مقاله کلاسیک

سیر تکامل مفهوم انتگرال

هانری لبگ
ترجمهٔ رامتین گلبانگ

آقایان:
می‌خواهیم با صرف‌نظرکردن از تحولات فنی به بررسی کلیِ اصلاحات و غنی‌سازی‌های پیاپیِ مفهوم انتگرال و پیدایش مفاهیم دیگری که در تحقیقات اخیر در بارهٔ توابع با متغیرهای حقیقی به‌کار می‌روند، بپردازیم.

قبل از کوشی، تعریفی از انتگرال در معنای واقعی واژهٔ «تعریف» وجود نداشت. توجه اشخاص محدود به این بود که مشخص کنند کدام مساحتها را باید جمع یا تفریق کرد تا انتگرال به‌دست آید.

ولی در نظر کوشی، تعریف لازم بود زیرا توجه به دقت که مشخصهٔ ریاضیات نوین است با او آغاز شد. کوشی توابع پیوسته و انتگرال این توابع را به روشی شبیه روش امروزی ما تعریف کرد. از نظر او برای رسیدن به انتگرال $f(x)$ کافی بود که مجموعهای

$$S = \sum f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i) \qquad (۱)$$

را تشکیل دهد (شکل ۱ را ببینید) که مساحان و ریاضیدانانْ قرنها برای تقریب‌زدن مساحت از آن استفاده کرده‌اند، و از این طریق به‌وسیلهٔ گذار به حد، انتگرال

$$\int_a^b f(x)dx$$

را نتیجه بگیرد.

اگرچه این گذار، به‌وضوح از نظر کسانی که [نیل به انتگرال را] با مفهوم مساحت آغاز می‌کنند مجاز بود، اما کوشی می‌بایست ثابت کند که مجموع S، تحت شرایطی که او در نظر گرفت واقعاً به حدی میل می‌کند. هر وقت به جای یک عقیدهٔ تجربی، یک تعریف منطقی محض قرار گیرد، الزام مشابهی در کار می‌آید. باید اضافه شود که [در این صورت] فایدهٔ موضوع تعریف‌شده، دیگر آشکار نیست و آن را فقط از بررسی ویژگیهای آن موضوع می‌توان نتیجه گرفت.

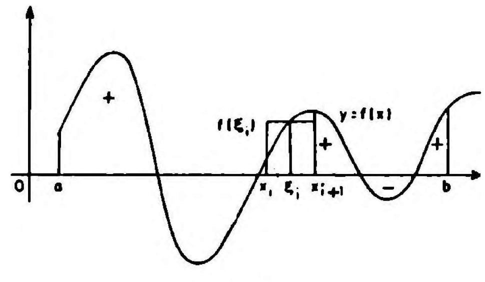
این تاوانِ پیشرفت منطقی است. کاری که کوشی انجام داد آنقدر قابل توجه هست که معنایی فلسفی داشته باشد. معمولاً گفته می‌شود که دکارت، هندسه را به جبر فرو کاست. من بیشتر مایلم که بگویم او با به‌کارگیری مختصات، تمامی هندسه را به هندسهٔ خط مستقیم فرو کاست و همچنین

این مقالهٔ ترجمهٔ متن سخنرانی هانری لبگ (Henri Lebesgue) در اجلاسی است که انجمن ریاضی فرانسه در هشتم ماه مه ۱۹۲۶ در شهر کپنهاگ برگزار کرد. ترجمهٔ انگلیسی این سخنرانی برای نخستین بار به‌عنوان ضمیمهٔ کتاب

Soo Bong Chase, *Lebesgue Integration*, Marcel Dekker (1980)

به چاپ رسیده است.

هانری لبگ (۱۸۷۵ـ۱۹۴۱) یکی از تأثیرگذارترین آنالیزدانان فرانسوی قرن بیستم و مبدع انتگرال لبگ است. وی با ابداع نظریهٔ این انتگرال، که ناشی از بصیرت عمیق او در مفاهیم شهودی هندسی بود، آغازگر دورهٔ نوینی در آنالیز شد. این دستاورد نه تنها سرآغاز انتگرالگیری به مفهوم نوین بلکه نقطهٔ عطفی در نظریهٔ سری فوریه و نظریهٔ پتانسیل بوده است. مفهومهای بعد لبگ فضاهای توپولوژیک و عدد لبگ مجموعه‌های فشرده نیز از آن اوست. وی همچنین تحقیقات مهمی در مسألهٔ دیریکله کرده است.



شکل۱

این هندسه، با عرضه‌کردن مفاهیم پیوستگی و اعداد گنگ، مجال داده است که جبر قلمرو واقعی خود را به‌دست آورد.

برای اینکه تمامی هندسه به هندسهٔ خط مستقیم فرو کاسته شود، لازم بود تعدادی مفاهیم مرتبط با هندسه‌های ابعاد بالاتر، نظیر طول خم، مساحت رویه، و حجم جسم را کنار گذاریم. پیشرفتی که کوشی آن را تحقق بخشید، دقیقاً در همین جاست. پس از او کافی بود خبرگان علم حساب به‌کمک اعداد طبیعی پیوستار خطی را تشکیل دهند تا حسابی‌سازی[1] علم به انجام رسد.

و اکنون، آیا باید توجه خود را به آنالیز محدود کنیم؟ خیر. درواقع تمامی آنچه انجام خواهیم داد، می‌تواند به زبان حساب بازگردانده شود. اما اگر بصیرتهای شهودی، هندسی و مستقیم را نپذیریم، اگر توجه‌مان آنچنان منحصر به منطق محض شود که بین چیزهای دقیق تمایز نگذاریم، آنگاه به سختی ممکن است در بارهٔ بسیاری پرسشها و مفاهیم بیندیشیم و برای مثال اکثر مفاهیمی که امروز قصد بررسی آنها را داریم، کاملاً از نظرمان دور خواهد ماند.

مدتهای طولانی از توابع ناپیوستهٔ مشخصی انتگرال گرفته می‌شد. تعریف کوشی هنوز در مورد این انتگرالها به‌کار می‌آمد، اما طبیعی بود که حوزهٔ دقیق این تعریف بررسی شود، همچنان که ریمان بررسی کرد.

اگر $\underline{f}_i$ و $\overline{f}_i$ کرانهای پایین و بالای $f(x)$ را بر (x_i, x_{i+1}) مشخص کنند، آنگاه S بین دو مقدار

$$\underline{S} = \sum \underline{f}_i (x_{i+1} - x_i) \quad \text{و} \quad \overline{S} = \sum \overline{f}_i (x_{i+1} - x_i)$$

قرار می‌گیرد. ریمان نشان داد برای اینکه تعریف کوشی به‌کار آید، کافی است که

$$\overline{S} - \underline{S} = \sum (\overline{f}_i - \underline{f}_i)(x_{i+1} - x_i)$$

به‌ازای دنبالهٔ مشخصی از افرازهای (a,b) به بازه‌های کوچکتر و کوچکتر (x_i, x_{i+1})، به سمت صفر میل کند. داربو اضافه کرد که گذار متعارف به حد از $\underline{S}$ و $\overline{S}$ معمولاً دو عدد مشخص

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx \qquad \overline{\int_a^b} f(x)dx$$

را به‌دست می‌دهد. این اعداد در حالت کلی متفاوت‌اند، و تنها هنگامی برابرند که انتگرال کوشی-ریمان موجود باشد.

1. arithmetization

از دیدگاه منطقی این تعریفها بسیار طبیعی‌اند؛ این طور نیست؟ با وجود این می‌توان گفت که در عمل غیرقابل استفاده هستند. تعریف ریمان به‌خصوص این عیب را دارد که تنها به‌ندرت و به مفهومی، به طور اتفاقی قابل به‌کاربردن است.

