آشنایی مقدماتی با نظریهٔ K •

مکس کروبی*
ترجمهٔ علی تقوی، مرضیهٔ شیرانی

هدف از این نوشته آشنا کردن خواننده با «نظریهٔ K» است که یک موضوع جدید ریاضی و مرتبط با چندین شاخهٔ ریاضیات است. این نظریه را الکساندر گروتندیک[1] [۲۳] به‌منظور حل بعضی مسائل مشکل هندسهٔ جبری در دههٔ ۵۰ ابداع کرد. (حرف "K" از کلمهٔ "Klassen" [رده] در زبان آلمانی، زبان مادری گروتندیک، گرفته شده است.) ایدهٔ نظریهٔ K به بخشهای دیگر ریاضیات نیز راه یافته است، مثلاً به نظریهٔ اعداد [۲۷]، توپولوژی ([۲۵]، [۱۸]) و آنالیز تابعی [۴]. از میان موفقیتهای بسیار نظریهٔ K، باید به حل مسأله‌های کلاسیک توپولوژی، قضیهٔ شاخص اتیا_سینگر[2] [۲۰] و تعمیم گسترده‌اش به موضوع جدید «هندسهٔ ناجابجایی» [۴] و کاربردهای جبری فراوان آن ([۳۷]، [۳۳]) اشاره کرد.

این مقاله به هیچ‌وجه جامع و کامل نیست و تقریباً هیچ اثباتی در آن نیامده است، اما ایده‌های اساسی کاملاً ساده‌اند و آموزش ویژه‌ای برای آغاز مطالعهٔ موضوع لازم نیست، هر چند اگر به‌دنبال کاربردهایی از نظریهٔ K در رشتهٔ خاصی باشید، مسلماً دانش کافی از آن رشته (مثلاً هندسهٔ جبری، نظریهٔ اعداد، آنالیز تابعی، و ...) لازم است.

بحث ما در این مقاله مبتنی بر یکی از زیباترین جنبه‌های موضوع یعنی تناوب بات[3] است. با توجه به توضیحاتی که در اینجا در مورد جوانب مختلف نظریهٔ K داده می‌شود می‌توان مسائل و گمانه‌های اصلی مورد بحث این نظریه را حدس زد.

پیشنیازِ خواندنِ این نوشته قدری آشنایی با توپولوژی و جبر مقدماتی است. برای نمونه، کتاب عالی آلن هچر [۱۲] یا منابع زیر را ببینید، هرچند تعریفهای اساسی در اولین بخش این مقاله داده شده است. در زیر، منابعی برای مطالعهٔ پیشرفته در این نظریه پیشنهاد شده است. منابع کامل‌تر در طول مقاله ذکر شده و در پایان یادآوری شده است.

آشنایی با موضوع و کاربردها: [۱]، [۲]، [۳]، [۴]، [۶]، [۳۲]، [۹]، [۱۰]. هنگام مواجهه با جزئیات فنی اجتناب‌ناپذیر نباید دلسرد شد، باید به‌جستجوی مفاهیم و ایده‌های اصلی پرداخت که اغلب در آغاز این کتابها توضیح داده شده‌اند.

چند کتاب مقدماتی توپولوژی جبری: [۱۲]، [۱۱]، [۱۳].

کتابها و مقاله‌های پیشرفته‌تر: [۵]، [۱۰]، [۱۸]، [۲۰]، [۲۳]، [۳۰]، [۳۱]، [۳۴]، و ...

۱. مقدماتی از نظریهٔ هوموتوپی. قضیهٔ کلاسیک تناوب بات

فرض کنید X و Y دو فضای توپولوژیک «ایده‌آل» (برای نمونه فضاهایی متریک) باشند. دو نگاشت پیوستهٔ f_0 و f_1 از Y به X هوموتوپ هستند اگر بتوان نگاشت پیوسته‌ای* چون $F : Y \times [0,1] \to X$ یافت که به‌ازای $F(y,i) = f_i(x), i = 0,1$. این رابطه یک رابطهٔ هم‌ارزی است و مجموعهٔ رده‌های هم‌ارزی را با $[Y,X]$ نمایش می‌دهیم. محاسبهٔ صریح این مجموعه به‌طور کلی مشکل است، حتی برای فضاهایی به‌سادگی کره‌ها (محاسبهٔ گروههای هوموتوپی کره‌ها را در زیر ببینید).

دو فضای X و Y به‌طور هوموتوپ هم‌ارز هستند (یا از یک گونهٔ هوموتوپی هستند) اگر دو نگاشت $f : Y \to X$ و $g : X \to Y$ وجود داشته باشند که $f \cdot g$ هوموتوپ با Id_X و $g \cdot f$ هوموتوپ با Id_Y باشند. ایده‌ای که در پس این تعریف نهفته است مفهوم «شکل» یک فضاست که دقیقاً مترادف

1. Alexander Grothendieck
2. Atiyah-Singer index theorem
3. Bott periodicity

* نگاشتهای مورد بحث در این مقاله را پیوسته درنظر می‌گیریم.

با «گونهٔ هوموتوپی» است. صرف‌نظر از جزئیات، دوفضا شکل یکسان دارند اگر بتوان با تغییر شکل، یکی را به‌دیگری تبدیل کرد. مفهوم ریاضی «تغییر شکل» همان «گونهٔ هوموتوپی» است که هم اینک تعریف کردیم.

یک نوع از این ملاحظات، در نظر گرفتن فضای X با «نقطهٔ پایهٔ»، x_0، و نگاشتهای حافظ نقطهٔ پایه است. برای مثال، در تعریف بالا از نگاشتهای هوموتوپ، به‌علاوه فرض می‌کنیم $F(y_0, t) = x_0$. انگیزه‌ای برای این نوع تعریف، تعریف گروههای هوموتوپی فضای X (با نقطهٔ پایهٔ ثابت) است. این گروهها دقیقاً رده‌های هم‌ارزی X هستند هنگامی که Y را یک کرهٔ S^p (با نقطهٔ پایهٔ معلوم) بگیریم.* گروههای هوموتوپی نقش مهمی در توپولوژی جبری ایفا می‌کنند.

به زبان دقیق‌تر، رده‌های هوموتوپی نگاشتهای حافظ نقطهٔ پایه از کرهٔ S^p به X، مجموعهٔ مؤلفه‌های مسیریْ‌همبند است اگر $p = 0$، یک گروه است اگر $p > 0$ و یک گروه آبلی است اگر $p > 1$. این گروه (یا مجموعه، اگر $p = 0$) به‌صورت $\pi_p(X, x_0)$، یا اگر نقطهٔ پایه به‌طور ضمنی منظور شده باشد به‌صورت $\pi_p(X)$ نوشته می‌شود. اگر دو نقطهٔ x_0 و x_1 در یک مؤلفهٔ مسیریْ‌همبند X باشند، می‌توان نشان داد $\pi_p(X, x_0)$ و $\pi_p(X, x_1)$ یکریخت هستند. به‌سادگی نشان داده می‌شود که دوفضای هم‌ارز هوموتوپ، گروههای هوموتوپی یکریخت دارند.

باید افزود که $\pi_1(X)$ «گروه بنیادی» یا «گروه پوانکارهٔ» یک فضا نامیده می‌شود: پوانکاره این گروه را برای درکِ رفتار جوابهای معادلات دیفرانسیل حول نقطهٔ بحرانی معرفی کرد.

