بزرگتر ثابت کردند و من آن‌را «قضیهٔ مماسها» خواهم نامید، برقرار است: «برای nهای فرد، روی کرهٔ S^{n-1} هیچ میدان برداری مماس و پیوستهٔ بدون تکینگی وجود ندارد». از اینجا قضیهٔ زیر که گاهی آن‌را «قضیهٔ خارپشت» می‌نامند (زیرا برای $n = 3$ شامل تعبیری در مورد خارهای خارپشت است) به‌آسانی نتیجه می‌شود: «برای nهای فرد، در هر میدان برداری پیوسته (و در حالت کلی غیرمماس)، برداری عمود بر S^{n-1} وجود دارد». زیرا در غیر این‌صورت مؤلفه‌های مماس این بردارها یک میدان برداری مماس پیوسته می‌ساختند که با قضیهٔ مماسها تناقض دارد.[۴الف]

وجود یک مقدار ویژهٔ حقیقی برای ماتریس مربعی nسطری حقیقی $A = (a_{ij})$ وقتی n فرد است، نتیجه‌ای از قضیهٔ خارپشت است: فرض

۴الف. صفحهٔ ۴۸۱ از مرجع ذکرشده در پانوشت (۲).

کنید به هر نقطهٔ $x=(x_1,\dots,x_n)$ از S^{n-1} بردار $\mathfrak{p}'=A\mathfrak{p}$، یعنی برداری را که از بردار $\mathfrak{p}=\{x_1,\dots,x_n\}$ تحت تبدیل خطی A حاصل می‌شود، منسوب کنیم. اگر A تکین باشد، $\lambda=0$ یک مقدار ویژه است، اگر A ناتکین باشد، بردارهای $\mathfrak{p}'$ یک میدان برداری پیوسته روی S^{n-1} می‌سازند. بنابه قضیهٔ خارپشت، جایی مثل x هست که در آن، جهت $\mathfrak{p}'$ عمود و در نتیجه هم‌جهت با $\mathfrak{p}$ است. در این نقطه $\mathfrak{p}'=A\mathfrak{p}=\lambda\mathfrak{p}$ و λ یک مقدار ویژهٔ A است.

در حال حاضر، این واقعیت ساده و مسلم که روی هر کرهٔ S^{n-1} با n زوج، همواره یک میدان مماس پیوسته وجود دارد باعث طرح این پرسش شده است که آیا ممکن است بتوان روی چنین کره‌ای میدان دیگری در نظر گرفت که نسبت به میدان قبلیْ مستقل خطی باشد؟ و یا شاید میدان سوّمی و غیره؟ این پرسش را می‌توان به‌صورت دقیق زیر بیان کرد: «برای n داده‌شده، حداکثر تعداد میدانهای برداری پیوسته که می‌توانند به‌صورت مستقل خطی روی S^{n-1} وجود داشته باشند، چندتاست؟» هرچند تاکنون موفق به تعیین این عدد برای n دلخواه نشده‌ایم، ولی در هر صورت قضیهٔ زیر اثبات شده است: «فرض کنید

$$n=2^m.q,\quad q \text{ فرد} \qquad (۱.۳)$$

و فرض کنید روی S^{n-1} تعداد $r-1$ میدان برداری پیوسته وجود داشته باشد که در هر نقطه مستقل خطی باشند. در این‌صورت

$$r\le 2^m \qquad (۲.۳)$$

یعنی تعداد میدانها از 2^m کمتر است». برای nهای فرد، یعنی برای $2^m=1$، این همان قضیهٔ مماسهاست. برای $n=4k+2$، یعنی برای $2^m=2$، قضیه می‌گوید که برای هر دو میدان مماس و پیوسته روی S^{4k+1} نقطه‌ای وجود دارد که در آن، جهت هر دو میدان یکسان و یا معکوس هم است و غیره. قضیهٔ فوق در این شکل کلی، نخستین‌بار در ۱۹۵۱ توسط هنری وایتهد اثبات شد[۵]، ولی قبل از آن اشتیفل قضیه را برای میدانهای برداری روی فضاهای تصویری $(n-1)$بعدی و یا به‌صورت معادل، برای میدانهایی روی کرهٔ S^{n-1} که تحت تصویر نسبت به مرکز کره به خودشان می‌روند، اثبات کرده بود. از این قضیهٔ خاص، اشتیفل برخی نتایج جبری بیرون کشید که اکنون دربارهٔ آنها صحبت خواهیم کرد[۶].