درواقع آشکار است که اگر $f(x)$ پیوسته باشد، افرازکردن (a,b) به بازه‌های کوچکتر و کوچکتر (x_i, x_{i+1}) تفاوت $\overline{f}_i - \underline{f}_i$ را کوچکتر و کوچکتر می‌سازد و با توجه به این فرایند پیوستگی، واضح است که اگر تنها تعداد معدودی نقطهٔ ناپیوستگی داشته باشیم، این افرازکردن موجب می‌شود $\overline{S} - \underline{S}$ به سمت صفر میل کند. اما دلیلی در دست نیست که امیدوار باشیم همین وضعیت برای تابعی که همه جا ناپیوسته است، برقرار باشد. بنابراین در عمل، کوچکتر و کوچکترکردن بازه‌های (x_i, x_{i+1}) یعنی در نظرگرفتن مقادیر $f(x)$ به‌ازای مقادیری از x که به هم نزدیک و نزدیکتر می‌شوند به هیچ وجه تضمین نمی‌کند مقادیری از $f(x)$ به‌دست آید که تفاوتهای آنها کوچکتر و کوچکتر شوند.

برای دستیابی به هدف، کار را با گرد هم آوردن یا دسته‌بندی مقادیری از $f(x)$ که تفاوتی ناچیز دارند، ادامه می‌دهیم. از این قرار واضح است که باید به‌جای (a,b) بازهٔ $(\underline{f}, \overline{f})$ را که به کرانهای پایین و بالای $f(x)$ بر (a,b) محدود است، افراز کنیم. این عمل را به کمک اعداد y_i ای که تفاوتشان با یکدیگر کمتر از ϵ است، انجام می‌دهیم. پس مثلاً مقادیری از $f(x)$ را در نظر می‌گیریم که به‌وسیله رابطهٔ

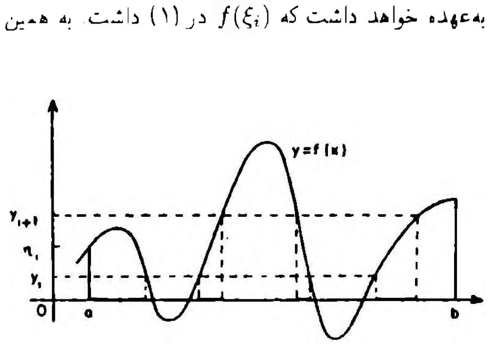
$$y_i \le f(x) \le y_{i+1}$$

تعریف می‌شوند. مقادیر متناظر x، مجموعه‌ای مانند E_i تشکیل می‌دهند. در وضعیت شکل ۲ این مجموعهٔ E_i از چهار بازه تشکیل شده است. در مورد تابع پیوستهٔ مشخصی چون $f(x)$ ممکن است تعدادی نامتناهی بازه تشکیل شود. وضعیت در مورد تابعی دلخواه ممکن است خیلی پیچیده باشد. اما مسأله‌ای نیست؛ این مجموعهٔ E_i است که نقش متناظر بازهٔ (x_i, x_{i+1}) در تعریف انتگرال توابع پیوسته را عهده‌دار است، زیرا مقادیری از x را به ما معرفی می‌کند که به $f(x)$ مقادیری با تفاوت ناچیز می‌دهد.

اگر η_i عدد دلخواهی باشد که بین y_i و y_{i+1} انتخاب شود:

$$y_i \le \eta_i \le y_{i+1}$$

مقادیر $f(x)$ به‌ازای نقاط E_i تفاوتی کمتر از ϵ با η_i دارند. عدد η_i همان نقشی را به‌عهده خواهد داشت که $f(\xi_i)$ در (۱) داشت. به همین ترتیب



شکل۲

نقش طول یا اندازهٔ بازهٔ (x_i, x_{i-1}) یعنی $x_{i+1} - x_i$ را اندازهٔ $m(E_i)$، که کمی بعد آن را به مجموعهٔ E_i نسبت خواهیم داد، به‌عهده خواهد داشت. به این نحو، مجموع

$$S = \sum \eta_i m(E_i) \qquad (۲)$$

را تشکیل می‌دهیم. اما نخست بیایید به آنچه تاکنون انجام داده‌ایم بنگریم و برای فهم بهتر، آن را با عباراتی دیگر بازگو کنیم.

هندسه‌دانان قرن هفدهم، انتگرال $f(x)$ را ــ واژهٔ «انتگرال» هنوز وضع نشده بود، اما این زیاد مهم نیست ــ به‌عنوان مجموع تعدادی نامتناهی از تقسیم‌ناپذیرها [۱] در نظر داشتند، که هر یک از آنها عرض $f(x)$، مثبت یا منفی، می‌باشد. بسیار خوب! ما فقط تقسیم‌ناپذیرها را دسته‌بندی کرده آنهایی را که تقریباً هم‌اندازه هستند در یک دسته قرار داده‌ایم. به‌عبارت دیگر ــ همچنان که در جبر می‌گوییم ــ دست به گردآوری یا تقلیل عبارات مشابه زده‌ایم. و باز می‌توان گفت که با روش ریمان، ریاضیدانان سعی می‌کردند تقسیم‌ناپذیرها را با در نظر گرفتنشان به ترتیبی که با تغییرات x به‌دست می‌آمد، جمع کنند. در این مورد مانند تاجری عمل می‌کردند که قاعده و اسلوبی در کارش ندارد، یعنی مانند کسی که سکه‌ها و اسکناسها را به‌طور اتفاقی و به ترتیبی که در دستانش قرار می‌گیرد شمارش می‌کند. در حالی که ما همچون تاجری با اسلوب عمل می‌کنیم که می‌گوید

من $m(E_1)$ یک سنتی به ارزش $1 \times m(E_1)$ دارم.

من $m(E_2)$ پنج سنتی به ارزش $5 \times m(E_2)$ دارم.

من $m(E_3)$ ده سنتی به ارزش $10 \times m(E_3)$ دارم.

و غیره. بنابراین من روی‌هم‌رفته این قدر پول دارم:

$$S = 1 \times m(E_1) + 5 \times m(E_2) + 10 \times m(E_3) + \cdots$$

هر دو روش، بدون شک تاجر را به یک نتیجه خواهد رساند، چرا که او هر اندازه هم ثروتمند باشد، تنها تعدادی متناهی اسکناس برای شمارش دارد، اما برای ما که ملزم به جمع کردن تعدادی نامتناهی از تقسیم‌ناپذیرها هستیم، تفاوت این دو روش جمع کردن، فاحش است.