دیگر گروههای هوموتوپی $\pi_i(X)$ به‌ازای $i > 1$، نقشی اساسی در توپولوژی دیفرانسیل دارند، مثلاً در مواردی از قبیل رده‌بندی خمینه‌ها: به‌عنوان نمونه، «حدس پوانکاره» سؤال زیر را مطرح می‌کند: فرض کنید M یک خمینهٔ توپولوژیک از بعد ۳ باشد که همان گونهٔ هوموتوپی S^3 را دارد. آیا M با S^3 همسانریخت است؟ این یکی از مسأله‌هایی است که مؤسسهٔ ریاضیات کلی برای آن جایزه تعیین کرد.[1]

محاسبهٔ گروههای هوموتوپی یک فضا بسیار دشوار است. برای مثال، $\pi_p(S^r)$ به‌ازای $r > 1$ در حالت کلی شناخته نشده است. با این حال، می‌دانیم این گروه اگر $p < r$، صفر و اگر $p = r$، با $\mathbf{Z}$ یکریخت است. به ازای $p > r$، برخی اطلاعات جزئی، که از تحقیقات اساسی سِر به دست می‌آید، به صورت زیر است: اگر r فرد باشد یا r زوج باشد و $p \neq 2r - 1$، $\pi_p(S^r)$ متناهی است. اگر r زوج باشد و $p = 2r - 1$، $\pi_p(S^r)$ مجموع مستقیم $\mathbf{Z}$ و یک گروه متناهی است. برای ملاحظهٔ این نتایج و نتایج کلی‌تر می‌توانید مرجع [۱۳] را که کتابی پایه‌ای در نظریهٔ هوموتوپی است ببینید.

به هر حال، همان‌طور که بات خاطر نشان کرده بود، گروههای هوموتوپیِ «گروههای لی» قاعدتاً باید تحت شرایط مشخصی راحت‌تر تعیین شوند. گروههای لی مورد نظر در اینجا به عنوان مجموعه‌هایی از ماتریسهای

* کرهٔ S^p زیرمجموعه‌ای از $\mathbf{R}^{p+1}$ است که $(x_1)^2 + \ldots + (x_{p+1})^2 = 1$.

۱. این مسأله را گریگوری پرلمان ریاضیدان روس حل کرده است.ـ م.

$n \times n$ وارون‌پذیر با ضرایبِ متعلق یکی از میدانهای عددی $\mathbf{R}$، $\mathbf{C}$، یا $\mathbf{H}$، به ترتیب اعداد حقیقی، اعداد مختلط، یا کواترنیون‌ها تعریف می‌شوند. این گروهها را با نمادهای $G_n = GL_n(\mathbf{R}),\ GL_n(\mathbf{C}),\ GL_n(\mathbf{H})$ نمایش می‌دهیم. توپولوژی (و متریک) این گروهها، حاصل از نشاندن طبیعیِ آنها در فضایی اقلیدسی با بعد مناسب است.

می‌توان دید که $\pi_p(G_n)$ وقتی n افزایش می‌یابد «ثابت و پایدار می‌ماند». به زبان دقیق‌تر، مشمولیت متعارف G_n در G_{n+1} (با اضافه کردن صفرها جز برای عضو گوشهٔ راست پایین که مساوی ۱ باشد) [$\begin{pmatrix} a_{n} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$ به $\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ـم.] یکریختی $\pi_p(G_n) \approx \pi_p(G_{n+1})$ را برای nهای به اندازهٔ کافی بزرگ القا می‌کند ([۲۸]، صص ۱۳ـ۱۴). در واقع، باید $n > p + 1$ (به ترتیب، $n > p/2$، $n > p/4 + 1/2$) را برای $GL_n(\mathbf{R})$ (به ترتیب $GL_n(\mathbf{C})$، $CL_n(\mathbf{H})$) در نظر بگیریم. این گروههای هوموتوپی پایدار را به ترتیب با $\pi_p(GL(\mathbf{R}))$، $\pi_p(GL(\mathbf{C}))$، یا $\pi_p(GL(\mathbf{H}))$ نمایش می‌دهیم. نتیجهٔ شایان توجه بات حاکی است که:

قضیه [۲۵]. این گروههای هوموتوپی پایدار، تناوبی هستند. به بیان دقیق‌تر

$$\pi_p(GL(\mathbf{R})) \approx \pi_{p+4}(GL(\mathbf{H})) \approx \pi_{p+8}(GL(\mathbf{R}))$$
$$\pi_p(GL(\mathbf{C})) \approx \pi_{p+2}(GL(\mathbf{C})).$$

توضیح. این قضیه در نگاه اول کاملاً فنی به‌نظر می‌رسد. اما مدت کوتاهی پس از کشف بات مشخص شد که این قضیه نقشی مرکزی در بسیاری از کاربردها دارد. در واقع نظریهٔ Kی توپولوژیک (بخش بعدی مقاله را ببینید) بدون این قضیه به وجود نمی‌آمد.

از چشم‌اندازهای دیگری نیز می‌توان به این قضیه نگریست و آن را تعمیم داد. اگر X فضایی با نقطهٔ پایهٔ x_0 باشد، ΩX را فضای نگاشتهای پیوستهٔ حافظ نقطهٔ پایهٔ σ از دایرهٔ S^1 به X می‌نامیم: این «فضای طوقه‌ای» X نامیده می‌شود. در حالت فضای متریک، توپولوژی ΩX توسط متریک $d(\sigma, \tau) = \operatorname{Sup}\, d_X(\sigma(t), \tau(t))$ القا می‌شود که t در تمام دایره تغییر می‌کند. گروههای هوموتوپی ΩX، همان گروههای هوموتوپی X هستند با یک انتقال $\pi_n(\Omega X) \approx \pi_{n+1}(X)$. به‌علاوه، می‌توان ساختن فضای طوقه‌ای را تکرار کرد: مثلاً $\Omega^2(X)$ را به‌صورت $\Omega(\Omega X)$ تعریف می‌کنیم، و همین طور $\Omega^3(X) = \Omega(\Omega^2(X))$ و غیره. به‌سادگی می‌توان نشان داد $\pi_n(\Omega^r X) \approx \pi_{n+r}(X)$. با این تعریف جدید، تناوب بات را می‌توان به شکل کلی‌تری بیان کرد: روابط هوموتوپی*

$$GL(\mathbf{R}) \approx \Omega^4(GL(\mathbf{H})) \approx \Omega^8(GL(\mathbf{R}))$$

* برای تعریف دقیق‌تر $G = GL(\mathbf{R}),\ GL(\mathbf{C}),\ GL(\mathbf{H})$، پایان این بخش را ببینید.