فرض کنید $A_1,\dots,A_r$ ماتریسهای مربعی حقیقی از درجهٔ n باشند. این ماتریسها، دسته‌ای خطی از ماتریسها چون

$$y_1A_1+\cdots+y_rA_r \qquad (۳.۳)$$

تولید می‌کنند که $y_1,\dots,y_r$ ضرایب حقیقی دلخواه هستند. این دسته را «منظم» می‌نامیم در صورتی‌که همهٔ ماتریسهای (۳.۳) مگر ماتریس $(y_1,\dots,y_r)=(0,\dots,0)$ منظم باشند. در این حالت این قضیه برقرار است: «*اگر (۱.۳) برقرار باشد و اگر یک دستهٔ منظم (۳.۳) با r ضریب وجود داشته باشد، آنگاه (۲.۳) برقرار است*».

می‌خواهیم این قضیه را بلافاصله از قضیهٔ بالا در مورد میدانهای برداری روی کره‌ها نتیجه بگیریم: از آنجا که دستهٔ (۳.۳) منظم است، ماتریس A_r نیز منظم خواهد بود. یعنی ماتریس منظم A_r^{-1} وجود دارد. چون با ضرب کردن همهٔ ماتریسها در یک ماتریس منظم معلوم، به‌طور مثال در A_r^{-1}، چیزی عوض نمی‌شود، مجازیم از ابتدا فرض کنیم: $A_r=E$ (ماتریس واحد). برای هر بردار واحد $\mathfrak{p}$ در $\mathbb{R}^n$، به بردارهای $A_i\mathfrak{p}=\mathfrak{p}_i$ (یعنی بردارهایی که $\mathfrak{p}$ توسط نگاشتهای خطی A_i به آنها نگاشته می‌شود) توجه می‌کنیم. $\mathfrak{p}=\mathfrak{p}_r$ را به‌عنوان بردار مکان نقطهٔ x روی S^{n-1} در نظر می‌گیریم و به نقطهٔ x بردارهای $\mathfrak{p}_1,\dots,\mathfrak{p}_{r-1}$ را منسوب می‌کنیم. مؤلفه‌های مماسی $\mathfrak{p}_i$ نسبت به S^{n-1} بردارهای $\mathfrak{p}_i'=\mathfrak{p}_i-(\mathfrak{p}_i\mathfrak{p})\mathfrak{p}$ هستند. اکنون ابتدا از منظم‌بودن دسته ماتریسهای (۳.۳) استقلال خطی بردارهای $\mathfrak{p}_1,\dots,\mathfrak{p}_{r-1}$ و $\mathfrak{p}$ نتیجه می‌شود و سپس از اینجا استقلال خطی $r-1$ بردار $\mathfrak{p}_1',\dots,\mathfrak{p}_{r-1}'$ حاصل می‌شود. بدین‌ترتیب روی S^{n-1} دستگاهی از $r-1$ میدان برداری پیوستهٔ مستقل خطی وجود دارد و در نتیجه (۲.۳) برقرار است.

قضیه‌ای که در مورد دسته ماتریسها اثبات شد، به‌ازای nهای فرد، یعنی به‌ازای $2^m=1$ حاکی است که هر دستهٔ ۲پارامتری شامل یک ماتریس تکین است و این گفته معادل همان قضیهٔ قبلی در مورد وجود یک مقدار ویژهٔ حقیقی برای یک ماتریس با درجهٔ فرد است. این قضیه به‌ازای $n=4k+2$، یعنی $2^m=2$، می‌گوید که هر دستهٔ ۳پارامتری، شامل یک ماتریس تکین است و یا به عبارت دیگر، هر دستهٔ ۲پارامتری، ماتریسی با یک مقدار ویژهٔ حقیقی در بر دارد و غیره. به‌علاوه، نتیجهٔ زیر هم از قضیه‌مان به‌دست می‌آید: «*یک دسته ماتریس منظم nپارامتری از ماتریسهای nسطری فقط در صورتی ممکن است وجود داشته باشد که $n=2^m$*». به این سؤال که آیا به‌ازای هر n یک دسته ماتریس منظم 2^mپارامتری از ماتریسهای nسطری وجود دارد یا نه، جواب داده نشده است. به‌نظر می‌رسد جواب سؤال منفی باشد. مشخص شدن این مسأله، برای جبر و به‌همان اندازه برای توپولوژی روشنگر است.