اکنون توجه خود را به تعریف عدد $m(E_i)$ که به E_i منسوب شد، معطوف می‌کنیم. تناظر میان این اندازه و یک طول، یا همین‌طور تعداد اسکناسها، ما را به‌طور طبیعی به بیان این مطلب سوق می‌دهد که: در مثال مربوط به شکل (۲)، $m(E_i)$ مجموع طول چهار بازه‌ای است که E_i را تشکیل می‌دهند و همچنین در مثالی که در آن E_i از تعدادی نامتناهی بازه تشکیل شده است، $m(E_i)$ مجموع طول تمامی این بازه‌ها خواهد بود. این موضوع در حالت کلی ما را در این جهت پیش می‌برد: E_i را در تعدادی متناهی یا تعدادی نامتناهی شمارا از بازه‌ها محصور می‌کنیم، و فرض می‌کنیم l_1، l_2، ... طولهای این بازه‌ها باشند. یقیناً می‌خواهیم رابطهٔ زیر برقرار باشد

$$m(E_i) \leq l_1 + l_2 + \cdots$$

اگر در جستجوی بزرگترین کران پایین طرف دوم این رابطه برای تمام دستگاههای ممکن از بازه‌هایی باشیم که می‌توانند E_i را بپوشانند، این عدد کرانی بالا برای $m(E_i)$ خواهد بود. به این دلیل آن را با $\overline{m(E_i)}$ نمایش می‌دهیم و داریم

$$m(E_i) \leq \overline{m(E_i)} \qquad (۳)$$

همین‌طور، اگر C مجموعهٔ نقاطی از (a, b) باشد که در E_i نیستند، خواهیم داشت

$$m(C) \leq \overline{m(C)}$$

اکنون واضح است که می‌خواهیم رابطهٔ

$$m(E_i) + m(C) = m((a,b)) = b - a$$

برقرار باشد. بنابراین باید داشته باشیم

$$m(E_i) \geq b - a - \overline{m(C)} \qquad (۴)$$

حال نابرابریهای (۳) و (۴) کرانهای بالا و پایین $m(E_i)$ را به‌دست می‌دهند. به‌سادگی می‌توان مشاهده کرد که این دو نابرابری هیچگاه متناقض یکدیگر نیستند. هنگامی که کرانهای پایین و بالای $m(E_i)$ برابرند، $m(E_i)$ تعریف می‌شود و می‌گوییم E_i اندازه‌پذیر است [۲].

تابعی چون $f(x)$ که برای آن مجموعه‌های E_i به‌ازای تمامی y_iها اندازه‌پذیرند، اندازه‌پذیر نامیده می‌شود. برای چنین تابعی رابطهٔ (۲) یک مجموع S را معین می‌کند. به‌سادگی می‌توان ثابت کرد هنگامی که y_i انتخابی به گونه‌ای تغییر می‌کند که ϵ به سمت صفر می‌گراید، مجموع S به سمت حد مشخصی میل می‌کند که بنا به تعریف،

$$\int_a^b f(x)dx$$

است [۳].

این اولین تعمیم مفهوم انتگرال به بسیاری تعمیمهای دیگر منجر شد. فرض می‌کنیم مسألهٔ انتگرال‌گیری از تابع دو متغیرهٔ $f(x,y)$ مطرح است. در این صورت دقیقاً مانند قبل عمل می‌کنیم. به آن تابع، مجموعه‌های E_i را ــ که اکنون نقاطی در صفحه‌اند و از این پس روی خط قرار ندارند ــ نسبت می‌دهیم. اکنون باید به این مجموعه‌ها یک اندازهٔ دوبعدی[1] نسبت دهیم. همان‌طور که اندازهٔ یک‌بعدی[2] از طول بازه‌ها نتیجه می‌شود، این اندازهٔ دوبعدی از مساحت مستطیلهای

$$\alpha \leq x \leq \beta, \qquad \gamma \leq y \leq \delta$$

به‌دست می‌آید. با این اندازهٔ تعریف‌شده، رابطهٔ (۲) مجموع S را به‌دست می‌دهد که از آن، انتگرال به‌وسیلهٔ گذار به حد نتیجه می‌شود.

پس تعریفی که ما در نظر گرفتیم، بی‌درنگ به توابع چندمتغیره تعمیم می‌یابد. در اینجا توسیع دیگری مطرح می‌شود که در مورد توابعی با هر تعداد متغیر صادق است. اما من آن را تنها برای وضعیتی بیان می‌کنم که انتگرالگیری $f(x)$ بر (a,b) مطرح است.

1. plane measure 2. linear measure

من گفته‌ام که این مسأله‌ای است در بارهٔ تشکیل مجموع تقسیم‌ناپذیرها که توسط عرضهای نقاط x، یعنی $y = f(x)$، مشخص می‌شوند. اندکی قبل، این تقسیم‌ناپذیرها را برحسب اندازه‌شان دسته‌بندی کردیم. اکنون خود را مقید می‌کنیم که آنها را برحسب علامتشان دسته‌بندی کنیم. باید مجموعهٔ دوبعدی[1] E_p، مرکب از نقاط با عرض مثبت، و مجموعهٔ E_n، مرکب از نقاطِ با عرض منفی، را در نظر بگیریم. در حالت ساده‌ای که $f(x)$ پیوسته است، قبل از کوشی، همچنان که در ابتدا یادآوری کردم، می‌نوشتند:

$$\int_a^b f(x)dx = \text{مساحت}\,(E_p) - \text{مساحت}\,(E_n)$$

این فرمول ما را به این فکر می‌اندازد که بنویسیم

$$\int_a^b f(x)dx = m_s(E_p) - m_s(E_n)$$

m_s نشان‌دهندهٔ یک اندازهٔ دوبعدی است. این تعریف جدید با تعریف قبلی معادل است، و ما را به روش شهودی قبل از کوشی باز می‌گرداند اما تعریف اندازه، پایهٔ منطقی استواری به آن داده است.

بنابراین ما دو روش برای تعریف انتگرال تابعی از یک یا چند متغیر می‌شناسیم، بدون آنکه مجبور باشیم توجهی به شکل کم و بیش پیچیدهٔ دامنهٔ انتگرال‌گیری داشته باشیم، زیرا دامنهٔ D تنها به شرح زیر در این امر دخالت دارد: مجموعه‌های E_i در اولین و مجموعه‌های E_p و E_n در دومین تعریف ما، تنها با در نظر گرفتن مقادیری که تابع f در نقاط D می‌گیرد تشکیل می‌شوند.

از آنجا که انتخاب دامنهٔ انتگرال‌گیری D تنها در تشکیل مجموعه‌های E_i، یا E_p و E_n مؤثر واقع می‌شود، مشخص است که می‌توانیم توافق کنیم که این مجموعه‌های E_i، E_n، و E_p را فقط با در نظر داشتن مقادیری که f روی نقاط مجموعهٔ داده‌شده‌ای چون E می‌پذیرد، تشکیل دهیم و بنابراین انتگرال f را که به مجموعهٔ E گسترش یافته، تعریف کرده‌ایم.

به‌منظور دقیق‌کردن حوزهٔ این بسط جدید مفهوم انتگرال، یادآوری می‌کنیم که تعاریف ما مستلزم این هستند که f اندازه‌پذیر باشد، به‌عبارت دیگر مجموعه‌های E_i برای تعریف اول و مجموعه‌های E_p و E_n برای تعریف دوم، اندازه‌پذیر باشند و از این رو، E نیز باید اندازه‌پذیر باشد. بنابراین می‌دانیم چگونه انتگرال تعمیم‌یافته به یک مجموعهٔ اندازه‌پذیر از یک تابع اندازه‌پذیر و کراندار بر این مجموعه را تعریف کنیم. من درواقع به‌طور ضمنی فرض کرده‌ام که ما در بارهٔ توابع کراندار بحث می‌کنیم.

اگر تابع fای که از آن انتگرال گرفته می‌شود کراندار نبود، در اولین تعریف ما چه تغییراتی باید داده شود؟ بازهٔ $(\underline{f}, \overline{f})$ دیگر متناهی نخواهد بود؛ تعدادی نامتناهی عدد y_i برای تقسیم آن به بازه‌هایی که طولشان حداکثر برابر ϵ باشد لازم خواهد بود، بنابراین تعدادی نامتناهی مجموعهٔ E_i وجود خواهند داشت و در این صورت مجموع S در رابطهٔ (۲) یک سری خواهد بود. برای اینکه در آغاز کار متوقف نشویم باید فرض کنیم که سری S برای اولین انتخاب از اعداد y_i همگراست، اما اگر S برای یک عدد انتخابی y_i موجود باشد، برای تمام اعداد انتخاب‌شدهٔ y_i موجود است و تعریف انتگرال بدون تغییر صادق است.