و

$$GL(\mathbf{C}) \approx \Omega^2(GL(\mathbf{C}))$$

را داریم. اگر H زیرگروه بستهٔ گروه لی G باشد، فضای همگن G/H خارج‌قسمت G با رابطهٔ هم‌ارزی

$$g_1 \sim g_2 \Leftrightarrow (g_2)^{-1}g_1 \in H$$

است. «فضای همگن» $GL(\mathbf{C})/GL(\mathbf{R})$ به‌عنوان نوعی حد فضاهای $GL_n(\mathbf{C})/GL_n(\mathbf{R})$ (هر ماتریس حقیقی یک ماتریس مختلط است) تعریف می‌شود؛ به همین طریق $GL(\mathbf{R})/GL(\mathbf{C})$ حد $GL_{2n}(\mathbf{R})/GL_n(\mathbf{C})$ است، که $GL_n(\mathbf{C})$ در $GL_{2n}(\mathbf{R})$ به وسیلهٔ نگاشت کلاسیک $A+iB \mapsto \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}$ نشانده شده است. در [۲۵] نیز نشان داده شده است که هم‌ارزی‌های هوموتوپی زیر را داریم*

$$\begin{aligned}
&\Omega(\mathbf{Z}\times BGL(\mathbf{R})) \approx GL(\mathbf{R})\\
&\Omega(GL(\mathbf{R})) \approx GL(\mathbf{R})/GL(\mathbf{C})\\
&\Omega(GL(\mathbf{R})/GL(\mathbf{C})) \approx GL(\mathbf{C})/GL(\mathbf{H})\\
&\Omega(GL(\mathbf{C})/GL(\mathbf{H})) \approx \mathbf{Z}\times BGL(\mathbf{H})\\
&\Omega(\mathbf{Z}\times BGL(\mathbf{H})) \approx GL(\mathbf{H})\\
&\Omega(GL(\mathbf{H})) \approx GL(\mathbf{H})/GL(\mathbf{C})\\
&\Omega(GL(\mathbf{H}))/GL(\mathbf{C})) \approx GL(\mathbf{C})/GL(\mathbf{R})\\
&\Omega(GL(\mathbf{C})/GL(\mathbf{R})) \approx \mathbf{Z}\times BGL(\mathbf{R}).
\end{aligned}$$

(برای ملاحظهٔ اثبات و تعریف ملموسی از فضاهای همگن G/H در موقعیتهای مختلف، ر.ک. [۶]، ص ۱۴۸).

برای $G = GL(\mathbf{R}), GL(\mathbf{C}),\ GL(\mathbf{H})$، «فضای رده‌بندی» BG را می‌توان (با تقریب هوموتوپی) به‌صورت صریح زیر توصیف کرد. این فضا، فضای متشکل از نگاشتهای پیوستهٔ خطی $Q : H \to H$ است که H یک فضای هیلبرت نامتناهی‌بعد (روی $\mathbf{R}$، $\mathbf{C}$، یا $\mathbf{H}$) است به‌طوری که $Q^2 = Q$، نگارهٔ[1] Q یک فضای برداری متناهی‌بعد است. به همین طریق، G گونهٔ هوموتوپی فضای توابع پیوستهٔ خطی $\alpha : H \to H$ را دارد به طوری که $1 - \alpha$ یک عملگر فشرده است (یعنی حد عملگرهای متناهی‌رتبه).

توضیحات و مراجعی برای مطالعهٔ بیشتر

شرح خوبی از کارِ بات در کتابهای درسی و مقاله‌های گوناگون، مناسب با سلایق مختلف، یافت می‌شود:

۱. مقالهٔ اصلی بات [۲۵]، این مقاله برای مبتدی مشکل است (استفادهٔ زیاد از «نظریهٔ مورس»[2]، که موضوعی عمیق در هندسهٔ ریمانی است)، برای یک نگاه اجمالی به موضوع، [۳۲] توصیه می‌شود.

۲. اثباتی مقدماتی (در حالت مختلط) توسط اتیا و بات [۱۷] که در کتاب اساسی اتیا [۱] نیز آمده است.

۳. استفادهٔ اصولی از نظریهٔ Kی مختلط و حقیقی (بخش بعدی را ببینید)، که در آن تناوب بات به عنوان یک نتیجهٔ تناوبی جبرهای کلیفرد[1] ظاهر می‌شود [۶].

دربارهٔ توپولوژی جبری کتابهای خوب زیادی در سطح دورهٔ کارشناسی وجود دارد. ما [۱۲] را به عنوان در دسترس‌ترین منبع توصیه می‌کنیم.

۲. آغاز نظریهٔ K

نقطهٔ آغاز نظریهٔ K، ایدهٔ ساده‌ای از گروتندیک بود [۲۳]. اگر M یک نیمگروه باشد، به همان طریقی که $\mathbf{Z}$ از نیمگروه $\mathbf{N}$ (اعداد طبیعی) ساخته می‌شود، می‌توان M را به نوعی «متقارن» کرد. به بیان دقیق‌تر، گروه جدید $S(M)$ را به M نسبت می‌دهیم که به صورت خارج قسمت $M \times M$ به روی رابطهٔ هم‌ارزی زیر تعریف می‌شود.

eای وجود داشته باشد که $(a,b) \sim (c,d) \Leftrightarrow a+b+e = b+c+e$

نگاشتی از M به $S(M)$ وجود دارد که m را به ردهٔ $(m, 0)$ می‌نگارد که در حالت کلی یک‌به‌یک نیست. واقعیت امر این است که محاسبهٔ نیمگروه M، حداقل در مواردی که ما در نظر داریم، کاری است پیچیده (مثال $\phi(A)$ را در زیر ببینید.) در حالی که $S(M)$ به وسیلهٔ تکنیکهای استاندارد جبر و توپولوژی قابل دستیابی است.

در اینجا به یک مثال اساسی اشاره می‌کنیم. فرض کنید A حلقه‌ای یکه‌دار، و $M = \phi(A)$ مجموعهٔ Aـمدولهای (راست) تصویری متناهی‌مولد با تقریب یکریختی باشد. به وضوح، چنین مدول E به عنوان نگارهٔ یک Aـنگاشت خطی Q از A^n به A^n تعریف می‌شود به طوری که $Q^2 = Q$. اگر A میدان باشد، E دقیقاً یک فضای برداری متناهی‌بعد است.

از نمادگذاری‌ها بر می‌آید که M یک نیمگروه با قانون ترکیب زیر است: $\overline{E} + \overline{F} = \overline{E \oplus F}$ که $\overline{E}$ در حالت کلی ردهٔ یکریختی مدول E را نشان می‌دهد. گروه گروتندیک $S(M)$ که از M با متقارن‌سازی به دست می‌آید، نظریهٔ Kی A نامیده و با $K(A)$ نشان داده می‌شود.

توجه کنید که $K(A)$ یک «تابعگون» است: یک همریختی حلقه‌ای $f : A \to B$، نگاشت گروهی $K(A) \to K(B)$ را القا می‌کند. در سطح مدولها، به Aـمدول E، Bـمدول تعریف شده توسط رابطهٔ $F = E \otimes_A B$ نسبت داده می‌شود. اگر E را به صورت نگارهٔ Q مانند بالا بنویسیم، F نگارهٔ عملگر تصویری $\widetilde{f}(Q)$ است که $\widetilde{f}$ همریختی حلقه‌ای مربوط به $M_n(A) \to M_n(B)$ است.

در حالت خاص، نگاشت حلقه‌ای یکتای $\mathbf{Z} \to A$ وجود دارد. هم‌هستهٔ[2] نگاشت طبیعی مربوطهٔ $K(\mathbf{Z}) \to K(A)$ (نشان دادن اینکه $K(\mathbf{Z})$ با $\mathbf{Z}$

* تعریف ملموس BG را در ادامهٔ مقاله ببینید.

1. image 2. Morse theory

1. Clifford algebras 2. cokernel

یکریخت است، نسبتاً ساده است؛ جدول Kـگروهها را در ادامه ببینید.) نظریهٔ Kی فروکاستهٔ A است و با $\widetilde{K}(A)$ نمایش داده میشود. اگر A جابهجایی باشد، $K(A)$ یکریخت با مجموع مستقیم $\mathbf{Z} \oplus \widetilde{K}(A)$ است (نه به طور طبیعی). بنابراین، $\widetilde{K}(A)$ را بخش نابدیهی نظریهٔ Kی حلقهٔ A در نظر میگیریم.