حالت $r=n$ که حکم فوق راجع به آن است، در تحقیقات مربوط به جبرهای تقسیم شرکت‌ناپذیر روی هیأت اعداد حقیقی نقشی ایفا می‌کند. یک‌چنین جبری از درجهٔ n، به‌طوری که می‌دانید، به‌صورت زیر تشریح می‌شود: فضای برداری nبعدی حقیقی $\mathbb{R}^n$ با عملهای معمولیش، به‌همراه یک ضرب برداری که نسبت به جمع توزیع‌پذیر است و در قانون زیر که در آن A و B بردار و a و b عدد هستند صدق می‌کند

$$(aA).(bB)=(ab).(AB)$$

و بالاخره باید تقسیم بر هر بردار مخالف ۰ به‌صورت یکتا بامعنی باشد، به‌عبارت دیگر نباید هیچ مقسوم‌علیه صفری وجود داشته باشد. اما لازم نیست قانون شرکت‌پذیری ضرب برقرار باشد. اینکه ما در اینجا به جبرهای شرکت‌ناپذیر هم علاقه‌مندیم، هم بدان‌جهت است که ساختارهای شرکت‌ناپذیر

۵. رجوع کنید به
N.E. Steenrod and J.H.C. Whitehead, *Vector fields on the n-sphere*. Proc. Nat Acad. Sci. 37 (1951).

۶. رجوع کنید به
E. Stiefel. *Über Richtungsfelder in den projektiven Räumen und einen Satz aus der reellen Algebra*. Comment. Math. Helvet. 13 (1941)
و همچنین به
H. Hopf. *Ein topologischer Beittrag zur reellen Algebra*
در همانجا.

(مثل طوقها*) امروزه به‌هرحال موضوع تحقیقات جبری هستند و هم به‌خاطر آن است که یک جبر تقسیم شرکت‌ناپذیر روی هیأت اعداد حقیقی وجود دارد که به دلایل جبری و هندسی مهم و جالب است: دستگاه هشت‌تاییهای کیلی که از درجهٔ ۸ است[7].

بنابر یک قضیهٔ کلاسیک متعلق به فروبنیوس، اعداد مختلط و کواترنیونها تنها جبرهای تقسیم شرکت‌پذیر روی هیأت حقیقی هستند. یعنی در این حالت $n = ۲$ یا $n = ۴$. قضیه‌ای از هورویتس (در مورد قضیه‌های ضرب مجموعه‌های مربعی)[8] می‌گوید: تنها جبرهایی (نه لزوماً شرکت‌پذیر) که در آنها قانون ضرب نرمی $|AB| = |A|.|B|$ برقرار است (که عدم وجود مقسوم‌علیه صفر، یعنی خاصیت تقسیم را نتیجه می‌دهد) عبارت‌اند از دستگاه اعداد مختلط، کواترنیونها و هشت‌تاییهای کیلی. پس در این حالت، $n = ۲, ۴, ۸$. اینکه آیا برای درجه‌های nی غیر از ۲و۴و۸، جبرهای تقسیم (که در آنها، نه قانون شرکت‌پذیری و نه قانون ضرب نرمی، هیچکدام نمی‌توانند برقرار باشند) روی هیأت حقیقی وجود دارند یا نه، مشخص نیست. امّا نکتهٔ زیر در مورد این مسأله، از نظریهٔ اشتیفل که قبلاً در مورد آن صحبت کردیم به‌دست می‌آید: «*درجهٔ هر چنین جبری حتماً توانی از ۲ است*». در واقع، فرض کنید $n_1, \ldots, n_n$ بردارهای پایه برای یک‌چنین دستگاهی باشند و فرض کنید ضرب آنها به‌صورت

$$n_i n_j = \sum a_{ij}^k n_k \qquad (۴.۳)$$

تعریف شده باشد، به‌طوری که برای $A = \sum x^i n_i$ و $B = \sum y^j n_j$، حاصلضرب آنها، به‌صورت

$$AB = \sum z^k n_k, \qquad z^k = \sum x^i y^j a_{ij}^k$$

باشد. همچنین فرض کنید $AB = ۰$ و $B \neq ۰$، یعنی

$$\sum_i \Big(\sum_j y^j a_{ij}^k\Big) x^i = ۰, \qquad k = ۱, \ldots, n \qquad (۵.۳)$$

