گزیده‌هایی از کتاب

ریمان، توپولوژی، و فیزیک*

میخائیل موناستیرسکی*
ترجمهٔ سیامک کاظمی

دوران اولیهٔ زندگی ریمان

گئورك فریدریش برنهارد ریمان در ۱۷ سپتامبر ۱۸۲۶ دردهکدهٔ بریزلنتس[1] نزدیك شهر داننبرگ در امیرنشین هانور به‌دنیا آمد. پدرش، فریدریش برنهارد ریمان، کشیشی لوتری مذهب بود که در مبارزهٔ ضد ناپلئونی سالهای ۱۸۱۲–۱۸۱۴، معروف به "جنگهای رهایی‌بخش"، شرکت داشت. او در سپاه ژنرال اتریشی کنت لودویك والمودن که در محاصرهٔ هامبورگ به‌شهرت رسید، درجهٔ سروانی داشت. این سپاه که ترکیبی از واحدهای روس، پروس وسایرمتفقین بود،واحدهای مارشال داوو[ی فرانسوی] را درناحیهٔ مکلنبورك تار ومار کرد.

پدر ریمان در میانسالگی با شارلوت ابل، دختر یك مشاور دادگاه، ازدواج کرد. برنهارد دومین فرزند ازشش فرزند آنها بود که دو پسر و چهار دختر بودند. او در کودکی ازسلامت برخوردار نبود و به‌طور کلی، بیماری ومرگ ناگهانی گریبانگیر خانوادهٔ ریمان بود: مادرش وقتی که او بیست ساله بود در گذشت و برادر و سه تا از خواهرانش جوانمرگ شدند.

ریمان همیشه وابستگی زیادی به‌خانواده‌اش داشت و درتمام زندگی ارتباط بسیار نزدیکی را با اعضای‌خانواده حفظ می‌کرد. کمرویی و کم حرفی‌اش باعث می‌شد که در جمع خویشاوندان احساس راحتی و آزادی کند.

در پنجسالگی به‌تاریخ، و به‌خصوص تاریخ لهستان، بیش از هرچیزی علاقه‌مند شد. علاقه به‌تاریخ و به‌طور کلی به‌موضوعات علوم انسانی خصیصه‌ای است که بسیاری از ریاضیدانان بزرگ داشته‌اند. کافی است کارل فریدریش گاوس را در نظربگیریم که در زمان دانشجویی مردد بودکدام یك از دو رشتهٔ ریاضی یا فلسفه را به‌عنوان تخصص خود انتخاب کند، و نیز کارل گوستاو یاکوب یاکوبی را که در درسی‌در زمینهٔ زبانهای باستانی شرکت می‌کرد.

به‌زودی اعضای خانوادهٔ ریمان متوجه‌استعداد خارق‌العادهٔ او در محاسبه شدند. او درشش‌سالگی، تحت سرپرستی پدرش که مرد بسیار تحصیلکرده‌ای بود، مسائل حساب را حل می‌کرد. در دهسالگی‌اش، آموزگاری به‌نام شولتس شروع به‌تعلیم او کردولی به‌زودی شاگرد از معلم جلو افتاد. ریمان درچهارده‌سالگی مستقیماً واردکلاس سوم (عالی) مدرسهٔ متوسطهٔ هانورشد. پس از دوسال به‌مدرسهٔ متوسطهٔ شهرلونبورگ رفت و در آنجا تا ۱۹ سالگی به‌تحصیل ادامه داد.وی هرچند با جدیت درسهایی ازقبیل‌عبری و الهیات را مطالعه می‌کرد، ولی شاگرد درخشانی نبود.

اشمالفوس، مدیرمدرسهٔ متوسطه، به‌قریحهٔ ریاضی‌ریمان پی برد و به‌او اجازه داد که ازکتابخانهٔ شخصی‌اش استفاده کند. زمانی او کتاب نظریهٔ‌اعداد لژاندر را به‌ریمان داد. ریمان این‌کتاب راکه ۹۰۰ صفحه داشت، در شش‌روز مطالعه‌کرد و بسیاری ازمطالبی‌را که از این‌کتاب آموخت، سالها بعد در تحقیقات خودش در زمینهٔ نظریهٔ اعداد به‌کار برد.

ریمان در۱۸۴۶ بنا به‌میل‌پدرش دردانشکدهٔ الهیات‌دانشگاه گوتینگن نامنویسی‌کرد ولی علاقه‌اش به‌ریاضیات آن‌قدر قوی‌بود که از پدرش خواست با تغییر رشتهٔ او موافقت کند. دراین زمان دانشمندان معروفی مانندکارل گولد اشمیت اخترشناس که مغناطیس زمینی‌را درس می‌داد، موریتس‌اشترن ریاضیدان(۱۸۰۷–۱۸۹۴) که روشهای عددی و انتگرالهای معین را تدریس می‌کرد، و نیز "سلطان ریاضیدانان" کارل فریدریش گاوس(۱۷۷۷–۱۸۵۵)، در این دانشگاه به‌کار اشتغال داشتند. دراین زمان، گاوس که در اوج اقتدار علمی‌اش بود درس مختصری در زمینهٔ روش کمترین‌مربعات می‌داد. ولی با توجه به‌انزواطلبی و گوشه‌گیری ریمان، بعید است که او در این زمان تماس شخصی با گاوس داشته باشد. استعداد ریمان از چشم پروفسوراشترن پنهان نماند.اوبعدها گفت که ریمان از همان زمان در میان اقران خود ممتاز بود.