با وجود سادگی ظاهری این تعریف، نظریهٔ K در بخشهایی از ریاضیات بسیار مفید واقع شده است. دو مثال ویژه، تنوع مفهوم را نشان خواهد داد.

اولین مثال از نظریهٔ اعداد است: A حلقهٔ خارج قسمتی $Z[x]/(1 + x + \ldots + x^{p-1})$ است، که در آن p یک عدد اول فرد است. در نتیجه $\widetilde{K}(A)$ یک گروه متناهی است که در قرن نوزدهم کومر آن را (تحت نام دیگری) بررسی کرد، و در واقع این گروه وابسته به آخرین قضیهٔ فرماست: کومر ثابت کرد اگر این گروه عنصری از مرتبهٔ p نداشته باشد معادلهٔ $X^p + Y^p = Z^p$ هیچ جواب صحیحی ندارد (البته مگر وقتی X یا Y برابر صفر باشد). برای مثال [۲۲] و [۸] را ببینید که در آنجا نظریهٔ Kی فروکاسته با ایدهآلها در میدانهای عددی (یعنی میدانهایی که توسیع متناهی از $\mathbf{Q}$ هستند) مرتبط است.

دومین مثال از توپولوژی است: A حلقهٔ توابع پیوستهٔ (حقیقی یا مختلط) روی فضای فشردهٔ X است. این مثال را با $C_{\mathbf{R}}(X)$ یا $C_{\mathbf{C}}(X)$ به ترتیب در حالت حقیقی یا مختلط نمایش میدهیم. در نتیجه یکریختیای بین $K(A) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$ و قسمتی از کوهومولوژی [همانستگی] X داریم.* (اثبات را در [۲۸] ببینید). به بیان دقیقتر:

$$K(C_{\mathbf{C}}(X)) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q} \approx \bigoplus_k H^{2k}(X;\mathbf{Q})$$

$$K(C_{\mathbf{R}}(X)) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q} \approx \bigoplus_k H^{4k}(X;\mathbf{Q})$$

همچنین باید توجه کرد نظریهٔ Kی این حلقهها یک ناوردای هموتوپی است: تعویض X با $X \times [0,1]$، نظریهٔ K را تغییر نمیدهد.

در جدول زیر چند مثال اساسی (با توضیحات) آمده است. سعی کنید محاسبات را انجام دهید. محاسبهٔ «Kـگروهها» بهترین راه یادگیری «نظریهٔ» نهفته در پس نظریهٔ K است.

مثالهای محاسبهای (با توضیحات)

A	$K(A)$	
$\mathbf{Z}$	$\mathbf{Z}$	یعنی هر گروه آبلی که جمعوند مستقیم $\mathbf{Z}^n$ای است، به ازای mای، از نوع $\mathbf{Z}^m$ است.
$\mathbf{Z}(\sqrt{-5})$	$\mathbf{Z}/2 \oplus \mathbf{Z}$	عامل $\mathbf{Z}/2$ وابسته بهوجود ایدهآل غیراصلی است [۳۶].
$\mathbf{C}[G]$	$\mathbf{Z}^N$	در اینجا G یک گروه متناهی است. N تعداد نمایشهای تحویلناپذیر است. این محاسبه نقطهٔ آغاز نظریهٔ زیبای نمایش گروههای متناهی است [۳۷].
$C_{\mathbf{C}}(S^1)$	$\mathbf{Z}$	تعبیر هندسی این نتیجه چنین است: هر کلاف برداری مختلط روی دایره بدیهی است. ([۲۸]، ص ۱۳)
$C_{\mathbf{R}}(S^1)$	$\mathbf{Z}/2 \oplus \mathbf{Z}$	عامل $\mathbf{Z}/2$ ناشی از وجود نوار موبیوس است. ([۶]، ص ۱۳)
$C_{\mathbf{C}}(S^2)$	$\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$	یکی از عاملهای $\mathbf{Z}$ ناشی از وجود یک کلاف خطی مختلط «متعارف» L روی کرهٔ دوبعدی است. ([۶]، ص ۱۳ یا [۷]، ص ۲۲)
$C_{\mathbf{R}}(S^2)$	$\mathbf{Z}/2 \oplus \mathbf{Z}$	کلاف حقیقی متناظر با L ــ که آن را L' مینامیم ــ بدیهی نیست و توجیهی است برای عامل $\mathbf{Z}/2$ زیرا $L' \oplus L'$ کلاف حقیقی بدیهی است (دوباره از [۶]، ص ۱۳ استفاده کنید).
$M_n(A)$	$K(A)$	این بدان معنی است که وقتی بهجای A، حلقهٔ ماتریسهای $n \times n$ با ضرایب متعلق به A قرارگیرد، نظریهٔ K تغییر نمیکند (ناوردایی موریتا). چند اثبات مقدماتی از این موضوع وجود دارد. مثلاً ر.ک. ([۶]، ص ۱۳۸).
$\mathcal{K}$	$\mathbf{Z}$	در اینجا $\mathcal{K}$ جبر عملگرهای فشرده روی یک فضای هیلبرت نامتناهیبعد H است. اثبات این موضوع به مطالبی از آنالیز احتیاج دارد. برای مثال، ر.ک. [۲۸]، ص ۱۷۶ (تمرین ۹.۷).
$\mathcal{B}(H)$	0	$\mathcal{B}(H)$ جبر همهٔ عملگرهای کراندار در H را نمایش میدهد. اثبات کاملاً ابتدایی خواهد بود به شرط اینکه توجه کنیم ردهٔ مدولهای تصویری متناهی مولد روی این جبر همارز ردهای است که اشیای آن فضاهای هیلبرت (جمعوندهای مستقیم یک H^n) و ریختارهای آن نگاشتهای پیوستهٔ خطی بین آنها هستند.

* کوهومولوژی، برای مثال، در [۱۲] و [۱۱] تعریف شده است.

توضیحات و پیشنهادهایی برای مطالعهٔ بیشتر

کتابهای زیادی دربارهٔ جنبههای مقدماتی نظریهٔ K وجود دارد. دانشجویان

علاقه‌مند به عنوان نمونه [۱] یا دو بخش اول [۶] را بخوانند (سعی کنید تمرینهای مربوطهٔ صص ۴۴ـ۵۱ و صص ۱۰۵ـ۱۱۱ را حل کنید).

۳. رابطهٔ بین نظریهٔ K و تناوب بات

برای سادگی بحث، توجه خود را به حالت مختلط محدود می‌کنیم و نگاشتی صریح از $\pi_{p-1}(GL(\mathbf{C}))$ به $\widetilde{K}(A)$ را توصیف می‌کنیم که A عبارت است از $C_{\mathbf{C}}(S^p)$ یعنی حلقهٔ توابع پیوستهٔ مختلط روی کرهٔ S^p. به این منظور کرهٔ S^p را به دو نیمکرهٔ «فربه» S^p_+ و S^p_- تجزیه می‌کنیم، هر نیمکره با $x_{p+1} > \frac{-1}{2}$ (یا $x_{p+1} < \frac{1}{2}$) تعریف می‌شود.

با استفاده از آخرین مختص x_{p+1} به‌عنوان پارامتر، دو تابع پیوستهٔ α_+ و α_- را از کرهٔ S^p به بازهٔ یکهٔ $[0, 1]$ تعریف می‌کنیم به‌طوری که α_+ (یا α_-) در بیرون S^p_+ (یا S^p_-) صفر است و $\alpha_+ + \alpha_- = 1$.* تعریف می‌کنیم:

$$\beta = \frac{\alpha}{\sqrt{(\alpha_+)^2 + (\alpha_-)^2}}$$

که بر این اساس، $\alpha = \alpha_+$ یا $\alpha = \alpha_-$ و $\beta = \beta_+$ یا $\beta = \beta_-$.