و $(y_1, \ldots, y_n) \neq ۰$. از آنجا که هیچ مقسوم‌علیه صفری وجود ندارد، دستگاه معادلات (۵.۳) تنها به‌ازای $A = (۰, \ldots, ۰)$ برقرار می‌شود، پس ماتریس $(\sum y^j a_{ij}^k)$ منظم است. این ماتریس برابر است با

$$y^1 A_1 + \cdots + y^n A_n \qquad \text{که} \qquad A_j = (a_{ij}^k)$$

(که در آن i و k اندیس سطرها و ستونها هستند). بدین‌ترتیب، یک دستهٔ منظم nپارامتری از ماتریسهای nسطری داریم. بنابراین همان‌طور که قبلاً دیده‌ایم، $n = ۲^m$.

امّا اینکه آیا چنین جبرهایی برای $n = ۲^m \geq ۱۶$ وجود دارد یا نه، مشخص نیست.

۴. اکنون می‌خواهم با یک روش توپولوژیک که با آنچه تا اینجا دیده‌ایم کاملاً تفاوت دارد، قضیه‌ای جبری ثابت کنم که کاملاً در محدودهٔ بحث ماست.

اگر به اصول موضوع «جبرهای تقسیم روی هیأت حقیقی که ممکن است شرکت‌پذیر نباشند»، این شرط را هم بیفزاییم که ضرب باید تعویض‌پذیر باشد، آنگاه طبیعی است که وضعیت بسیار ساده‌تر خواهد شد و جای تعجب ندارد که دیگر مسأله حل‌نشده‌ای وجود نداشته باشد. در واقع، این قضیه[9] برقرار است: «*یک جبر تقسیم تعویض‌پذیر روی هیأت اعداد حقیقی، شرکت‌پذیر یا شرکت‌ناپذیر، از درجهٔ ۲ است*».

اگر علاوه بر این، این شرط را هم اضافه کنیم که جبر باید عنصر یک نیز داشته باشد، آنگاه از قضیهٔ فوق با استفاده از احکامی کاملاً مقدماتی نتیجه می‌شود که جبر مذکور همان هیأت اعداد مختلط است. بنابراین می‌توان گفت: برای هر جبر (از درجهٔ متناهی) روی هیأت اعداد حقیقی، قانون شرکت‌پذیری ضرب نتیجه‌ای از ویژگی تقسیم (عدم وجود مقسوم‌علیه صفر)، قانون تعویض‌پذیری، و وجود عنصر یک است.

اکنون به اثبات توپولوژیک قضیه می‌پردازیم. برتری عدد ۲ بر اعداد بزرگ‌تر از آن در قضیهٔ فوق، به‌صورت زیر مشخص می‌شود: به‌ازای $n = ۲$، ولی نه به‌ازای $n > ۲$، کره‌های $(n - ۱)$بعدی S^{n-1} و فضاهای تصویری حقیقی $(n - ۱)$ بعدی P^{n-1} با هم همسان‌ریخت (از نظر توپولوژیک معادل) هستند. در واقع، دایرهٔ S^1 و خط تصویری P^1 خطهای بستهٔ ساده‌ای هستند، درحالی‌که به‌ازای $n > ۲$، هر چند کرهٔ S^{n-1} ساده‌ـهمبند است (یعنی می‌توان هر مسیر بسته روی آن‌را به یک نقطه تبدیل کرد) ولی فضای تصویری P^{n-1} چنین نیست (زیرا مثلاً در آن، یک خط تصویری قابل انقباض نیست).