1. Breselenz

توپولوژی

درسال ۱۸۵۰ در گوتینگن، علائق ریمان درزمینهٔ ریاضیات محض معطوف به مسائل توابع یك متغیرمختلط بود. خوش اقبالی ریمان در این بود که پس از یك اقامت دوساله در برلین، که در آنجا اطلاعات مبسوطی در آنالیز کسب کرد، به گوتینگن برگشت. به احتمال قوی درهیچ جای دیگری جو علمی به اندازهٔ گوتینگن سرشار از ایده‌های هندسی، یا به زبان دقیقتر توپولوژیك، نبود. درهمین گوتینگن بود که در ۱۸۴۸ اولین کتاب درزمینهٔ توپولوژی با عنوان مطالعات مقدماتی در توپولوژی[1] به‌وسیلهٔ پروفسور لیستینگ انتشار یافت. لیستینگ مطالعات خود را در توپولوژی تحت تأثیر گاوس آغاز کرده بود. گاوس، چنانکه از آثار به‌جامانده‌اش پیداست، دراین زمینه زیاد کارکرده بود. ریمان با لیستینگ و تحقیقات او کاملاً آشنا شد ولی در واقع، صرفنظر از تعریف و برخی از ویژگیهای خمهای گره‌دار، نتوانست چیزی از این تحقیقات کسب کند. ازاین بابت نمی‌توان لیستینگ را سرزنش کرد و این امر فقط نشان‌دهندهٔ وضعیت واقعی شاخه‌ای از ریاضیات است کــه گوتفرید ویلهلم لایب‌نیتس(۱۶۴۶–۱۷۱۶) آن را "تحلیل جا"[2] می‌نامید. لایب‌نیتس درکتاب ویژگیهای هندسی[3]اش سعی کرد کــه، به‌زبان امروزی، ویژگیهایی ازاشکال را که به‌پارامترهای توپولوژیك، ونه‌هندسی، آنها مربوط است مطالعه‌کند. اونوشت که علاوه برنمایش‌مختصاتی اشکال "ما به‌شیوهٔ دیگری از تحلیل نیازمندیم که صرفاً هندسی یا خطی باشد. ومکان را همان‌طور تعریف کندکه جبر، کمیت را تعریف می‌کند". نکتهٔ جالب این است کــه لایب‌نیتس سعی کرد کریستیان هویگنس(۱۶۲۹–۱۶۹۵) را به‌این ایده‌هــا علاقه‌مند کنــد ولی هویگنس اشتیاق زیادی نشان نــداد. در طی ۱۵۰ سال بعد، بجز فرمول معروف اویلر دربارهٔ چندوجهیها($V-E+F=2$) که در آن، V تعداد رأسها، E تعداد یالها، و F تعداد وجوه‌است) وحل مسألــهٔ هفت پل کونیگسبرگ، اتفاق دیگری درنظریهٔ "تحلیل‌جا" رخ نداد.

اصطلاح "توپولوژی" که لیستینگ آن را معرفی کرد تازه در اوایل قرن ما براین‌رشته از ریاضیات اطلاق شد. ریمان اصطلاح "تحلیل‌جا" را به‌کار می‌برد.

اولین موفقیتهای علمی ریمان مربوط است به‌وارد کردن روشهای توپولوژیك در نظریهٔ توابع یك متغیرمختلط.

رویه‌های ریمانی

ریمان کارخود را از همان جایی که کار گاوس پایان یافته بود، آغاز کرد. او تابعهای تحلیلی را براساس ویژگی همدیسی بررسی کرد و به‌این ترتیب امکان یافت که از به‌کاربردن فرمولهای تحلیلی صریح اجتناب کند. ویژگی همدیسی بر گاوس نیزمعلوم بود (اثر او را که در گزارشهای نجومی[4] نقل شده، ببینید.) این تنها ارجاعی است که در رسالهٔ ریمان به‌نوشته‌های موجود دراین‌زمینه داده شده وهمین است که‌زمینهٔ اولیه را برای‌شروع تحقیقات خود او فراهم ساخت.

هدف اصلی این تحقیقات عبارت بود از بررسی رفتار یك تابع تحلیلی، نه روی صفحه، بلکــه روی رویه‌ای خاص یا به قول خود ریمان "روی‌رویه‌ای که برصفحه گسترده شده باشد". ریمان در بررسی کلی این‌مسأله به "تحلیل‌جا" بازگشت. ایدهٔ اصلی او این بود که بررسی رفتار یك تابع تحلیلی روی هر رویهٔ دلخواه به‌مطالعهٔ تابعی‌روی یك دامنهٔ ساده‌ـ‌همبند و به‌تعیین پرشهای تابع دربرشها تبدیل‌شود. به‌این منظور، تحقیق مبسوطی انجام داد که دراساس، توپولوژیك محض بود. دراینجا، اولین نتایج مربوط به‌رویه‌های ریمانی‌ظاهر می‌شود. ما این نتایج را با تفصیل بیشتری بررسی می‌کنیم.