بعد از این مقدمات، عضوی از $\pi_{p-1}(GL(\mathbf{C}))$ را که با نگاشت پیوستهٔ $f : S^{p-1} \to GL_n(\mathbf{C})$ به‌ازای nهای (به‌قدر کافی بزرگ) نمایش داده می‌شود در نظر بگیرید. نگاشت f را توسط تصویر نصف‌النهاری به روی استوا، به $\tilde{f} : S^p_+ \cap S^p_- \to GL_n(\mathbf{C})$ گسترش می‌دهیم. ماتریس

$$Q = \begin{pmatrix} (\beta_+)^2 & \beta_+\beta_-\tilde{f} \\ \beta_+\beta_-\tilde{f}^{-1} & (\beta_-)^2 \end{pmatrix}$$

(که $(\beta_+)^2$، $(\beta_-)^2$ یا $(\beta_+\beta_-)$ به معنی ضرب این عدد در ماتریس همانی از مرتبهٔ n است) یک ماتریس $2n \times 2n$ است که درایه‌هایش توابع پیوسته روی S^p با مقدارهایی در $M_{2n}(\mathbf{C})$ هستند. به‌سادگی می‌توان دید که $Q^2 = Q$. بنابراین، نگارهٔ Q یک مدول تصویری روی حلقهٔ $A = C_{\mathbf{C}}(S^p)$، و از اینجا عضوی از $\widetilde{K}(A)$ را تعریف می‌کند که مستقل از انتخاب افراز یکهٔ (β_+, β_-) است (این استقلال با استدلالی براساس هموتوپی قابل اثبات است).

قضیه. تناظر $f \mapsto \mathrm{Im}(Q)$ یکریختی

$$\pi_{p-1}(GL(\mathbf{C})) \xrightarrow{\approx} \widetilde{K}(C_{\mathbf{C}}(S^p))$$

را تعریف می‌کند [برای اثبات، به عنوان مثال، ر.ک. [۶]، صص ۳۶ و ۵۵، بخش ۱.۱۸].

قضیهٔ قبل، تناوب بات را برحسب نظریهٔ K بیان می‌کند. باید نشان داد که $\widetilde{K}(C_{\mathbf{C}}(S^p))$ دوره‌ای با دورهٔ تناوب ۲ نسبت به p است. به عبارت دیگر، با استفاده از همان ساختار در حالت حقیقی باید نشان داد $\widetilde{K}(C_{\mathbf{R}}(S^p))$ نسبت به p دوره‌ای با دورهٔ تناوب ۸ است.

* چنین چیزی افراز یکهٔ متناظر پوشش کره با دو نیمکره است ([۱۴]، ر.ک. ص ۲۲).

۴. نظریهٔ K به‌عنوان یک نظریهٔ هومولوژی روی جبرهای باناخ

تا اینجا نظریهٔ K را فقط برای حلقه‌های یکه‌دار تعریف کرده‌ایم. این تعریف را با اندکی اصلاح می‌توانیم به حلقه‌های بدون یکه به‌صورت زیر تعمیم دهیم. A را یک kـجبر در نظر می‌گیریم که k یک حلقهٔ جابه‌جایی یکه‌دار (مثلاً $\mathbf{Z}$) است. حلقهٔ جدید یکه‌دار A^+ را به‌صورت $A \times k$ با جمع بدیهی و ضرب «تابیدهٔ» زیر تعریف می‌کنیم

$$(a, \lambda)(a', \lambda') = (aa' + \lambda a' + \lambda' a, \lambda\lambda')$$

یک نگاشت بدیهی $A^+ \to k$ وجود دارد و نظریهٔ Kی A به عنوان هستهٔ نگاشت القایی $K(A^+) \to K(k)$ تعریف می‌شود. به سادگی می‌توان نشان داد که این تعریف در حقیقت مستقل از k است.

یک مثال جالب و انگیزه‌بخش، حلقهٔ توابع پیوستهٔ k مقداری f روی فضای موضعاً فشردهٔ X ($k = \mathbf{R}$ یا $\mathbf{C}$) است به طوری که $f(x)$ وقتی x به سمت ∞ می‌رود به صفر میل کند. پس A^+ حلقهٔ توابع پیوسته روی «فشرده‌شدهٔ تک‌نقطه‌ای» X است. برای مثال، اگر $X = \mathbf{R}^p$، $K(A)$ با $\widetilde{K}(C(S^p))$ یکریخت است.

همچنین توجه کنید که این روش ما را قادر می‌سازد به‌ازای نگاشت حلقه‌ای کلی $f : A \to B$، یک ریختار $K(A) \to K(B)$ تعریف کنیم (اکنون دیگر فرض نمی‌کنیم $f(1) = 1$، حتی اگر A و B حلقه‌های یکه‌دار باشند.)

دنباله‌ای چون $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ از حلقه‌ها و نگاشتها کامل[1] نامیده می‌شود اگر دنبالهٔ گروههای آبلی متناظر کامل باشد. به عبارت دیگر، A' می‌تواند ایده‌آلی دوطرفه از A تعبیر شود، در حالی که A'' می‌تواند حلقهٔ خارج قسمتی A/A' قلمداد شود.

قضیه. دنبالهٔ قبلی دنبالهٔ کامل زیر از Kـگروهها را القا می‌کند:

$$K(A') \xrightarrow{\alpha} K(A) \xrightarrow{\beta} K(A'')$$

یعنی $\mathrm{Im}(\alpha) = \mathrm{Ker}(\beta)$ [برای ملاحظهٔ اثبات، به عنوان نمونه [۳۳] یا [۳۰] را ببینید].

طبیعی است بپرسیم $\mathrm{Ker}(\alpha)$ و $\mathrm{Coker}(\beta)$ چه چیزهایی هستند. در صورت آشنایی با جبر هومولوژیک باید بتوانیم «تابعگونهای مشتق‌شده» K_n، $n \in \mathbf{Z}$، را برای Kـ گروه تعریف کنیم تا دنبالهٔ کامل قبلی را به چپ و به راست (گروه $K_0(A)$، $K(A)$ می‌شود) گسترش دهیم. یک راه‌حل جزئی برای گسترش دنبالهٔ کامل فوق به طرف چپ در قضیه‌ای که در چند سطر آینده می‌آید، ارائه می‌شود.

حداقل دو راه برای حل این مسألهٔ تابعگونهای مشتق‌شده وجود دارد. اولی شامل گذاشتن یک توپولوژی روی حلقه‌های مورد نظر است (یعنی جبرهای باناخ را چنان که در زیر توضیح داده می‌شود در نظر بگیریم)، دیگری باقی ماندن در جبر محض است، که به طرز عجیبی بسیار سخت‌تر است. با رویکرد اول آغاز می‌کنیم.

1. exact

یادآوری می‌کنیم جبر باناخ (روی $\mathbf{C}$ یا $k = \mathbf{R}$) یک kـجبر است (نه لزوماً یکه‌دار) با ویژگیهای زیر:

۱. نرم $\| a \| \mapsto a$ روی فضای برداری A تعریف می‌شود به طوری که A با متریک $d(a,b) = \| a - b \|$ کامل است.

۲. نابرابری $\| ab \| \leq \| a \| \cdot \| b \|$ را داریم.