اکنون جبری از درجهٔ n در نظر می‌گیریم که همهٔ ویژگیهای قید شده را داشته باشد. فرض کنید در فضای $\mathbf{R}^n$، که بردارهای آن اعضای جبر هستند، o نقطهٔ صفر باشد. کلاف خطوط گذرا از o نمایشگر یک P^{n-1} و خمینهٔ نیم‌خطهای خارج شونده از o نمایشگر یک S^{n-1} هستند. فرض کنید q نگاشتی از $\mathbf{R}^n$ به خودش باشد که به هر بردار A مربع آن $A.A = A^2$ (به مفهوم ضرب در جبر موردنظر) را نسبت می‌دهد: $q(A) = A^2$. به‌ازای هر عدد حقیقی c داریم $q(cA) = C^2 A^2$؛ بنابراین، q هر خط راست گذرا از o را بر یک نیمخط خارج شونده از o می‌نگارد. پس نگاشتی چون Q از P^{n-1} به S^{n-1} به‌دست می‌آید. طبیعی است که Q پیوسته است. من ادّعا می‌کنم: Q یک‌به‌یک است. فرض کنید A و B دو بردار باشند که خطوط هم‌راستای آنها هر دو به یک نیمخط نگاشته می‌شوند. در این صورت $q(A)$ و $q(B)$ تنها در یک ضریب حقیقی با هم تفاوت دارند که منفی نیست و در نتیجه می‌توانیم آن‌را c^2 بنامیم

$$B^2 = c^2 A^2$$

* loops

۷. رجوع کنید به
L. E. Dickson, *Algebren und ihre Zahlentheorie* (Zürich 1927) §133.

۸. رجوع کنید به
A. Hurwitz, *Über die Komposition der quadratischen Formen von beliebig vielen Variablen*, Nachr. Ges. d. Wiss. Göttingen 1898 (=Math. Werke. Bd. II (Basel 1933), p. 565).

۹. رجوع کنید به
H. Hopf, *Systeme symmetrischer Bilinearformen und euklidische Modelle der projektiven Räume*, Vierteljahrsschrift Naturf. Ges. Zürich, LXXXV (1940), (=Festschrift *Rudolf Fueter*), p. 165

به‌خاطر خاصیت تعویض‌پذیری

$$B^2 - c^2A^2 = (B+cA)(B-cA)$$

پس

$$(B+cA|)(B-cA) = 0$$

و چون مقسوم‌علیه صفر وجود ندارد

$$B = \pm cA$$

یعنی: A و B روی یک خط راست قرار دارند. بدین‌ترتیب، یک نگاشت پیوسته و یک‌به‌یک Q از P^{n-1} به S^{n-1} داریم. اما P^{n-1} و S^{n-1} خمینه‌هایی بسته هستند و از احکام کاملاً ساده و کلّی توپولوژی نتیجه می‌شود که Q یک همسانریختی است. بنابراین $n - 1 = 1$ و $n = 2$.

بدین‌ترتیب، قضیهٔ ما ثابت شده است. خاطرنشان می‌کنم که من برای این قضیه اثباتی نمی‌شناسم که با روشهای معمول جبری و بدون استفاده از توپولوژی انجام شود. یافتن چنین اثباتی را تمرین جالبی می‌دانم که با توجه به سادگی خودِ قضیه و اثبات توپولوژیکِ ما، گمان نمی‌کنم خیلی مشکل باشد.

۵. می‌توان قضیه‌ای را که هم‌اکنون اثبات کردیم طوری تغییر داد که یک پرسش جدید جبری که آن هم از طریق توپولوژی قابل بررسی است مطرح شود.

قضیهٔ ما می‌گوید: «فرض کنید $n > 2$ و نیز فرض کنید روی هیأت اعداد حقیقی، جبری از درجهٔ n داشته باشیم که لزوماً شرکت‌پذیر نیست ولی تعویض‌پذیر هست. در این‌صورت این جبر دارای مقسوم‌علیه صفر است». همان صورتبندی بخش ۳ را به‌کار می‌بریم، یعنی ضرب به‌صورت (۴.۳) داده شده است. در این‌صورت، n ماتریس

$$A^k = (a^k_{ij}), \quad k = 1, \ldots, n$$

(که در آن، حالا، i و j اندیسهای سطرها و ستونها هستند) به‌خاطر خاصیت تعویض‌پذیریِ ضرب، متقارن هستند. من نماد A^k را همزمان به‌عنوان تابعی که با صورت دو خطی متقارن