همبندی یك رویه با استفاده ازسیستمی از برشها تعریف‌می‌شود؛ یعنی در واقع یك تعریف ترکیبیاتی ارائه می‌شود که نطفهٔ نظریهٔ همولوژی آینده‌است. رویه، ساده‌ـ‌همبند نامیده می‌شود اگرهر برشی آن‌را به‌قسمتهای جداگانه‌ای تقسیم‌کند. اگرچنین نباشد، رویه را چند‌ـ‌همبند می‌نامند. دراین تحقیق، در وهلهٔ اول رویه‌هایی با یك مرز موردنظرند. ریمان نشان دادکه همبندی رویه نبایــد به‌سیستم برشهایی‌که ایجاد می‌شوند بستگی‌داشته باشد. به‌طورمشخص، اگر تعداد برشهای یك سیستم معین‌برابر با n وتعداد قطعات ساده‌ـ‌همبند برابر با m باشد، آنگاه تفاضل $m-n$ به‌سیستم برشها بستگی‌ندارد و برای شکل مفروض یکسان خواهد بود. این عدد، مرتبهٔ همبندی نامیده می‌شود. مثلاً، در مورد قرص برابر است بــا ۱ — و در مورد حلقه، برابر با ۰ است. تعریف ریمان از درجهٔ همبندی با تعریف امروزی یك واحد اختلاف دارد. ریمان مفهوم همبندی‌را در مورد یك رویهٔ دوبعدی نیز به‌کار برد و رابطه‌ای را بین مرتبهٔ همبندی رویه و مرتبهٔ همبندی مرز ثابت‌کرد. تعداد خمهای مرزی جداگانهٔ یك رویهٔ nـ‌همبند یا برابر با n است و یا به‌اندازهٔ یك عدد زوج کوچکتر از آن است.

ریمان پس ازاین زمینه‌چینیها به‌مسألهٔ اصلی‌پرداخت: تعریف رفتار یك تابع تحلیلی که بریك رویهٔ چند‌ـ‌همبند دارای تکینیهای مفروض باشد. اوابتدا این مسأله رابرای یك دامنهٔ ساده‌ـ‌همبند حل کرد و سپس با استفاده از سیستمی از برشها و با محاسبهٔ پرشهای تابع در برشها، حالت‌کلی را به‌این حالت خاص تبدیل کرد. اودر مورد این دامنهٔ ساده‌ـ‌همبند دو قضیهٔ اساسی را ثابت‌کرد.

اولین قضیه می‌گویدکه اگر تابعی‌چون $u(x, y)$ در دامنه‌ای چون Ω در معادلــهٔ لاپــلاس صدق کند (چنین تابعی را همساز می‌نامند)،

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

آنگاه تابع u دارای مشتقات تمام مراتب است و به‌علاوه، قسمت حقیقی یك تابع تحلیلی چون $f(z)$ است. بــا مفروض بودن این مطلب، تابع f به‌وسیلهٔ u باتقریب افزایش یك جملهٔ ثابت موهومی محض به‌طور یکتا معین می‌شود.

قضیهٔ دوم ــ قضیهٔ وجود ــ می‌گویدکه درددرون یك دامنهٔ‌ساده‌ـ‌همبند (کافی‌است بحث را به‌مورد قرص محدودکنیم) یك و تنها یك تابع u وجود داردکه تا مرزی‌که مقدار مرزی مفروض f را درآنجا اختیار می‌کند، پیوسته باشد و در معادلهٔ لاپلاس‌در درون دامنه صدق کند.

---

1. *Vorstudien zur Topologie*
2. analysis situs
3. *Characteristica Geometrica*
4. *Astronomische Abhandlungen*

ریمان برای اثبات این قضیهٔ دوم یك اصل وردشی را به‌کار برد. به انتگرال مربوط به قرص

$$\iint\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^{۲}+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^{۲} dx\,dy \qquad (۳)$$

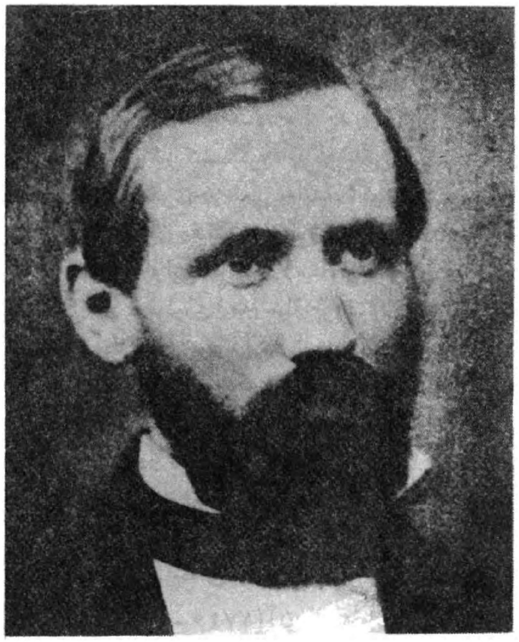
توجه کنید. در این انتگرال، شرایط زیر بر روی تابع u گذاشته می‌شود: u تا مرزی که در آنجا مقدار مرزی v را اختیار می‌کند پیوسته است و انتگرال (۳) در درون دامنه، متناهی است. حال ردهٔ همهٔ تابعهای u را که در این شرطها صدق کنند در نظر می‌گیریم. چون انتگرال (۳) در همه‌جا مثبت است، نتیجه می‌شود که مقدارهایش کران پایینی دارند. فرض کنیم این کران به‌ازای تابع خاصی چون $u=\bar{u}$ به‌دست می‌آید که دارای مقدار مرزی مفروض v است. این بدان معنی است که انتگرال (۳) به مینیمم خود $u=\bar{u}$ می‌رسد. مساوی صفر بودن وردش انتگرال (۳) یك شرط لازم برای حصول مینیمم است:

$$\delta\iint\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^{۲}+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^{۲} dx\,dy=0$$

که، همچنانکه می‌دانیم، هم‌ارز با معادلهٔ $\Delta u=0$ است. پس، در صورت وجود جواب برای این مسألهٔ وردشی، فوراً یك همساز متناظر، و در نتیجه، یك تابع تحلیلی، می‌یابیم.