یک مثال نوعی، حلقهٔ توابع پیوستهٔ f روی یک فضای موضعاً فشردهٔ X است که وقتی x به سمت ∞ می‌رود $f(x)$ به صفر میل می‌کند. پس نُرم f، $\| f \|$، بیشینهٔ مقدار $|f(x)|$ است وقتی $x \in X$.

به طور کلی‌تر، اگر A یک جبر باناخ و X یک فضای موضعاً فشرده باشد، جبر باناخ جدید $A(X)$ را به عنوان حلقهٔ توابع پیوستهٔ f از X به A با همان شرطِ در بینهایت تعریف می‌کنیم. برای تعریف نرم، $|f(x)|$ را در مثال قبلی با $\| f(x) \|$ تعویض می‌کنیم. با نمادگذاری بدیهی، یکریختی $A(X)(Y) \approx A(X \times Y)$ را داریم.

قضیه. با تقریب یکریختی، راه یکتایی برای تعریف تابعگونهای $K_n(A)$ برای جبر باناخ A، $n \geq 0$، وجود دارد به طوری که اصول زیر برقرارند:

۱) **کامل بودن.** با مفروض بودن دنبالهٔ کامل

$$0 \to A' \to A \to A'' \to 0$$

از جبرهای باناخ که A'، نرم القایی دارد و A'' نرم خارج قسمتی، یک دنبالهٔ کامل طویل (از سمت چپ نامتناهی) داریم:

$$\begin{aligned} &\to K_{n+1}(A'') \to K_n(A') \to K_n(A) \\ &\to K_n(A'') \to K_{n-1}(A') \to \end{aligned}$$

۲) **ناوردایی هوموتوپی.** مشمولیت متعارف A به درون $B = A([0,1])$ یکریختی $K_n(A) \approx K_n(B)$ را القا می‌کند.

۳) **بهنجارش**[1]. $K_0(A) = K(A)$. [مثلاً ر.ک. [۶] تمرین ۱۴.۶، ص ۱۰۹].

استنتاج یکریختی $K_n(A) \approx K(A(\mathbf{R}^n))$ از اصول بالا چندان مشکل نیست. در حالت خاص،

$$\widetilde{K}(C_{\mathbf{C}}(S^n)) \approx K_n(\mathbf{C}) \quad \text{و} \quad \widetilde{K}(C_{\mathbf{R}}(S^n)) \approx K_n(\mathbf{R})$$

به علاوه، اگر A یکه‌دار باشد، گروه $K_n(A)$ همچنین می‌تواند به صورت گروه هوموتوپی مناسبی تعریف شود: برای $n > 0$، این گروه دقیقاً گروه هوموتوپی $\pi_{n-1}(GL(A))$ است که یک «حد» گروههای هوموتوپی $\pi_{n-1}(GL_r(A))$ است که r به ∞ میل می‌کند.

قضیهٔ قبل ما را قادر می‌سازد که یک «نظریهٔ کوهومولوژی» روی رستهٔ فضاهای فشرده به مفهوم مورد نظر ایلنبرگ و استینراد [۱۱] تعریف کنیم: اگر X فضایی فشرده باشد و Y یک زیرمجموعهٔ بستهٔ آن، $K^{-n}(X,Y)$ را به‌صورت K_nـگروه جبر باناخ $C(X-Y)$ تعریف می‌کنیم.⋆ درواقع برحسب اینکه توابع پیوسته روی $X - Y$ حقیقی یا مختلط در نظر گرفته شوند دو نظریه وجود دارد. این گروهها در همهٔ اصول یک نظریهٔ کوهومولوژی صدق می‌کنند، بجز در اصل بُعد. این نظریهٔ کوهومولوژی ابتدا توسط اتیا و هیرتسه بروخ [۱۸] تعریف شد، و نقطهٔ آغاز «نظریهٔ Kی توپولوژیک» برای فضاهای پیوسته و بعد از آن برای جبرهای باناخ [K] بود. این نظریه برای جبرهای باناخ (که در ۲۰ سال اخیر پدید آمده است) اهمیت زیادی در یک مبحث جدید ریاضیات به نام «هندسهٔ ناجابه‌جایی» [۴] داشته است. این نشان‌دهندهٔ اهمیت قضیهٔ زیر در این مبحث جدید است.

قضیه. ([۶]، بخش III). فرض کنید A یک جبر باناخ مختلط (یا حقیقی) باشد. آنگاه یکریختی

$$K_n(A) \approx K_{n+2}(A) \quad \text{(یا } K_n(A) \approx K_{n+8}(A)\text{)}$$

را داریم.

توضیح. اگر برای سادگی در حالت مختلط بمانیم و اگر $n \in \mathbf{Z}$، می‌بینیم که به‌طور صوری می‌توانیم $K_n(A)$ را به‌ازای r به‌قدر کافی بزرگ به‌صورت $K_{n+2r}(A)$ تعریف‌کنیم به‌طوری‌که $n+2r > 0$. به عبارت دیگر، می‌توانیم $K_{-1}(A)$ رابه عنوان $K_1(A)$، $K_{-2}(A)$ را به عنوان $K_0(A)$ و ... تعریف کنیم. بنابراین، می‌توان به دنبالهٔ کاملی از جبرهای باناخ همچون دنبالهٔ بالا یعنی $0 \to A'' \to A \to A' \to 0$، یک دنبالهٔ کامل «شش ضلعی»[1]

$$\begin{tikzcd} K_0(A') \arrow[r] & K_0(A) \arrow[r] & K_0(A'') \arrow[d] \\ K_1(A'') \arrow[u] & K_1(A) \arrow[l] & K_1(A') \arrow[l] \end{tikzcd}$$

نسبت داد. به این ترتیب، مسأله‌ای که قبلاً دربارهٔ هستهٔ نگاشت $K_0(A) \to K_0(A'')$ و هم‌هستهٔ نگاشت $K_0(A') \to K_0(A)$ داشتیم حل می‌شود.

تعداد زیادی اثبات برای تناوب بات در متون مربوط به موضوع وجود دارد. همهٔ آنها به مقداری اطلاعات فنی نیاز دارند. یک اثبات مفهومی شامل معرفی «ضرب ناوی»[2] در نظریهٔ K است. به بیان دقیق‌تر، یک زوج‌سازی دوخطی بین سه حلقهٔ یکه‌دار A، B، و C با استفاده از نگاشت $\mathbf{Z}$ـدوخطی $\varphi : A \times C \to B$ داده می‌شود به طوری که

$$\varphi(aa', cc') = \varphi(a,c)\varphi(a',c'), \qquad \varphi(1,1) = 1.$$

به‌سادگی می‌توان دید که یک چنین زوج‌سازی یک همریختی گروهی

$$K(A) \otimes K(C) \to K(A \otimes_{\mathbf{Z}} C) \to K(B)$$

1. normalization

⋆ توجه کنید که تاکنون $K^n(X,Y)$ به ازای $n > 0$ تعریف نشده است.

۱. یا همان six term periodic exact sequence ـم.

2. cup-products

را القا می‌کند. این تعریف را می‌توان به راحتی به حلقه‌های غیر یکه‌دار تعمیم داد. به‌علاوه، اگر فرض کنیم که A، B، و C جبرهای باناخ هستند و $\| \varphi(a,c) \| \le \| a \| \cdot \| c \|$ ، چنین نگاشت دوخطی φ یک نگاشت دوخطی دیگر $A(\mathbf{R}^n)\times C(\mathbf{R}^p)\to B(\mathbf{R}^{n+p})$ و بنابراین یک زوج‌سازی دوخطی (به‌نام «ضرب ناوی») $K_n(A)\times K_p(C)\to K_{n+p}(B)$ را القا می‌کند. با نمادگذاری‌های فوق، صورت دیگری از قضیهٔ تناوبی بات به شرح زیر است:

قضیه. (به‌عنوان نمونه، ر.ک. [۲۹]، فصل ۲).