$$A^k(x,y) = \sum a^k_{ij} x^i y^j$$

داده می‌شود نیز به‌کار می‌برم. وجود مقسوم‌علیه صفر بدان معناست که دستگاه معادلات (۵.۳)، یعنی دستگاه

$$A^k(x,y) = 0, \quad k = 1, \ldots, n$$

دارای جوابی به‌صورت $x \neq (0, \ldots, 0)$ و $y \neq (0, \ldots, 0)$ است. این به زبان هندسی به معنی زیر است: «*فرض کنید در فضای تصویری حقیقی* P^d *از بعد* $d = n - 1$، $d + 1$ *رویهٔ درجهٔ ۲ به‌وسیلهٔ معادلات*

$$A^k(x,x) = 0, \quad k = 1, \ldots, n$$

داده شده باشند. در این‌صورت دو نقطهٔ حقیقی x *و* y *وجود دارند که نسبت به هر یک از این رویه‌ها قطبی‌اند*».

این قضیه با قضیهٔ ما در بخش ۴ در مورد جبرهای تقسیم تعویض‌پذیر معادل است. اما اکنون این سؤال طبیعی پیش می‌آید که آیا این ادّعا ــ یعنی وجود دو نقطه که نسبت به همهٔ رویه‌های داده شده قطبی‌اند ــ وقتی هم که بیشتر از $d + 1$ رویه داشته باشیم درست نخواهد بود؟ در واقع، اکنون با همین حالت سروکار داریم و قضیهٔ زیر برقرار است: «*در فضای تصویری حقیقی* P^d، $d > 1$، *فرض کنید* s *رویهٔ حقیقی درجهٔ ۲ داده شده باشند. در این‌صورت، هر یک از شرطهای (الف) و (ب) زیر برای وجود یک جفت نقطهٔ حقیقی* x *و* y *که نسبت به هر یک از رویه‌ها در وضعیت قطبی باشند، کافی است*،

(الف) $s \le d + 2$

(ب) $s \le 2^t - 1$ که $2^{t-1} \le d < 2^t$

شرط (الف) برای همهٔ dها و شرط (ب) برای بیشتر dها ــ یعنی برای آنهایی که برابر $2^t - 1$ یا برابر $2^t - 2$ نیستند ــ تعمیم قضیهٔ قبلی ما در مورد $d + 1$ رویه هستند. برای بیشتر dها، شرط (ب) بسیار از شرط (الف) بهتر است، یعنی بیشتر وقتها می‌توان خیلی بیش از $d + 2$ رویه در نظر گرفت. من نمی‌دانم بزرگترین عدد $s^* = s^*(d)$ که به‌ازای آن، وجود یک جفت نقطهٔ x و y به‌صورت ذکر شده، برای هر دستگاه n رویه‌ای تضمین می‌شود کدام است. می‌خواهم در اینجا به این مسأله که مربوط به هندسهٔ جبری حقیقی است اشاره کنم.

در مورد اثبات (الف) و (ب) باید گفت که (الف) را می‌توان با تعمیم نکتهٔ توپولوژیکِ بخش ۴ اثبات کرد. به‌جای استفاده از این حکم که به‌ازای $n > 2$ فضای تصویری P^{n-1} با کرهٔ S^{n-1} همسانریخت نیست، از این حکم قویتر استفاده می‌کنیم که P^{n-1} دارای الگویی توپولوژیک در فضای اقلیدسی $\mathbf{R}^n$ نیست.* شرط (ب) از قضیه‌ای متعلق به اشتیفل در چارچوب نظریه‌ای که در شمارهٔ ۳ از آن صحبت شد (ولی در آنجا آن‌را صورتبندی نکردیم**) در می‌آید. برای ملاحظهٔ جزئیات موضوع، شما را به نوشته‌های موجود ارجاع می‌دهم؛ نمی‌خواهم سخنانم را که تا همین‌جا هم طولانی شده است، طولانیتر کنم[۱۰].

۶. در اینجا فقط می‌خواهم چند تذکر دیگر بدهم که جنبهٔ کلی و اصولی دارند. در اینجا از قضیه‌های جبری صحبت کردیم که می‌توان آنها را با ابزار توپولوژیک اثبات کرد و تقریباً همهٔ آنها هم از راههای توپولوژیک به‌دست آمده‌اند. حال همان‌طور که در مقدمه گفتم، کاملاً میسر است که در جبر روی

* پانوشت ۹ را ببینید.