ریمان این ابزار تحلیل را که بعداً آن را "اصل دیریکله" می‌نامید، بسیار به‌کار می‌برد. گرچه این مفهوم را گاوس، جورج گرین (۱۷۹۳–۱۸۴۱)، و ویلیام تامسن (لرد کلوین، ۱۸۲۴–۱۹۰۷) قبلاً می‌شناختند، ریمان اولین‌بار در درسهای دیریکله با آن آشنا شد. در "اصل دیریکله" دامهای خطرناکی هست که در اولین نگاه، آشکار نیست. مشکل اینجاست که نمی‌توان پیشاپیش ادعا کرد که: اگر یك انتگرال وردشی دارای مینیممی باشد، تابعی بالفعل وجود دارد که به‌ازای آن، مینیمم حاصل می‌شود. برای تشریح این وضع می‌توان مستقیماً مثالی از حساب وردشها آورد. مسألهٔ زیر را در نظر بگیرید: مسألهٔ یافتن خمی با کمترین طول در بین همهٔ خمهای هموار (دارای خمیدگی پیوسته)، که دو نقطهٔ A و B را به‌هم وصل کند و از نقطهٔ سومی چون C بگذرد که فرض می‌شود با A و B همخط نیست. به‌آسانی دیده می‌شود که طول خط شکستهٔ ACB کران پایین طولهای خمهای موردنظر است. از سوی دیگر، آشکار است که ABC دارای یك شکستگی در نقطهٔ C است و بنابراین، به ردهٔ خمهای مفروض تعلق ندارد.

مباحثاتی که در اطراف "اصل دیریکله" درگرفت، نقش مهمی در تاریخ ریاضیات و نیز تا حدی در زندگی خود ریمان داشته است.



اصل دیریکله

واقعیت این است که ریمان قبلاً در رسالهٔ دکتری خود و به‌خصوص در "نظریهٔ توابع آبلی" از اصل وردشیی که ما مورد بحث قرار دادیم ــ "اصل دیریکله" ــ استفاده کرده بود تا وجود یك تابع مطلوب با نوع خاصی از تکینیها را ادعا کند. وایرشتراس نشان داد که در حالت کلی، استنتاج وجود تابع مطلوب از اصل وردشی ناممکن است. این [موضوع وجود تابع] مستلزم اثبات خاصی بود که ریمان ارائه نداده بود.

کلاین واکنشی را که در برابر انتقاد وایرشتراس نشان داده شد به‌این صورت توصیف می‌کند:

> اکثریت ریاضیدانان از ریمان روی گرداندند ... ریمان عقیدهٔ کاملاً متفاوتی داشت. او درستی انتقاد وایرشتراس را درك می‌کرد ولی به‌طوری که زمانی وایرشتراس برایم نقل کرد، می‌گفت که از اصل دیریکله تنها به‌این دلیل استفاده کرده که آن را ابزار مناسب و آماده‌ای می‌دیده است، و قضایای وجودی او هنوز درست‌اند.

خود وایرشتراس هم همین عقیده را داشت. او شاگردش هرمان شوارتس (۱۸۴۳–۱۹۲۱) را تشویق کرد که بررسی کاملی از قضیهٔ وجودی ریمان به‌عمل آورد و به‌جستجوی اثباتهای دیگری بپردازد، و شوارتس در این امر توفیق یافت.

در ۱۸۶۹، بلافاصله پس از آنکه ملاحظات انتقادی وایرشتراس به‌چاپ رسید، شوارتس وجود جواب برای مسألهٔ دیریکله را بدون استفاده از روش وردشی ثابت کرد. روش او به‌این صورت بود: ابتدا مسألهٔ دیریکله را برای قرص به‌کمك انتگرال پواسن، ساختن یك تابع همساز $u(x, y)$ در قرص، و گرفتن مقدار f روی مرز، حل کرد. سپس نشان داد که چگونه می‌توان به دامنه‌ای دلخواه که به‌صورت اجتماع تعدادی متناهی از قرصها به‌دست آمده باشد،

رسید. اثبات جالب دیگری که پوانکاره آن را عرضه کرد ــ روش جاروکردن[1] ــ مبتنی بر نظریهٔ پتانسیل بود.

"اشتباه" ریمان پیامد جالبتری هم داشت و آن اینکه، متخصصان هندسهٔ جبری را برانگیخت تا اثباتی صرفاً جبری برای قضیهٔ ریمان، و مشخصاً برای قضیهٔ ریمان-رخ، پیدا کنند. کار برجستهٔ رادولف فریدریش آلفرد کلبش (۱۸۳۳–۱۸۷۲) که اصطلاح "گونهٔ یک رویه" را ابداع کرد، در همین راستاست. پل گوردون (۱۸۳۷–۱۹۱۲)، ماکس نویتر[2] (۱۸۴۴–۱۹۲۱)، و سرانجام داوید هیلبرت (۱۸۶۲–۱۹۴۳) در ۱۸۹۹ موفق شدند اثباتی از اصل وردشی به‌دست دهند. مشکل بتوان در تاریخ ریاضیات قرن نوزدهم نمونهٔ دیگری به‌یاد آورد که تلاش برای یافتن یک اثبات دقیق به‌چنین نتایج پرباری منجر شده باشد.

از نظر فیزیکدانان، کار ریمان کاملاً قانع کننده بود. در اینجا جملاتی از گزارش زومرفلد تحت عنوان "کلاین، ریمان، و فیزیک ریاضی" را می‌آوریم:

> رسالهٔ ریمان در آغاز برای ریاضیدانان معاصر او غریب می‌نمود ... این امر که شیوهٔ استدلال این رساله به‌فیزیک نزدیکتر بود تا به‌ریاضی، با داستانی که یکی از همکارانم نقل می‌کند تأیید می‌شود. زمانی این همکار با هلمهولتس و وایرشتراس برای گذراندن تعطیلات به‌جایی رفت. وایرشتراس رسالهٔ ریمان را در تمام مدت تعطیلی در دست داشت تا این اثر را که به‌نظر او کار پیچیده‌ای در ریاضیات بود در آرامش مطالعه کند. هلمهولتس نمی‌فهمید که متخصصان ریاضی چه پیچیدگیهایی در کار ریمان می‌بینند؛ از نظر او، بیان ریمان فوق‌العاده واضح بود.