الف) فرض کنید $C=\mathbf{C}$ و همچنین فرض کنید $A=B$ یک جبر باناخ مختلط باشد. در این صورت، گروه $K_۲(\mathbf{C})$ با $\mathbf{Z}$ یکریخت است و ضرب ناوی با یک مولد، یکریختی، $\beta : K_n(A)\to K_{n+۲}(A)$ را القا می‌کند.

ب) فرض کنید $C=\mathbf{R}$ و همچنین فرض کنید $A=B$ یک جبر باناخ حقیقی باشد. در این صورت، گروه $K_۸(\mathbf{R})$ با $\mathbf{Z}$ یکریخت است و ضرب ناوی با یک مولد، یکریختی $K_n(A)\to K_{n+۸}(A)$ را القا می‌کند.

طرح برهان قضیه. الف) اثبات مبتنی بر ساختن یک نظریهٔ کامل $K_n(A)$ است که به ازای هر $n\in\mathbf{Z}$ تعریف می‌شود* و خاصیتهای صوری یک ضرب ناوی (برای مثال شرکت‌پذیری) را دارد. پس از آن، عضو v در $K_{-۲}(\mathbf{C})$ را می‌سازیم به طوری که $v = vu = ۱$ در $\mathbf{Z} = K_۰(\mathbf{C})$. این عضو v برای ساختن یک ریختار «پسرو» $\beta' : K_{n+۲}(A)\to K_n(A)$ به‌کار می‌رود و به‌سادگی با $\beta'(x)=x\cdot v$ تعریف می‌شود. این حقیقت که β و β' وارون یکدیگرند یک تمرین صوری است. برای مثال،

$$\beta\beta'(x)=\beta(x\cdot v)=(x\cdot v)\cdot u=x\cdot(v\cdot u)=x\cdot ۱=x.$$

■

کاربردها. گونه‌هایی از کاربردهای تناوب بات و نظریهٔ K را می‌توان در مقالات وکتابهای مختلف یافت ([۱]، [۱۹]، [۲۰]، [۴]) ما فقط دوکاربرد توپولوژیک منسوب به جی. اف. آدامز را بیان می‌کنیم (اثبات آنها را می‌توان در [۲۸]، فصل V یافت).

۱. کرهٔ S^n، یک گروه توپولوژیک است فقط در صورتی که n برابر با ۰، ۱، یا ۳ باشد.

۲. بیشینهٔ تعداد میدانهای مماس مستقل خطی بر کرهٔ $S^{t-۱}$ چند تاست؟

الف) طبق قضیه‌ای قدیمی از هوپف، اگر بیشینه را با $\rho(t)$ نشان دهیم و t فرد باشد، $\rho(t)=۰$.

ب) اگر t زوج باشد، می‌توانیم آن را به صورت $۲^\beta\cdot$(عدد فرد)، بنویسیم و β را بر ۴ تقسیم کنیم، پس $\beta=\gamma+۴\delta$ که $۰\le\gamma\le۳$. بنابراین $\rho(t)=۲\gamma+۸\delta-۱$.

* برای اجتناب از دور و تسلسل، تناوب را برای K_n که $n<۰$، در نظر نمی‌گیریم.

کتابهایی برای مطالعهٔ پیشرفته‌تر

کتابهای [۱۱] و [۲۸]، که قبلاً چند بار به آنها اشاره شده است.

۵. نظریهٔ K به‌عنوان یک نظریهٔ هومولوژی روی حلقه‌های گسسته

به دلایل مختلف، به‌خصوص کاربردهای نظریهٔ K در هندسهٔ جبری و نظریهٔ اعداد، تعریف تابعگون K_n که در بالا ارائه کردیم چندان رضایتبخش نیست. ما از توپولوژی حلقهٔ A استفاده نمی‌کنیم. به این منظور، تعریفی توسط کوییلن در ۱۹۷۰ [۳۵] پیشنهاد شده است. متأسفانه تعریف کوییلن به مقداری پیشنیاز توپولوژی جبری نیاز دارد. بنابراین، از تعریف دیگری که کمی قبل از آن به وسیلهٔ ویلامایور و مؤلف [۳۰] ارائه شد و با تعریف کوییلن در بسیاری از حالتهای مطلوب منطبق است استفاده می‌کنیم. این تعریف خیلی ساده‌تر، و در حال و هوای تعریف Kـگروههای مراتب بالاتر برای جبرهای باناخ است.

تذکر. Kـگروههای جبری مذکور اکنون $K_n(A)$ نامیده می‌شوند. برای اجتناب از اشتباه، Kـگروههای توپولوژیک برای جبرهای باناخ که پیش‌تر تعریف شد با $K_n^{\text{top}}(A)$ نشان داده خواهد شد.

چنان‌که قبلاً دیده‌ایم، گروههای هوموتوپی نقش مهمی در تعریف و ویژگیهای Kـگروههای توپولوژیک ایفا می‌کنند. بنابراین طبیعی است در جستجوی یک تعریف «جبری» آنها، به‌خصوص برای فضاهایی شبیه گروههای خطی عام $GL_r(A)$ یا حد آنها $GL(A)=\cup GL_r(A)$، باشیم.

اولین کار، تعریف جبری $\pi_۰(GL(A))$ است. به بیان دیگر، باید گفت چه موقع دو ماتریس وارون‌پذیر $\alpha_۰$ و $\alpha_۱$ هوموتوپ‌اند (یا در یک مؤلفهٔ مسیری‌همبند «جبری» هستند).

تعریف. دو ماتریس وارون‌پذیر $\alpha_۰$ و $\alpha_۱$ به‌طور جبری هوموتوپ هستند اگر عضو $\alpha(x)$ از $GL(A[x])$ وجود داشته باشد به‌طوری که $\alpha(۰)=\alpha_۰$ و $\alpha(۱)=\alpha_۱$. این یک رابطهٔ هم‌ارزی است. مؤلفه‌های جبری‌همبند یک گروه آبلی تشکیل می‌دهند که با $K_۱(A)$ نمایش داده می‌شود.

مثالها. اگر F یک میدان با یک حلقهٔ اقلیدسی باشد، به سادگی می‌توان نشان داد (به روش کاهش گاوس) که $F^*\approx K_۱(F)$، که F^* گروه اعضای وارون‌پذیر F است (هستهٔ نگاشت دترمینان را در نظر بگیرید). باید توجه کرد که $K_۱^{\text{top}}(\mathbf{C})=۰$ و $K_۱^{\text{top}}(\mathbf{R})=\mathbf{Z}/۲$.

یک مثال نابدیهی [۲۱]، حلقهٔ A از اعداد صحیح در یک میدان عددی است: می‌توان دوباره به دست آورد: $K_۱(A)=A^*$. توجه کنید که A^* با استفاده از قضیهٔ دیریکله تعیین شده است (برای درآمد خوبی به نظریهٔ اعداد، ر.ک. [۳۶]).

برای نمونه، اگر $A=\mathbf{Z}[x]/(۱+x+\cdots+x^{p-۱})$، که در آن p یک عدد اول فرد است، مانند بخش ۲، داریم $K_۱(A)\approx A^*\approx\mathbf{Z}\oplus^{(p-۳)/۲}\mathbf{Z}/p$.