1. plane set

نام توابع مجموع‌پذیر[1] به تمام توابعی که از طریق روشهای مذکور می‌توان از آنها انتگرال گرفت، اطلاق شده است، به‌عبارت دیگر به تمام توابع اندازه‌پذیری که برای آنها مجموعهای S دارای معنی است. هر تابع اندازه‌پذیر کراندار، مجموع‌پذیر است و چون تاکنون هیچکس موفق نشده است یک تابع اندازه‌ناپذیر ارائه دهد، فعلاً می‌توان گفت که تقریباً هر تابع کراندار دارای انتگرال است. از طرف دیگر توابع خیلی سادهٔ بیکرانی وجود دارند که مجموع‌پذیر نیستند، بنابراین نباید شگفت‌زده شد که هنوز در بعضی مسائل، نارسایی مفهوم ما از انتگرال آشکار می‌شود.

ما با آغاز کردن از اولین تعریف خود، مفهوم انتگرال را به توابع بیکران تعمیم داده‌ایم. دومین تعریف هم به نتیجهٔ مشابهی منجر می‌شود. اما به این منظور لازم است مفهوم اندازه را تعمیم دهیم به طریقی که نه تنها مجموعه‌های کراندار که ما تاکنون فقط آنها را در نظر گرفته‌ایم بلکه همچنین مجموعه‌هایی از نقاط را که به بینهایت میل می‌کنند، شامل شود. من این روش دوم را تنها به این دلیل ذکر می‌کنم که با تعمیم دیگری از انتگرال معین نیز در ارتباط است که در آن بازه، دامنه، و مجموعه‌ای که انتگرال روی آنها تعریف می‌شود، برخلاف شیوه‌ای که تا اینجا داشته‌ایم دیگر متناهی فرض نمی‌شوند بلکه می‌توانند به بینهایت میل کنند.

من فقط به اشاره‌ای اکتفا می‌کنم زیرا نمی‌خواهم این تعمیم مفهوم انتگرال را در ادامهٔ بحث در نظر بگیرم. به همین دلیل به اختصار از تحقیقی یاد می‌کنم که هنوز بسیار بکر است و به‌دست جوانی به نام گاتوا[2] که در جنگ کشته شد، صورت گرفته است [۴]. وی قصد داشت عمل انتگرال‌گیری را برای توابعی با تعدادی نامتناهیِ متغیر تعریف کند. این تحقیق که توسط لوی[3] و نوربرت وینر ادامه یافت، با بررسیهای اصل موضوعی توسط فرشه[4] و دانیل[5]، به‌کمک تعمیم مفهوم انتگرال به مجموعه‌های مجرد، بدون ارتباط نیست [۴]. علاوه بر این فرشه و دانیل در نظر داشتند که نه تنها تعاریفی را که من تاکنون در بارهٔ آنها سخن گفته‌ام، بلکه تعمیم دیگری از انتگرال معین به مجموعه‌های مجرد را به‌کار برند که به‌زودی از طریق مفهوم انتگرال نامعین ــ که اکنون قصد بررسی آن را داریم ــ به این تعمیم خواهیم رسید.

معمولاً تابع $F(x)$ای را که با

$$F(x) = C + \int_a^x f(x)dx \qquad (۵)$$

تعریف می‌شود انتگرال نامعین $f(x)$ می‌نامند. ما به این نام اتکا نمی‌کنیم بلکه به واژه‌های «انتگرال نامعین» معنی اصلی آنها را اعطا می‌کنیم. در ابتدا هر دو نام «انتگرال معین» و «انتگرال نامعین» به‌عبارت $\int_a^b f(x)dx$ اطلاق می‌شدند. اما انتگرال وقتی «معین» نامیده می‌شد که صحبت از بازه‌ای داده‌شده، مشخص و یا تعریف‌شده چون (a, b) در میان بود و وقتی «نامعین» بود که (a, b) متغیر، نامشخص، تعریف‌نشده یا ــ اگر دوست دارید ــ نامعین بود.

خلاصه، اینکه $F(x)$ را انتگرال نامعین $f(x)$ می‌نامیم واقعاً با تسامح همراه است. علاوه بر این، اگر ملاحظه کنیم که وقتی $F(x)$ را بررسی می‌کنیم، همیشه برای به‌دست آوردن ویژگیهای $\int_a^b f(x)dx$ است، یعنی

1. summable 2. R. Gateaux 3. Paul Levy
4. M. Fréchet 5. P. J. Daniell

درواقع $\int_a^b f(x)dx$ را از طریق $F(x)$ بررسی می‌کنیم، می‌بینیم که بهتر است بگوییم: من تابع

$$\varphi(a,b)=\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a) \qquad (۵')$$

را انتگرال نامعین $f(x)$ می‌نامم.

میان یک انتگرال نامعین و انتگرال معین متناظر با آن همان روابط و همان تفاوتهایی هست که میان یک تابع و مقدار مشخصی که آن تابع اختیار می‌کند. علاوه بر این اگر بازهٔ انتگرالگیری (a,b) را به D نشان دهیم، می‌توانیم بگوییم که انتگرال نامعین، تابعی است که متغیر مستقل آن، دامنهٔ D می‌باشد:

$$\psi(D)=\varphi(a,b)$$

از این ملاحظات به‌وضوح نتیجه می‌شود که در مورد تابعی دومتغیره چون $f(x,y)$، نباید انتگرال نامعین آن را تابع

$$F(X,Y)=c_1(x)+c_2(y)+\int_\alpha^x\int_\beta^y f(x,y)dxdy \qquad (۶)$$

در نظر گرفت، هر چند گاهی این کار انجام می‌شود. اگر قلمرو انتگرالگیری را به دامنهٔ مستطیلی

$$a\le x\le b, \qquad c\le y\le d$$

محدود کنیم، باید تابع چهارمتغیرهٔ

$$\varphi(a,b;c,d)=F(b,d)+F(a,c)-F(a,d)-F(b,c) \qquad (۷)$$

را انتگرال نامعین در نظر بگیریم. اما اگر کسی بخواهد تمام دامنه‌های انتگرالگیری را در نظر بگیرد، از آنجا که کلیترین دامنه را نمی‌توان با تعدادی متناهیْ پارامتر ــ هر اندازه زیاد ــ مشخص کرد، لازم می‌شود توابع معمولی را رها کند تا بتواند ارتباط میان یک دامنهٔ D و انتگرال توسعه‌یافته به این دامنه را نمایش دهد، و به مطالعهٔ مستقیم تابع

$$\psi(D)=\int_D\int f(x,y)dxdy$$

بپردازد، که در آن D یک دامنه است. این تابع است که ما آن را انتگرال نامعین $f(x,y)$ می‌نامیم. به بیان دقیقتر، چون ما علاوه بر این، انتگرال f را به‌طریقی تعریف کرده‌ایم که به یک مجموعهٔ اندازه‌پذیر E تعمیم یافته است، انتگرال نامعین را به‌صورت تابعی مجموعه‌ای[1] در نظر خواهیم گرفت که برای تمام مجموعه‌های اندازه‌پذیر تعریف می‌شود [۵].

در تمام مطالبی که تاکنون گفته‌ایم، محققاً، تنها مسائلی در بارهٔ زبان یا نحوهٔ نامگذاری مطرح شده است، اما اگر مفهوم جدیدی به‌دست نیاورده بودیم، آن مسائل مطرح نمی‌شدند. به این دلیل، نباید متعجب شد که زبان جدید اعطای تمام معانی ممکن را به حقایقی که نخست در مورد تابع $F(x)$ از رابطهٔ (۵) معلوم شده، روا داشته است. به‌ویژه، توانسته‌اند توابعی مجموعه‌ای

1. set function

را که انتگرال نامعین هستند با دو خاصیت مشخص کنند: جمع‌پذیری کامل[1] و پیوستگی مطلق[2] [۶].