چرا توضیح ریمان از نظر فیزیکدانان این‌قدر واضح بود ولی از نظر ریاضیدانان اشکالاتی در برداشت؟ دلیل این امر، البته، کند ذهنی ریاضیدانان و نبوغ فیزیکدانان نبود بلکه چیزهایی بود که هر یک از این دو گروه از اثبات طلب می‌کرد.

تابع زتا

به‌موجب مقررات آکادمی برلین، نخستین وظیفهٔ کسی که به‌عنوان عضو وابستهٔ آکادمی انتخاب می‌شد، فرستادن گزارشی از جدیدترین کارهایش بود. ریمان اثر خود دربارهٔ توزیع اعداد اول را بدین منظور برگزید، "مبحثی که نظر افرادی مانند گاوس و دیریکله را مدتی طولانی به‌خود جلب کرده بوده‌است و بنابراین، باید امیدوار بود که مورد توجه واقع شود". اثری که مؤلفش با این لحن فروتنانه از آن سخن می‌گوید، عنوانش دربارهٔ تعداد اعداد اولی که کوچکتر از عدد مفروضی هستند، بود. این اثر مسائلی را پیش روی ریاضیدانان قرار داد که سیر تکامل شاخه‌های متعددی از ریاضیات را در طول یک قرن رقم زدند.

اویلر برای بررسی توزیع اعداد اول قبلاً تابع زتا (ζ) را مطالعه کرده بود. (نماد ζ منتسب به‌ریمان است) و رابطهٔ زیر را به‌دست آورده بود

$$\zeta(s)=\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n^s}=\prod(۱-p^{-s})^{-۱}. \qquad (۱۵)$$

(ضرب روی همهٔ اعداد اول انجام می‌شود و جمع روی همهٔ اعداد صحیح مثبت. اویلر این رابطه را به‌ازای sهای حقیقی بررسی کرد.) از این فرمول، بلافاصله وجود تعدادی نامتناهی عدد اول نتیجه می‌شود (سری مربوط به $\zeta(۱)$ واگراست). ولی ریاضیدانان می‌کوشیدند اطلاعات دقیقتری دربارهٔ توزیع اعداد اول به‌دست آورند.

فرض کنید تعداد اعداد اول کوچکتر از یک عدد مفروض x را با $\pi(x)$ نشان دهیم. در آن زمان حدسی وجود داشت که ظاهراً از خود اویلر بود، و بر اساس آن وقتی $x\to\infty$، داریم

$$\frac{\pi(x)}{x/\log x}\longrightarrow ۱. \qquad (۱۶)$$

علی‌رغم تلاشهای ریاضیدانانی چون اویلر، لژاندر، و گاوس، این حدس اثبات نشده بود. گاوس با انرژی زیادی که خصیصهٔ او بود و با علاقه‌ای که به‌محاسبه داشت، حتی جدولی از اعداد اول کوچکتر از سه میلیون تشکیل داده بود.

قویترین نتیجه‌ای که قبل از ریمان به‌دست آمده بود، کار ریاضیدان بزرگ روس، چبیشف (۱۸۲۱–۱۸۹۴) بود که در ۱۸۵۴ در گزارشهای آکادمی علوم سن‌پترزبورگ به چاپ رسید. چبیشف ثابت کرد

$$A_۱<\frac{\pi(x)}{x/\log x}<A_۲$$

(که در آن، $۰٫۹۹۲<A_۱<۱$، $۱<A_۲<۱٫۱۰۵$)، ولی ثابت نکرد که حد وجود دارد. او برای اثبات این نابرابری از رابطهٔ (۱۵) استفاده کرد. در این مورد که ریمان از کار چبیشف مطلع بوده یا نه، اطلاعی نداریم.

ریمان هم کار خود را با اتحاد اویلر (۱۵) آغاز کرد ولی سری (۱۵) را به‌ازای مقادیر مختلط s مورد بررسی قرار داد و به‌این طریق در بررسی تابع ζ گامی برداشت که کاملاً تازگی داشت. (ما اصطلاحات پذیرفته شدهٔ جدید را به‌کار خواهیم برد و این تابع را تابع ζی ریمان خواهیم نامید). ریمان همگرایی سری (۱۵) را برای مقادیر مختلط بررسی کرد و معادلهٔ تابعی تابع ζ را استنتاج کرد.

کافی است فقط مسألهٔ توزیع اعداد اول را در نظر بگیریم تا دیده شود که چه نتیجه‌های مهمی می‌توان از ویژگیهای تحلیلی این تابع به‌دست آورد. مثلاً، قانون توزیع اعداد اول (فرمول ۱۶) هم‌ارز است با این گزاره که تابع ζی ریمان صفرهای مختلطی که قسمت حقیقی آنها برابر با ۱ باشد، ندارد: اگر $t\neq ۰$، $\alpha(a+it)\neq ۰$. ولی جالبتر از همه، این گزاره است که همهٔ صفرهای توابع $\zeta(s)$ به‌استثنای صفرهای بیمایه (-۲، -۴، ...، $-۲n$) روی خط راست $\operatorname{Re}\zeta(s)=۱/۲$ قرار دارند. این، فرضیهٔ معروف ریمان است که هنوز ثابت نشده‌است.