** پانوشت ۶ را ببینید.

۱۰. قضیه‌ها و اثباتهای دیگری را که در چارچوب این سخنرانی می‌گنجند، علاوه بر مراجعی که در زیرنویس ۶ به آنها اشاره شد، می‌توان در مراجع زیر نیز پیدا کرد:
H. Hopf und M. Rueff, *Über faserungstreue Abbildungen der Sphären*. Comment. Math. Helvet. 11(1939).— B. Eckmann. *Systeme von Richtungsfeldern in Sphären und stetige Lösungen komplexer linearer Gleichungen*. Comment. Math. Helvet. 15 (1943)
و همچنین، *Stetige Lösungen Linear Gleichungssysteme* در همانجا.

اعداد حقیقی (یا روی هیأت اعداد مختلط، که تفاوت اساسی با آن ندارد) از ابزار توپولوژیک استفاده شود، زیرا در تعریف اعداد حقیقی، مفاهیم پیوستگی پیش می‌آیند. باوجوداین، قابل درک است که وقتی در جریان تحقیقات توپولوژیک، قضایایی از نوع قضیه‌های جبری ذکر شده در بخشهای ۳ و ۴ و ۵ پیدا می‌شوند، رضایت کامل حاصل نشود و این تمایل وجود داشته باشد که برای این قضیه‌ها که آشکارا سرشتِ «جبری» دارند، اثباتهای جبری هم پیدا کنند. اما در اینجا ابتدا باید پرسید منظور از اثبات جبری چیست. من در موقعیتهای مختلف این‌طور پیشنهاد کرده‌ام (در این پیشنهاد همواره می‌توان قضیه‌هایی را که اینجا مورد بحث قرار دادیم در نظر داشت بدون اینکه به کلیت موضوع لطمه‌ای بخورد): «در صورتبندی قضیه‌ها، به‌جای هیأت اعداد حقیقی یک هیأت بستهٔ حقیقی به مفهوم نظریهٔ آرتین-شرایر[۱۱] درنظر گرفته شود و ادعاهای کلیتری که بدین‌ترتیب به‌دست می‌آیند اثبات شوند». در واقع، از این طریق، اصل ارشمیدسی، یعنی اصل پیوستگی کنار گذاشته می‌شود. این‌کار برای قضیهٔ مذکور در بخش ۳ و برای سایر قضیه‌های مربوط به آن، که من به آنها نپرداختم، به‌وسیلهٔ برند انجام شده است[۱۲]. هابیشت نیز برخی اثباتهای جبری محض برای قضیه‌های پیدا شده از طریق توپولوژی ـ به مفهومی که از پیشنهاد من بر می‌آید ـ یافته است[۱۳]. ولی برای قضیهٔ مذکور در بخش ۴، تا آنجا که من می‌دانم، متناظر آن تا کنون به‌دست نیامده است (که همان‌طور که در انتهای بخش ۴ گفتم، من از این امر تعجب می‌کنم، به‌ویژه که حقایق توپولوژیکی که در بخش ۴ ظاهر می‌شوند، از آنهایی که در شمارهٔ ۳ ظاهر می‌شوند، بسیار ساده‌ترند). این مسأله، به‌واسطهٔ نتایج تحقیقات تارسکی در نظریهٔ برهان[۱۴]، جهتی کاملاً نو و به نظر من بسیار شگفت‌انگیز یافته است. برای دستهٔ بزرگی از قضیه‌های «جبری»، که من در اینجا آن را تعریف نمی‌کنم، ولی در هر حال قضیه‌های مورد بحث در بالا را هم در بر دارد، همان‌طور که تارسکی نشان داده است، این حکم برقرار است: «اگر چنین قضیه‌ای نسبت به یک هیأت بستهٔ حقیقی قابل اثبات باشد، آنگاه نسبت به هر هیأت بستهٔ حقیقی برقرار است» ـ به‌عنوان نمونه، در نتیجهٔ آن، قضیهٔ ما در بخش ۴ در واقع برای هر هیأت بستهٔ حقیقی برقرار است و اثبات این، دو قسمت دارد: اول اثبات توپولوژیک ما برحسب هیأت اعداد حقیقی و دوم به‌کارگیری اصل تارسکی.