هنگامی که یک تابع مجموعه‌ای دارای این دو ویژگی است، انتگرال نامعین یک تابع f است که، براساس اینکه مجموعه‌های E از نقاطی روی یک خط، در یک صفحه، در فضای معمولی و غیره، تشکیل شوند، وابسته به ۱، ۲، ۳، ... متغیر است. برای اینکه زبان و نمادگذاری ما یکنواخت باشد، می‌گوییم f یک تابع نقطه‌ای[3] است، مانند $f(P)$؛ می‌نویسیم

$$\psi(E)=\int_E f(P)dm(E) \qquad (۸)$$

تابع $f(P)$ کاملاً توسط $\psi(E)$ مشخص می‌شود تا به آن اندازه که با تغییر دلخواه f بر نقاط مجموعه‌ای دلخواه با اندازهٔ صفر، $\psi(E)$ کماکان انتگرال نامعین آن باقی می‌ماند؛ و می‌توان با شروع از $\psi(E)$ توسط روشی که متعاقباً می‌آید، $f(P)$ را ــ مگر بر نقاط مجموعه‌ای با اندازهٔ صفر ــ به‌دست آورد.

فرض کنید P نقطه‌ای باشد که می‌خواهیم مقدار f را در آن محاسبه کنیم. دامنهٔ انتگرال‌گیری Δ را بازه‌ای به مرکز P، یا دایره‌ای به مرکز P، یا کره‌ای به مرکز P ــ برحسب اینکه با مورد خط، صفحه یا فضا سروکار داشته باشیم ــ در نظر می‌گیریم و خارج‌قسمت $\psi(\Delta)/m(\Delta)$ را تشکیل می‌دهیم. سپس فرض کنید Δ به صفر میل می‌کند و داریم

$$\lim_{\Delta\to 0}\frac{\psi(\Delta)}{m(\Delta)}=f(P) \qquad (۹)$$

این نتیجه آشکارا قضیه‌ای کلاسیک، را تعمیم می‌دهد که براساس آن، $f(x)$ پیوسته است، و تابع $F(x)$ مذکور در رابطهٔ (۵)، f را به‌عنوان مشتق خود می‌پذیرد؛ کار ما در محاسبهٔ $f(P)$، درواقع یک نوع مشتق‌گیری از تابع مجموعه‌ای $\psi(E)$ است.

این روش مشتق‌گیری مدتها پیش بررسی شد. کوشی [۷] آن مقادیری را که همزمان، یعنی تحت شرایطی یکسان، مشخص می‌شوند، «مقادیر همبود[4]» می‌نامد. اگر برای مثال جسمی ناهمگن، از لحاظ ساختار و چگالی، داشته باشیم، و اگر دامنه‌ای [بخشی] چون D از این جسم را در نظر بگیریم، حجم D، جرم D، مقدار گرمای لازم برای افزایش دمای D به میزان یک درجه ــ با فرض مجزابودن ــ همگی مقادیر همبود هستند. اینها توابع $V(D)$، $M(D)$، $Q(D)$ از این دامنه‌اند.

این از حسن تصادف نیست که در اینجا به توابعی از دامنه‌ها رسیده‌ایم. اگر کسی در آن اندیشه کند، به‌سرعت درمی‌یابد که هر مقداری در فیزیک نه به یک نقطه بلکه به یک جسم گسترده مربوط است، یعنی ــ حداقل تا جایی که با مقادیر مستقیماً اندازه‌گرفتنی سروکار داریم ــ تابعی از یک دامنه است. اما اگر در مشخص کردن مقدار موردنظر، متغیرهای غیرفضایی ــ مانند زمان، دما و غیره ــ دخالت کنند جسم موردنظر همیشه جسمی متعلق به فضای متعارف ما نخواهد بود بلکه می‌تواند در فضایی باشد که به شیوه‌ای مطلقاً ریاضی صورت‌بندی شده است. اما این چندان اهمیتی ندارد؛ مقادیر مستقیماً

1. complete additively 2. absolute continuity

3. point function 4. coexistent quantities

اندازه‌گرفتنی ــ برای مثال جرم، مقدار گرما، مقدار الکتریسیته ــ توابعی از یک دامنه‌اند و توابعی از یک نقطه نیستند.

در فیزیک ضمناً مقادیر مربوط به نقاط، مانند سرعت، تنش، چگالی، و گرمای ویژه نیز مطرح می‌شوند، اما اینها کمیات فرعی [اشتقاقی] هستند که اغلب به‌طور دقیق به‌صورت خارج‌قسمت یا حد خارج‌قسمت دو مقدار همبود تعریف می‌شوند، مثلاً

$$\text{گرمای ویژه} = \frac{\text{مقدار گرما}}{\text{جرم}}\ ;\qquad \text{چگالی} = \frac{\text{جرم}}{\text{حجم}}$$

یعنی با مشتق‌گیری از یک مقدار نسبت به مقداری همبود با آن.

بنابراین در فیزیک و به دنبال آن در هندسه، به اینجا می‌رسند که توابعی از یک دامنه و مشتق‌گیری از آنها را در نظر بگیرند، درست همان‌گونه که در آنالیزِ توابع با متغیرهای حقیقی عمل می‌شود. به همین نحو، در فیزیک توابعی از یک دامنه نقش اصلیتری از توابع نقطه‌ای دارند. پس چرا فیزیکدانان از چنین توابعی سخن نمی‌گویند؟ زیرا ریاضیدانان هنوز آنها را بررسی نکرده‌اند و جبر نه برای دامنه‌ها نمادی دارد و نه برای توابعِ دامنه‌ها. بنابراین می‌بینیم که فیزیکدان توجه خود را به دامنه‌های به‌خصوص، که تنها به پارامترهای مشخصی وابسته‌اند، محدود می‌کند به طریقی که تابع دامنه‌ای موردنظر به تابعی از پارامترها تقلیل داده می‌شود. این دقیقاً همان کاری است که ریاضیدان انجام می‌دهد، وقتی به‌جای در نظر گرفتن انتگرال معین $f(x,y)$ با تمام کلیتش، خود را محدود به در نظر گرفتن توابع $F(X,Y)$ و $\varphi(a,b;c,d)$ از روابط (۶) و (۷) می‌کند.

همچنین ملاحظه می‌کنیم که فرمول (۸) ارتباطی میان توابع مجموعه‌ای $\psi(E)$، که انتگرالهای نامعین هستند، و توابع نقطه‌ای $f(P)$، که صرفاً جبری‌اند، برقرار می‌کند. نتیجتاً این فرمول نوعی نماد برای بعضی توابع مجموعه‌ای فراهم می‌کند. اما اگر دو شرط لازم برای انتگرالِ نامعین‌بودنِ یک تابع را بررسی کنیم، نمی‌توانیم تردید کنیم که کمیتهای فیزیکی، در ردهٔ توابعی هستند که این نماد را می‌گیرند.

این تأملات در بارهٔ طبیعت کمیتهای فیزیکی شاید به شما امکان داده باشد که فایده و اهمیت مفاهیمی را که مطرح کرده‌ایم دقیقتر درک کنید؛ و به‌ویژه نشان می‌دهد عمل مشتق‌گیری به‌صورتی که در رابطهٔ (۹) ظاهر می‌شود، تنها عملی از این نوع که می‌توان در نظر گرفت نیست، و همواره می‌توان مشتق یک تابع $\psi(E)$ را نسبت به یک تابع همبود $p(E)$ در نظر گرفت، خواه آنْ اندازهٔ $m(E)$ باشد خواه نباشد.