بیشتر نتایجی را که در این اثر آمده‌اند، ریاضیدانان نسلهای بعد به‌دقت اثبات کردند. به‌خصوص، ژاک آدامار (۱۸۶۵–۱۹۶۳)

1. balayage 2. Max Noether

و شارل دلاواله پوسن (۱۸۶۶-۱۹۶۲) درستی فرمول مربوط به‌$\pi(x)$ را ثابت کردند. ولی چنانکه خود آدامار نوشت، "تقریباً سه دهه طول کشید. تا توانستم همهٔ ویژگیهایی را که ریمان برای آنها فقط یك فرمول داده بود اثبات کنم، البته بجز یکی". این یکی، فرضیهٔ ریمان بود. در دستنوشته‌هایی از ریمان که در آرشیو دانشگاه گوتینگن نگهداری می‌شود به مطالب دیگری در ارتباط با $\zeta(s)$ برمی‌خوریم ولی متأسفانه، بر اساس این نوشته‌ها نمی‌توان هیچ اثباتی به‌دست آورد و فقط می‌توان دربارهٔ تأملاتی که ریمان را به‌این فرضیه هدایت کرده اطلاعی کسب کرد. آدامار جمله‌ای را که در نوشته‌های ریمان آمده به‌یاد می‌آورد: "این ویژگیها ازیکی از نمایشهای این تابع، که من نتوانستم آن را به‌قدری ساده کنم تا قابل انتشار باشد، به‌دست می‌آیند." این جمله، یادداشتی را به یاد ما می‌آورد که پیرفرما در ارتباط با قضیهٔ معروفش نوشت، قضیه‌ای که از امتناع حل معادلهٔ $x^n+y^n=z^n$ در اعداد صحیح به‌ازای $2<n$ سخن می‌گوید. جالب این است که مشابه این فرضیه درمورد هیأتهای دیگری، همنهشتی L-تابعها، به‌وسیلهٔ آندره ویل در ۱۹۴۱ ثابت شد. پس می‌توان گفت که به‌یك اعتبار، هیأت اعداد مختلط و -دقیقی که این‌همه با آن آشناییم، از هیأتهای دیگر پیچیده‌تر است.

سرنوشت کارهای ریمان

تا زمانی که ریمان زنده بود، از راه دستاوردهای خود نفوذ و اعتباری را که ظاهراً انتظار داشت به دست نیاورد. این نکته در وهلهٔ اول دربارهٔ دستاوردهایی صادق است که امروز شاید مهمترین خدمات او به‌علم محسوب گردد: نظریهٔ انتگرالهای آبلی، رویه‌های ریمانی، و هندسهٔ ریمانی. دلایل عینی و ذهنی بسیاری برای توضیح این امر می‌توان آورد. نظرهای او دربارهٔ هندسه مسلماً برای بسیاری از ریاضیدانها کاملاً تازگی داشت. نباید فراموش کرد که نفس تصور هندسهٔ نااقلیدسی با دشواری پذیرفته شده و اسباب خشم غالب فلاسفه را فراهم کرده بود. مثلاً دورینگ[1] درمقاله‌ای تحت عنوان "تاریخچهٔ انتقادی اصول عام مکانیك" که از سوی دانشکدهٔ فلسفهٔ دانشگاه گوتینگن در ۱۸۷۲ برندهٔ جایزهٔ بنکه[2] شد، نوشت:

> بنابراین، استاد فقید، ریاضیات گوتینگن، ریمان— که ازهمه لحاظ دنباله‌رو [گاوس] بود مگر از لحاظ نهانکاری—حتی تحت تأثیر فلسفه بافی هربارت گمراه شد و (در مقاله‌اش تحت عنوان "دربارهٔ فرضهایی که مبانی هندسه هستند") نوشت، "ولی به‌نظر می‌رسد مفاهیم تجربیی که تعریفهای فضایی عالم فیزیکی بر آنها استوارند، مفهوم جسم صلب و پرتو نور، در مقیاس بی‌نهایت کوچك دیگر معتبر نیستند. بنابراین، می‌توان گفت که این روابط فیزیکی فضایی در مقیاس بینهایت کوچك با اصلهای موضوع هندسه تطابق ندارند؛ و در واقع، این فکر در صورتی که مآلاً پدیده‌ها را ساده‌تر توضیح دهد، مجاز است."

سالها گذشت تا ایده‌های ریمان و هلمهولتس در کارهای پوانکاره و اینشتین تحقق یافت. آثار ریمان در زمینهٔ توابع آبلی —که از لحاظ ایده‌هایی که دربردارد درخشانترین آثار اوست— به‌شیوهٔ شهودی خاص او نوشته شده‌است. این مطالب درمواردی مبتنی براحکام اثبات نشده‌است و از لحاظ دقت با استانداردهای ریاضیات آن زمان انطباق ندارد. برای آنکه ببینیم تا چه حد ارزش کار ریمان ناشناخته بود، باز به مقالهٔ دورینگ مراجعه می‌کنیم:

> گواه مستقل‌نبودن اثر ریمان در زمینهٔ توابع آبلی این است که در این نوشته، صرفاً به‌خاطر اعتقاد ریمان به‌مرجعیت استادخود، همان روش‌شهودی استاد در بیان مطالب، به‌همان شکل کاملاً دلبخواهی، به‌کار گرفته و بسط داده شده‌است.

"استاد"ی که در اینجا از او یاد می‌شود، گاوس است. این مقاله امروز مایهٔ تعجب است اما باید درنظر داشت که دورینگ در زمان خودش فیلسوف معروف و پرنفوذی بود. ولی اگر این انتقاد بسیار ناشیانهٔ دورینگ را هم به‌حساب نیاوریم، واقعیت این است که ریاضیدانان با صلاحیت نیز درك چندان روشنی ازکارهای ریمان نداشتند.