به‌خاطر این اصل، پیشنهادی که در بالا ارائه کردم و نیز کارهای برند و هابیشت که به آنها اشاره شد تقریباً بیفایده شده‌اند. با وجود این، نمی‌توان این کارها و کارهای مشابه را حتی امروز، بی‌محتوا دانست زیرا به این وسیله، به قضیه‌هایی که از طریق توپولوژی به‌دست آمده‌اند، از دیدگاه جدید جبری نگریسته می‌شود و من گمان نمی‌کنم که اثباتِ فرا ریاضیاتی-توپولوژیک برای قضایای راجع به جبرهای تقسیم تعویض‌پذیر، که در بالا از آنها صحبت کردیم، خیال جبردانها را راحت کند. اگر هدفْ دستیابی به صراحت و روشنی باشد، باید این سؤال را که «اثبات جبری چیست؟» به‌صورت اصولی مورد بحث قرار داد، ولی طبیعی است که چنین بحثی از محدودهٔ این مقال بسیار فراتر می‌رود.

توضیح مجلهٔ *الیِنته در ماتماتیک*. هویف در سخنرانیش به تعدادی مسألهٔ حل‌نشده اشاره می‌کند. بیشتر این مسأله‌ها هنوز هم حل نشده‌اند و فقط مسائل مربوط به وجود میدانهای برداری مستقل خطی روی کره‌ها و همچنین وجود جبرهای تقسیم حقیقی، از این امر مستثنا هستند. در این زمینه، کروِر[1] و میلنر[2] (در ۱۹۵۸) و کمی دیرتر، آدامز[3] (در ۱۹۶۰) نتایج پیشگامانه‌ای به‌دست، آوردند. به دنبال حصول این نتایج، امروز می‌دانیم که روی کره‌های S^{n-1} تنها به‌ازای $n = 2, 4, 8$ وجود دستگاهی از $n-1$ میدان برداری مماس پیوستهٔ مستقل خطی امکان دارد. در نتیجه، تنها در بعدهای ۱، ۲، ۴، ۸ وجود جبرهای تقسیم حقیقی امکان‌پذیر است. برای این قضیه در مورد جبرهای تقسیم، به‌نظر می‌رسد تا امروز هیچ اثباتی وجود نداشته است که در آن از ابزار قوی توپولوژیک (و نیز قضیهٔ تناوب بات[4]) اجتناب شده باشد. برای قضیهٔ راجع به جبرهای تقسیم تعویض‌پذیر حقیقی نیز که هویف در بخش ۴ این مقاله به آن اشاره کرد، ظاهراً تا امروز هیچ اثبات جبریِ محضی کشف نشده است.

خواننده برای کسب اطلاعات بیشتر دربارهٔ این مطالب و پیشرفتهای بعدی در زمینهٔ موضوعاتی که در اینجا مورد بحث قرارگرفتند می‌تواند به کتاب

Ebbinghaus et al.: *Zahlen*. Springer Verlag, 3. Auflage 1992

و به‌خصوص به فصلهای ۸، ۹، و ۱۰ آن، و نیز به

Beno Eckmann: *Continuous solutions of linear equations — An old problem, its history, and its solution*. Expo. Math. 9 (1991) 351-365.

مراجعه کند.

1. M. Kervaire 2. J. Milnor 3. J.F. Adams 4. R. Bot

---

۱۱. به‌عنوان نمونه، رجوع کنید به

Man vergl. z.B. B.L. van der Waerden. *Moderne Algebra*. 1. Teil (2. Aufl. Berlin 1937). p. 235 ff

۱۲. رجوع کنید به

F. Behrend. *Über Systeme reeller algebraischer Gleichungen*. Compos. Math. 7 (1939).

۱۳. رجوع کنید به

W. Habicht. *Über die Lösbarkeit gewisser algebraischer Gleichungssysteme*. Comment. Math. Helvet. 18 (1946).

و نیز *Ein Existensatz über reelle definite Polynome* در همانجا.

۱۴. رجوع کنید به

A. Tarski. A *decision method for elementary Algebra and Geometry* (2. edition. University of California Press. (Berkeley and Los Angeles 1951); bes. pp. 62-63.