اکنون سؤالی به سرعت به ذهن خطور می‌کند: آیا می‌توان در تعریف انتگرال، تابع داده‌شدهٔ $p(E)$ را نیز جایگزین تابع $m(E)$ کرد؟ در این کار هیچ مشکلی نیست. در ابتدا

$$S = \sum \mu_i p(E_i)$$

را جایگزین رابطهٔ (۲) می‌کنیم اگر در ابتدا مجموعه‌های E_i به خانواده‌ای از مجموعه‌ها تعلق داشته باشند که برای آنها تابع $p(E)$ تعریف شده باشد، یعنی، برای همگرابودن سری S، تابعی که باید از آن انتگرال گرفته شود باید نسبت به $p(E)$ اندازه‌پذیر باشد، به‌عبارت دیگر، f باید نسبت به $p(E)$ مجموع‌پذیر باشد. با این فرض، تعریفِ انتگرالِ $f(p)$ نسبت به $p(E)$

$$\int f(P)dp(E)$$

مانند قبل به‌دست می‌آید به‌شرطی که تابع $p(E)$ ویژگی مشخصی داشته باشد. این ویژگی را می‌توان چنین بیان کرد که $p(E)$ باید دارای تغییرات کراندار[1] باشد [۸].

ما اکنون با اتخاذ دیدگاه صوری یک ریاضیدان، به تعمیمی جدید و بسیار قابل ملاحظه از مفهوم انتگرال نائل شده‌ایم. دیدگاه فیزیکدان حتی به شکل طبیعیتر ما را به همین نتیجه ــ حداقل در مورد توابع پیوستهٔ $f(P)$ ــ می‌رساند. به‌همین نحو می‌توان گفت که فیزیکدانان همیشه فقط انتگرالهایِ نسبت به توابع دامنه‌ای را در نظر می‌گرفته‌اند.

برای مثال فرض کنید می‌خواهیم مقدار گرمای $\varphi(D)$ لازم را جهت یک درجه بالا بردن دمای یک جسم D ــ که در بالا از آن سخن گفتیم ــ محاسبه کنیم. باید D را به بخشهای کوچک D_1، D_2، $\cdots$ با جرمهای $M(D_1)$، $M(D_2)$، $\cdots$ تقسیم کنیم، از هر کدام یک نقطهٔ P_1، P_2، $\cdots$ را انتخاب کنیم و مجموع

$$f(P_1)M(D_1) + f(P_2)M(D_2) + \cdots$$

را به‌عنوان مقداری تقریبی از $\varphi(D)$ برگزینیم. $f(P)$ نمایانگر گرمای ویژه در P است. این مانند آن است که بگوییم $\varphi(D)$ را از رابطهٔ

$$\varphi(D) = \int_D f(P)dM(E)$$

محاسبه می‌کنیم. تعریف این انتگرال جدید در شکل کلی خود، توسط رادون[2] در ۱۹۱۳ عرضه شد، در حالی که از ۱۸۹۴ برای حالت خاص یک تابع پیوستهٔ یک متغیره شناخته شده بود. اما اولین مبدع آن، استیلتیس[3]، از طریق تحقیق در آنالیز و حساب به آن دست یافت و آن را به شکلی کاملاً تحلیلی ارائه کرد که آن‌چنان معنای فیزیکیش را پنهان می‌داشت که شناختن چیزی که امروز واضح به نظر می‌رسد، مستلزم تلاشی بسیار بود. در تاریخ این مساعی نامهای ریتس[4]، لبگ، یانگ، فرشه و د لا واله پوسن[5] دیده می‌شود. این نشان می‌دهد که ما نه تنها در خلاقیت و ذکاوت بلکه در بی‌بصیرتی نیز با هم رقابت می‌کرده‌ایم [۹].

و با این حال انتگرالهای استیلتیس-رادون همواره مورد توجه ریاضیدانان بوده‌اند. انتگرال خمیده‌خطی $\int_C f(x,y)dx$ یکی از این انتگرالهاست، که در ارتباط با یک تابع تعریف‌شده برحسب طول تصویر کمانهایی از C بر محور x می‌باشد؛ انتگرال $\int\int_S f(x,y,z)dxdy$ به‌طور مشابه مستلزم یک تابع مجموعه‌ای تعریف‌شده برحسب تصویر مساحتهای S بر صفحهٔ xy است.

درواقع این انتگرالها اغلب به صورتهای کاملتر زیر ظاهر می‌شوند

$$\int_C f(x,y)dx + g(x,y)dy$$

$$\int_S f(x,y,z)dx\,dy + g(x,y,z)dy\,dz + h(x,y,z)dz\,dx$$

1. bounded variation 2. Radon 3. Stieltjès 4. F. Riesz
5. de la Vallée-Poussin

اگر انتگرالهای موردنظر جهت تعریف طولهای خمها یا مساحتهای رویه‌ها نیز در نظر بگیریم:

$$\int_C (dx^2 + dy^2 + dz^2)^{1/2}$$

$$\int\int_S [(dx\,dy)^2 + (dy\,dz)^2 + (dz\,dx)^2]^{1/2}$$

به نظر می‌رسد که بررسی حالاتی از انتگرال‌گیری که در آنها چندین تابع مجموعه‌ای $p_1(E_1)$، $p_2(E_2)$، $\cdots$ ظاهر می‌شوند نیز مناسب باشد. این بررسی کلاً کار آیندگان خواهد بود، اگرچه هلینگر[1] و توپلیتس[2]، مجموعیابیهای مشخصی را نسبت به چندین تابع مجموعه‌ای مورد استفاده قرار داده‌اند [۱۰].

ما تاکنون انتگرال‌گیری ــ معین یا نامعین ــ را به‌صورت عملی که یک عددِ مشخص یا متغیر را به‌وسیلهٔ نوعی جمع تعمیم‌یافته ارائه می‌کند در نظر گرفته‌ایم. این دیدگاه مبتنی است بر کوادراتور [تعیین مساحت]. اما همچنین می‌توان انتگرال‌گیری از توابع پیوسته را به‌صورت عملی که حاصل آن یک تابع است در نظر گرفت، درست مانند ساده‌ترین انتگرالهای معادلات دیفرانسیل. این دیدگاه توابع اولیه است که ما اکنون آن را بررسی می‌کنیم.

یافتن $F(x)$، تابع اولیهٔ یک تابع داده‌شدهٔ $f(x)$ ــ در صورت وجود تابع اولیه ــ یافتن تابعی است که با تقریب یک ثابت جمعی مشخص می‌شود و $f(x)$ مشتق آن است. این مسأله‌ای است که ما قصد بررسی آن را داریم.

اما در ابتدا خاطرنشان می‌کنیم که تأملات قبلی به صورتبندی مسأله به شیوه‌ای بسیار کلیتر می‌انجامد: یک تابع $f(P)$ داده شده است که مشتق تابع مجهول $\psi(E)$ نسبت به تابع معلوم $p(E)$ است؛ تابع اولیهٔ $\psi(E)$ از $f(P)$ را بیابید.

اگر مثلاً سروکار ما با یک تابع پیوستهٔ $f(x)$ باشد و اگر $m(E)$ اندازه باشد، دیگر تابع اولیه نمی‌تواند تابع $F(x)$ مذکور در رابطهٔ (۵) باشد بلکه انتگرال نامعین $\int_E f(x)dx$ است.