انتقاد وایرشتراس از "اصل دیریکله" که کار ریمان مبتنی بر آن بود، دراین مورد بی‌تأثیر نبود. با این همه، به تدریج ایده‌های ریمان را کاملاً شناختند. هیلبرت "اصل دیریکله" را ثابت کرد و همهٔ استدلالهای ریمان براساس محکمی استوار شد. ریمان به‌این دلیل ریاضیدان بسیار بزرگی است که تقریباً هریك ازکارهایش سرآغاز تحقیقات پربارجدیدی از آب درآمده‌است.

می‌توان از نظریهٔ توابع خودریخت، قضیهٔ آتیا-سینگر دربارهٔ اندیس عملگرهای دیفرانسیل برخمینه‌های با بعد دلخواه —که تعمیمی است از قضیهٔ ریمان-رخ—، مسألهٔ مدولوسها درنظریهٔ خمینه‌های مختلط، وچیزهای دیگر نام برد.

جوهر موفقیتهای ریمان در این زمینه‌های مختلف فیزیك و ریاضی، عبارت بود ازنگرش فراگیر و همه‌جانبهٔ او به‌پدیده‌های طبیعی و شم خارق‌العادهٔ او در ادراك روابطی که بین پدیده‌های ظاهراً نامتجانس وجود دارد. او در تأملات فلسفی‌اش می‌نویسد: "کار عمدهٔ من عبارت است از درك جدیدی از قوانین شناخته‌شدهٔ طبیعت".

در اینجا شاید بی‌مناسبت نباشد که به‌توجه تمایز دو ریاضیدان بزرگ، ریمان و وایرشتراس، که نامشان در ریاضیات معاصر اغلب کنارهم می‌آید، توجه کنیم.

روش منطقی وایرشتراس، برخلاف روش شهودگرایانهٔ ریمان، عبارت بود از یك رشته استدلال دقیق و زنجیروار. او درمقالات و درسهای خود سخت به این روش پایبند بود. مفاهیمی که او از دقت درنظر داشت بعدها درکارهای ریاضی به‌صورت معیار درآمد. وایرشتراس، نمونهٔ کلاسیکی از یك ریاضیدان محض شمرده می‌شود و همین امر باعث می‌شود که نظر او دربارهٔ رابطهٔ ریاضیات با کاربردهایش اهمیت خاصی داشته باشد:

> روابطی که بین فیزیك و ریاضیات برقرار می‌شود باید ژرفتر از این باشد که فیزیك به‌ریاضیات به‌صورت یك‌رشتهٔ کمکی، ولو ضروری، نگاه کند و ریاضیدانها هم مسائلی‌را که فیزیکدانها مطرح می‌کنند صرفاً به صورت مثالهایی برای روشهایشان درنظر بگیرند... به‌این سؤال که "آیا

1. E. K. Duehring
2. Benecke

واقعاً از این نظریه‌های انتزاعی که ریاضیدانان معاصر را به‌خود مشغول داشته می‌توان چیزی به‌دست آورد که مستقیماً قابل کاربرد باشد؟" من چنین پاسخ می‌دهم که ریاضیدانان یونانی ویژگیهای مقاطع مخروطی‌را به‌شیوه‌ای صرفاً نظری و در زمانی مطالعه کردند که هیچکس نمی‌توانست پیش‌بینی کند این‌خمها نشان‌دهندهٔ مسیر گردش‌سیارات‌اند. من‌عقیده دارم‌که توابع بسیار بیشتری بـا این‌گونـه ویژگیها پیدا خواهد شد؛ مثلاً، به‌نظر‌من، تابعهای معروف Θی ژاکوبی از یك طرف این‌امکان را فراهم می‌کنند‌که ببینیم یك عدد مفروض به‌چند مربع تجزیه می‌شود و از‌این‌طریق‌راستیدن قـوسی از بیضی را امکانپذیر می‌کنند، و از طرف دیگر، یافتن قانون صحیح نوسانات آونگ را میسر‌می‌سازند.

تمایز آشکار بین وایرشتراس و ریمان نه‌تنها در‌مسائل‌فیزیکی دشوار‌و‌مشخصی که حل کردند‌بلکه در‌تلاش برای ساختن‌نظریه‌های توضیح دهندهٔ پدیده‌های طبیعی، متجلی‌است.

این دو دیدگاه متقابل دربارهٔ ریاضیات در همهٔ مراحل تکامل علم دیده می‌شود.

ژاکوبی این دو‌نظر را به‌شکل‌واضحی بیان می‌کند:

آقای فوریه عقایدی از این قبیل دارد‌که‌گویا هدف اصلی ریاضیات، سودمندی اجتماعی‌آن و‌توضیح پدیده‌های‌طبیعت است؛ ولی او درمقام یك فیلسوف باید دانسته باشد‌که‌تنها هدف علم، اعتلای‌شهامت عقل‌بشری‌است و بنا‌بر‌این،مسائل نظریهٔ اعداد، کم ارزشتر از مسائل مربوط به‌نظام جهان نیستند.

بار‌آور‌ترین پدیده در سیر واقعی تحول علم، همزیستی این دو دیدگاه‌است‌که می‌توانیم‌آنها را به‌پیروی از نیلس‌بور از زمرهٔ "حقایق بزرگ" بشماریم. (حقیقت‌بزرگ، حقیقتی‌است‌که نقیض آن‌هم حقیقت بزرگی‌باشد.) تأیید این‌گفته را‌ می‌توان در‌کارهای ژاکوبی‌در زمینهٔ مکانیك وکارهای ریمان در نظریهٔ اعداد ملاحظه کرد. با این همه، در تاریخ علوم ریاضی دوره‌هایی وجود داشته است‌که یکی از این‌دو‌گرایش رایجتر از دیگری بوده‌است.