من فقط می‌توانم اشاره‌وار از این مسألهٔ کلی که هنوز بررسی نشده است یاد کنم؛ و به ذکر این نکته اکتفا می‌کنم که انتگرال استیلتیس برای حل آن بسیار نابسنده است. این انتگرال در عمل تنها با این فرض که $p(E)$ دارای تغییرات کراندار است تعریف شده است و با وجود این، یقیناً می‌توان در بارهٔ مشتق‌گیری نسبت به تابعی چون $p(E)$ که دارای تغییرات کراندار نیست، سخن گفت.

نظریهٔ توابع مجموع‌پذیر نتیجهٔ زیر را در ارتباط با حالتی که $p(E)$ اندازهٔ $m(E)$ است، ارائه می‌کند: هنگامی که $f(P)$ مشتقی مجموع‌پذیر است، پادمشتق f یکی از توابع اولیهٔ آن است. من می‌گویم یکی از توابع اولیهٔ آن، زیرا در حال حاضر هنوز کسی به خوبی آگاهی ندارد که این مسألهٔ کلی توابع اولیه چگونه باید مطرح شود تا مشخص گردد کدام تابع اولیه موردنظر ست [۱۱].

بیایید این‌گونه سؤالات را رها کنیم زیرا من در بارهٔ آنها تنها از این جهت سخن می‌گویم که نشان دهم چقدر کار انجام‌نشده باقی مانده است، و بگذارید نشان دهیم چقدر کار در جستجوی تابع اولیهٔ $F(x)$ از $f(x)$ انجام شده است، که در این مورد بیش از هر کسی مرهون آرنو دانژوا[3] هستیم.

1. Hellinger 2. Toeplitz 3. Arnaud Denjoy

اندکی قبل گفتم هنگامی که $f(x)$ مجموع‌پذیر است، $F(x)$ با انتگرال‌گیری به‌وسیلهٔ رابطهٔ (۵) به‌دست می‌آید. فرض کنید که $f(x)$ بر (a,b) تنها در یک نقطهٔ c فاقد خاصیت مجموع‌پذیری باشد. در این صورت انتگرال‌گیری، $F(x)$ را بر $(a, c-\epsilon)$ به‌ازای ϵ به دلخواه کوچک، و بنابراین بر تمام بازهٔ (a,c) به‌دست می‌دهد؛ همچنین $F(x)$ را بر $(c+\epsilon, b)$ و بنابراین به‌طور کامل بر (c,b) معین می‌کند و با در نظر گرفتن پیوستگی $F(x)$ در نقطهٔ c، $F(x)$ را بر تمام بازهٔ (a,b) داریم. با توجه به چنین ملاحظاتی در بارهٔ پیوستگی [۱۲] می‌بینیم که اگر $F(x)$ در هر بازه‌ای که هیچ نقطه‌ای از مجموعهٔ E را در درون یا کرانه‌های خود در برندارد، معلوم باشد، می‌توان $F(x)$ را به‌وسیلهٔ عملی ــ که آن را A می‌نامم ــ بر هر بازهٔ مجاور E به‌دست آورد، یعنی بر هر بازه‌ای که نقاط انتهایی آن در E هستند اما هیچ نقطه‌ای از E درونش قرار ندارد.

اکنون فرض کنید $F(x)$ بر بازه‌های (α,β) که مجاور مجموعهٔ E هستند، معلوم است، همچنین مجموع $\sum[F(\beta) - F(\alpha)]$ همگراست، و نیز $f(x)$ بر E مجموع‌پذیر است [۱۳]. در این صورت کافی است بگوییم که تابع اولیه باید روی E و بازه‌هایی که مجاور E هستند به‌دست آید تا به رابطهٔ

$$F(x) - F(a) = \left\{ \int_E f(dx + \sum[F(\beta) - F(\alpha)]) \right\}_a^x$$

برسیم. آکولادهای طرف دوم مشخص می‌کنند که در اینجا باید تنها از نقاط بین a و x استفاده کنیم. از این رابطه، $F(x)$ با عملی که آن را B می‌نامم، تعیین می‌شود.

نتایج بالا نقاط انتهایی را که من در رسالهٔ خود به آنها رسیدم مشخص می‌کنند و باید بگویم که آن نکته‌ها را تا اندازه‌ای به‌طور اتفاقی ذکر کردم، چرا که ابداً اهمیتی را که دانژوا به آنها بخشید، حدس نمی‌زدم.

دانژوا با اتکا به نتایج بِئْر[1] نشان داد که اگر $f(x)$ یک تابع مشتقّ بر (a,b) باشد، آنگاه

(۱) نقاطی که $f(x)$ به‌ازای آنها مجموع‌پذیر نیست، مجموعه‌ای مانند E_1 تشکیل می‌دهند که در (a,b) چگال نیست؛ یک عمل O_1 از نوع A، $F(x)$ را بر بازه‌های مجاور E_1 مشخص می‌کند.

(۲) حال، مجموعه‌ای مانند E_2 وجود دارد که از نقاط E_1 تشکیل می‌شود و در E_1 چگال نیست، و بر بازه‌های مجاور آن، می‌توان $F(x)$ را توسطِ یک عملِ O_2 از نوع B محاسبه کرد.

(۳) سپس، مجموعه‌ای مانند E_3 وجود دارد که از نقاط E_2 تشکیل می‌شود و در E_2 چگال نیست، و بر بازه‌های مجاور آن، می‌توان $F(x)$ را توسطِ یک عملِ O_3 از نوع B محاسبه کرد، . . .

اگر مشخص شود که پس از دنباله‌ای نامتناهی از اعمال O_1، O_2، . . . هنوز $F(x)$ را بر کل بازهٔ (a,b) نیافته‌ایم، نقاطی از (a,b) که نقاط درونیِ بازه‌هایی که $F(x)$ را بر آنها تعریف کرده‌ایم نیستند، مجموعه‌ای مانند E_ω تشکیل می‌دهند، و عملی از نوع A ــ عمل O_ω ــ F را بر بازه‌های مجاورِ E_ω مشخص می‌کند. بعد ــ اگر لازم باشد ــ اعمال $O_{\omega+1}$، $O_{\omega+2}$، . . . از نوع B را در نظر می‌گیریم. به دنبال آن یک عمل $O_{2\omega}$ از نوع A، به دنبال آن عملهایی از نوع B و غیره.

1. Baire

و دانژوا، اکنون با استفاده از استدلالات کلاسیک کانتور و بندیکسون، ثابت می‌کند با این روش، نهایتاً پس از تعدادی متناهی، یا نامتناهیِ شمارا از اعمال، $F(x)$ بر کل بازهٔ (a,b) مشخص می‌شود.

دانژوا این شیوهٔ عملی را که یقیناً پیچیده اما در اصل به همان اندازهٔ روشهای متصورِ قبلیْ طبیعی است، «کلیت‌سازی[1]» نامید.

کلیت‌سازی، مسألهٔ یافتن تابع اولیهٔ $F(x)$ از یک تابع داده‌شدهٔ $f(x)$ را به‌طور کامل حل می‌کند، و در عین حال تعیین $F(x)$ را با دانستن تنها یک عددِ مشتقی[2] f از $F(x)$ [۱۴] ــ و نه مشتق آن ــ میسر می‌سازد. من نمی‌توانم در بارهٔ این نتایج زیبا زیاد سخن بگویم؛ مهم‌ترین واقعیت برای ما این است که کلیت‌سازی از یک مسیر فرعی طولانی، تعمیم جدیدی از مفهوم انتگرال معین را فراهم می‌کند. عملاً هر زمان که کلیت‌سازی در مورد یک تابع $f(x)$ اعمال شود و تابع متناظر $F(x)$ را به‌دست دهد، می‌توانیم بنا به روابط (۵) و (′۵) به $f(x)$ یک انتگرال نسبت دهیم.

آقایان، در اینجا به سخنانم خاتمه می‌دهم و از شما به خاطر توجهی که از روی ادب نشان دادید تشکر می‌کنم. اما اگر اجازه بدهید، کلامی از باب نتیجه‌گیری لازم است، و آن این است که تعمیمی که نه برای لذت بیهودهٔ تعمیم دادن، بلکه برای حل مسائلی که قبلاً طرح شده‌اند انجام می‌شود معمولاً تعمیمی سودمند است. کاربردهای گوناگون مفاهیمی که ما بررسی کردیم، این موضوع را کاملاً تأیید می‌کند.

یادداشتها و مراجع

۱. در بحث مساحتها، تقسیم‌ناپذیرها[1] ($indivisibles$) مستطیلهای «بینهایت باریک» یا مساحتهای «بینهایت کوچک» هستند. لایب‌نیتس علامت dx را برای معرفی «پهنای» یک تقسیم‌ناپذیر به‌کار برد، بنابراین «مساحت» یک تقسیم‌ناپذیر به طول y، با حاصلضرب $y\,dx$ مشخص شد. پس از آن، وی نماد $\int y\,dx$ را برای «مجموع» یا «انتگرال» مساحتهای تقسیم‌ناپذیرها معرفی کرد که مساحت ناحیهٔ مفروض را به‌دست می‌دهد.

۲. شیوهٔ تعریف اندازهٔ یک مجموعه که در اینجا از آن استفاده شد از ژوردان (C. Jordan) در منبع زیر است

Cours d'Analyse de l'Ecole Polytechnique, Vol. 1

اما با این جرح و تعدیل که برای هدف ما ضرورت دارد: ما مجموعهٔ E_i را به‌گونه‌ای محصور می‌کنیم که در بازه‌هایی که تعدادشان می‌تواند نامتناهی باشد جای گیرد، در حالی‌که ژوردان تنها از تعدادی متناهی بازه استفاده می‌کرد. این کاربرد نامتناهیِ شمارا به جای اعداد صحیح، از تلاشهای بورل ناشی شده است. از این گذشته، او شخصاً از این ایده به‌خصوص برای تعریف اندازه استفاده کرد (*Lecons sur la théorie des fonctions*).

3. *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris*, 129, 1909.

تعاریفی معادل با آنچه در متن آمده، به‌وسیلهٔ نویسندگان متعددی پیشنهاد شده است، جالبترین آنها متعلق است به یانگ (W. H. Young) در

Philos. Trans. Roy. Soc. London, 204, 1905, *Proc, London, Math, Soc*,, 1910.

همچنین، مثلاً به یادداشتهای بورل و ریس [F. Riesz] رجوع کنید:

Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 154, 1912.

4. R. Gateaux, *Bull. Soc. Math. France*, 1919; P. Lévy, *Lecons d'analyse fonctionelle*, 1922; N. Wiener, *Proc. London Math. Soc.*, 1922; M. Fréchet, *Bull. Soc. Math. France*, 1915; P. J. Daniell, *Ann. of Math.*, 1918 and 1919.

5. *Ann. Sci. del' Ecole Normale Supérieure*, 1910.

۶. این اصطلاحات را، به ترتیب، د لا واله پوسن در

Integrales de Lebesgue, fonctions d'ensemble, classef de Baire, Paris, 1916

و ویتالی (G. Vitali) در *R. Acc. Sci. Torino*, 1908 وضع کرده‌اند. تابعی از یک مجموعهٔ اندازه‌پذیر مطلقاً پیوسته است اگر، هنگامی که E به طریقی تغییر کند که $m(E)$ به سمت صفر میل کند، $\psi(E)$ نیز به سمت صفر میل کند. «جمع‌پذیری کامل» مترادف «جمع‌پذیری شمارا»ست.

7. *Exercices d'analyse et de physique mathematique*, Vol. 2, Paris, 1840-1847, pp. 188-229.

۸. گفته می‌شود $p(E)$ دارای تغییرات کراندار است اگر به هر شیوه‌ای E را به تعدادی نامتناهی شمارا از مجموعه‌های دوبه‌دو مجزای E_1، E_2، ... افراز کنیم، سری $\sum |p(E_i)|$ همگرا باشد.

نماد توابع با تغییرات کراندار برای اولین بار توسط ژوردان برای توابع یک‌متغیره ارائه شد. تنها توابع مجموعه‌ای $p(E)$ که در این نظریه‌ها مطرح می‌شوند، توابع جمع‌پذیرند، یعنی **توابعی که برای آنها داریم**

$$p(E_1 + E_2 + \cdots) = p(E_1) + p(E_2) + \cdots$$

E_1، E_2، ... **دوبه‌دو مجزا** هستند. اگر جمع‌پذیری کامل باشد، یعنی اگر دنبالهٔ E_1، E_2، ... را بتوان به دلخواه انتخاب کرد، $p(E)$ لزوماً دارای تغییرات کراندار است. درواقع اگر ترتیب مجموعه‌ها بی‌اهمیت باشد سری $\cdots + p(E_1) + p(E_2)$ صرف‌نظر از ترتیب، باید همگرا باقی بماند یعنی سری $\sum |p(E_i)|$ همگراست.

هیچ تلاشی تاکنون انجام نشده است که از شرط کراندار بودن تغییرات $p(E)$ رهایی یابیم. باید، از این گذشته، ملاحظه کرد که اگر $p(E)$ دارای تغییرات کراندار نبود، می‌توانستیم یک تابع پیوستهٔ $f(p)$ بیابیم که تعریفمان از انتگرال در مورد آن صادق نباشد.

9. J. Radon, *Sitz, Kais. Ak.* **Wiss.** *Vienna*. Vol. 122, Section IIa, 1913; T. J. Stieltjes, *Ann. Fac. Sci. Toulouse*, 1894; F. Riesz, *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris*, 1909; H. Lebesgue, ibid., 1910; W. H. Young, *Proc. London Math. Soc.*, 1913; M. Fréchet, *Nouv. Ann. des Math.*, 1909; de la Vallee-Poussin, op. cit.

۱۰. در این مورد مثلاً مراجعه کنید به

J. reine angew. Math., 144, 1914, pp. 212-238.

۱۱. در بارهٔ این موضوع، یادداشتهای فوبینی (Fubini) و ویتالی را که در ۱۹۱۵ـ۱۹۱۶ در *Atti Rend R. Acc. Lincei* منتشر شده است، ببینید.

۱۲. همین وارد کردن شرایط پیوستگی است که تفاوت زیادی بین مسألهٔ توابع اولیه و مسألهٔ کوادراتور [تعیین مساحت] ایجاد می‌کند.

۱۳. ذکر این نکته مناسبت دارد که این فرضها در تضاد با یکدیگر نیستند، همچنان که اگر فرض شود E مجموعه‌ی از نقاط در یک بازهٔ در نظر گرفته شدهٔ (a,b) است که بر آن $f(x)$ مجموع‌پذیر نیست. برای مشخص کردنِ نقاط مجموع‌ناپذیری تابع بر (a,b) واقعاً لازم است که تمام نقاط (a,b) را در نظر بگیریم ــ چه متعلق به E باشند، چه نباشند. در حالی که مجموع‌پذیری بر E، شرطی است که تنها در نقاط E برقرار است.

۱۴. مشتقِ دینی (Dini).

۱۵. زندگینامهٔ مشروح دانژوا از ۱۹۱۵ تا ۱۹۱۷ در *Journal de Math.*، در *Ann. Sci. de l'Ecole Normale Superieure* و در *Bull. Soc. Math. France* به چاپ رسیده است.

1. totalization 2. derived number