کلاین، که یك "شهودگرا"ی نمونه بود و تلاش زیادی‌برای شرح و‌بسط ایده‌های ریمان‌کرد، توصیف طنز‌آمیزی از ریاضیات انتهای قرن نوزدهم به‌دست داده‌است:

ریاضیات روزگار ما، تولید طپانچه و سلاحهای سبك را‌در زمان صلح به‌یـاد من می‌آورد. ویترین فروشگاه اسلحه، مملو از مدلهایی است‌که فرد متخصص از ظرافت و ساخت هنرمندانهٔ‌آنهـا لذت می‌برد؛ ولی علت وجودی و فایـدهٔ این‌اشیا ــ یعنی‌قابلیت آنها در‌تیر‌اندازی و‌هدف‌قراردادن دشمن‌ــ از نظر دور می‌ماند.

درست همین وضع در دهه‌های ۱۹۴۰ و ۱۹۵۰ پیش آمد. فریمن دایسن فیزیکـدان نظری معروف آمریکایی این وضـع را به‌خوبی توصیف کرده‌است: "ازدواج ریاضیات و فیزیك کـه در قرنهای‌گذشته آن‌قدر بار‌آور بود اخیراً به‌طلاق انجامیده است." علل مختلفی‌باعث پیدایش‌این وضع شده بود. امروزالبته تصورش ناممکن‌است‌که ریاضیدانی در آزمایشگاه فیزیك تجربی کار کند، دوران ریمان دیگر باز نمی‌گردد، ولی‌در‌سالهای اخیر‌شاهد‌تجدید علاقه به‌فیزیك درمیان ریاضیدانان"محض"هستیم. این‌تجدید علاقه اولین ثمراتش‌را درهمان زمینه‌های ریاضی به‌بار‌آورده‌که ریمان در‌آنها‌کار‌کرده‌است.

در عین‌حال، بین مـوضوعهایی کـه ذهن ریمان را به‌خود مشغول داشته بودند روابط‌کاملاً جدید و‌جالبی‌پیدا شده‌است. مثلاً در نظریهٔ موجهـای غیرخطی (ونیز در مورد رده‌های دیگری از معادلات)، پای‌تابعΘی ریمان در‌کشف سولیتونهای تناوبی‌به‌میان آمده است. نظریهٔ‌گرانش‌که مبتنی برهندسهٔ ریمانی‌است با نظریهٔ واکنشهای قوی (از طریق نظریهٔ میدانهای پیمانه‌ای) در‌آمیخته است. نیز نظریهٔ‌کوانتومی‌گرانش پدید‌آمده‌کـه در‌آن، روشهای هندسهٔ جبری و توپولوژی بسیار‌به‌کار می‌روند. این روشها از‌کار ریمان در زمینهٔ توابع آبلی نشأت‌گرفته‌اند. هنوز خیلی‌زود است که از "رنسانس"جدیدی در ارتباط متقابل فیزیك و ریاضی‌سخن بگوییم ولی موفقیتهای قاطعی در‌این‌جهت به‌دست آمده است.

بیش از صد سال از مرگ ریمان می‌گـذرد. ریاضیات بـا پیدایش ایـده‌هـا و نتایج جدید بسیار غنیتر شده است. نظریـهٔ مجموعه‌های‌کانتور چهره عوض کرده و‌درجهٔ انتزاع بسیار‌بالا رفته است‌ــ‌کافی‌است‌نظریهٔ‌رسته‌ها و‌تابعگونها، نظریهٔ‌اسکیمهای صوری گروتندیك و نظایر اینها را به‌یاد‌آوریم. و جالب اینجاست‌که در قلهٔ نظریه‌های جدید، برای مفاهیم‌ریمانی‌که به‌نظر‌معاصران او‌مبهم و نادقیق بودنـد، توصیف بسیار رسایی به‌زبـان هندسهٔ جبری و توپولوژی معاصر‌پیدا شده است.

معهذا بارووری هرایدهٔ ریاضی، امکان حصول پیشرفت درزمینهٔ مسائل مشخص و پیچیده‌ای [در حول وحوش آن ایده] است‌کـه نسلهای قبل ازخود به‌جا گذاشته‌اند. اکنون نیز‌مانند‌گذشته، فرضیهٔ ریمان ریاضیدانان معاصر را به‌مبارزه می‌طلبد.

شکی‌نیست که‌کارهای ریمان نه‌تنها‌نظر‌مورخان علم‌بلکه توجه ریاضیدانان پژوهشگر را نیز سالهای متمادی به‌خود جلب خواهد کرد.

◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆

● این کتاب را انتشارات Birkhaüser به انگلیسی منتشر کرده و شامل دو قسمت است. قسمت اول ترجمه‌ای است از مقاله‌ای که اول بار در یکی از مجلات شوروی به نام پریرودا (*طبیعت*) به مناسبت صد و پنجاهمین سالگرد تولد ریمان به چاپ رسیده است. قسمت دوم، به کاربردهای گوناگون توپولوژی در فیزیك معاصر اختصاص دارد.

مطلب حاضر از منبع زیر به فارسی ترجمه شده است:

Michael Monastyrsky, "Excerpts from Riemann, topology, and physics," *The Mathematical Intelligencer*, (2)**9** (1987) 46-52.

★ میخائیل موناستیرسکی، بخش نظری مؤسسهٔ فیزیك نظری و تجربی آکادمی علوم شوروی