مثالی از حلقهٔ A به طوری که $K_۱(A)\neq A^*$، به صورت زیر است:

$$A=\mathbf{Z}[x,y]/(x^۲+y^۲-۱)$$

می‌توان نشان داد که ماتریس

$$\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$$

با ضرایب متعلق به A با یک ماتریس 1×1 به طور جبری هوموتوپ نیست، اگرچه دترمینان آن یک است (راهنمایی: A را در حلقهٔ $C_{\mathbf{R}}(S^1)$ بنشانید).

در اینجا جدولی از K_1ـگروهها می‌آوریم که حلقه‌های فهرست‌شده در بخش ۲ در آن تکرار می‌شوند.

A	$K_1(A)$	
$\mathbf{Z}$	$\mathbf{Z}/2$	دترمینان یک ماتریس وارون‌پذیر با ضرایب صحیح ± 1. به علاوه، ماتریسی با دترمینان ۱، حاصلضرب ماتریسهایی مقدماتی است (الگوریتم اقلیدس را به کار برید).
$\mathbf{Z}(\sqrt{-5})$	$\mathbf{Z}/2$	این از یک قضیهٔ کلی در نظریهٔ اعداد دربارهٔ یکه‌ها در میدانهای درجهٔ دوم موهومی نتیجه می‌شود [۳۶].
$\mathbf{C}[G]$	$(\mathbf{C}^*)^N$	در اینجا G یک گروه متناهی است. N تعداد نمایشهای تحویل‌ناپذیر آن است. این محاسبات از این واقعیت که $\mathbf{C}[G]$ به‌صورت حاصلضربی از جبرهای ماتریسی است نتیجه می‌شود [۳۷].
$C_{\mathbf{C}}(S^1)$	$\mathrm{Map}(S^1,\mathbf{C}^*)$	به‌طورکلی، اگر A یک جبر باناخ جابه‌جایی باشد، آنگاه $K_1(A)$ با $A^*\otimes\pi_0(SL(A))$ یکریخت است (اثبات در [۳۲]).
$C_{\mathbf{R}}(S^1)$	$\mathrm{Map}(S^1,\mathbf{R}^*)$	همان توضیح.
$C_{\mathbf{C}}(S^2)$	$\mathrm{Map}(S^2,\mathbf{C}^*)$	همان توضیح.
$C_{\mathbf{R}}(S^2)$	$\mathrm{Map}(S^2,\mathbf{R}^*)$	همان توضیح.
$M_n(A)$	$K_1(A)$	به این معنی که وقتی حلقهٔ ماتریسهای $n\times n$ با ضرایب متعلق به A جایگزین A شود (ناوردایی موریتا) نظریهٔ K_1 تغییر نمی‌کند. اثبات اساساً همان اثبات مربوط به حالت K_0ـگروههاست.
$\mathcal{B}(H)$	0	همان اثبات K_0ـگروهها

به نظریه باز می‌گردیم، تعمیم این تعریف $K_1(A)$ برای حلقه‌های بدون یکه ساده است. اگر A یک kـجبر باشد، به پیروی از تعریف قبلی برای $K(A)$، $K_1(A)$ را به صورت هستهٔ نگاشت طبیعی $K_1(A^+)\to K_1(k)$ تعریف می‌کنیم (به آسانی می‌توان نشان داد که این تعریف مستقل از k است).

مثال. یک مثال مهم در آنالیز تابعی، حلقهٔ $\mathcal{K}$ از عملگرهای فشرده در یک فضای هیلبرت نامتناهی‌بعد است. نشان دادن اینکه K_1ـگروه این حلقه گروه بدیهی صفر است یک تمرین مبارزطلب است.

می‌توانیم تشابه با توپولوژی را چند گام جلوتر ببریم و «حلقهٔ طوقه‌ای»[1] ΩAی A را به عنوان حلقهٔ غیر یکه‌دار نابدیهی $x(x-1)A[x]$ معرفی کنیم، یعنی ایده‌آل دو طرفهٔ $A[x]$ متشکل از چند جمله‌ای‌های $P(x)$ به‌طوری که $P(0)=P(1)=0$. اگر A یک جبر باناخ باشد، مشابه توپولوژیک ΩA، $A(\mathbf{R})=A(]0,1[)$ در بخش قبلی است.

تعریف. به ازای $n\geq 1$، گروههای جبری $K_n(A)$ به صورت استقرایی با استفاده از فرمول

$$K_{n+1}(A)=K_n(\Omega A)=\cdots=K_1(\Omega^n A)$$

تعریف می‌شوند.

تذکر. این تعریف با تعریف کوییلن همسان نیست، مگر اینکه حلقهٔ A نوتری منظم باشد، به این معنی که هر مدول متناهی‌مولد یک تحلیل تصویری متناهی بپذیرد. بسیاری از حلقه‌هایی که طبیعتی هندسی دارند، از این گونه‌اند، به عنوان نمونه حلقه‌هایی که به توابع جبری روی چندگوناهای جبری آفین بدون تکینه مربوط‌اند.

همانند جبرهای باناخ، یک زوج‌سازی دوخطی $A\times C\to B$، ضرب ناوی

$$K_n(A)\times K_p(C)\to K_{n+p}(B)$$

را القا می‌کند. یک مثال جالب، $A=C=B$، یک میدان جابه‌جایی (با نماد F) است. ضرب ناوی بالا یک «نگاشت نشانه»[2]

$$S: K_1(F)\otimes_{\mathbf{Z}} K_1(F)=F^*\otimes_{\mathbf{Z}} F^*\to K_2(F)$$

به دست می‌دهد.

قضیه (ماتسوموتو[3]). نگاشت نشانهٔ S پوشاست. هسته‌اش با ضرب تانسوری از نوع $x\otimes(1-x)$ تولید می‌شود که $x\in F-\{0,1\}$ (برای اثبات، ر.ک. [۳۲]).

برای مثال، در حالت گروه $K_2(\mathbf{Q})$، که $\mathbf{Q}$ میدان اعداد گویاست، به دست می‌آید

$$K_2(\mathbf{Q})\approx\mathbf{Z}/2\oplus[\bigoplus_p(\mathbf{Z}/p)^*]$$

که p در مجموعهٔ همهٔ اعداد اول فرد تغییر می‌کند.

اکنون یک حدس شایان توجه را که پیوندی بین گروههای $K_n(\mathbf{Z})$ با اعداد برنولی B_k برقرار می‌کند، بیان می‌کنیم. این اعداد گویای B_k در بسطهای توابع $x/(1-e^{-x})$ به صورت سری، ظاهر می‌شوند. به زبان دقیق‌تر، داریم

$$\frac{x}{(1-e^{-x})}=1+\frac{x}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{B_k}{(2k)!}x^{2k}+\dots$$

1. loop ring 2. symbol map 3. Matsumoto

اعداد B_k را به صورت کسر تحویل‌ناپذیر $\frac{c_k}{d_k}$ بیان می‌کنیم. در این صورت، حدس مذکور به صورت زیر است.

$$\begin{array}{ll}
K_{8n}(\mathbf{Z}) = 0 & (\text{به ازای } n > 0) \\
K_{8n+1}(\mathbf{Z}) = \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}/2 & (\text{به ازای } n > 0) \\
K_{8n+2}(\mathbf{Z}) = \mathbf{Z}/2 \oplus \mathbf{Z}/c_k & (\text{به ازای } k = 2n+1) \\
K_{8n+3}(\mathbf{Z}) = \mathbf{Z}/8k \cdot d_k & (\text{به ازای } k = 2n+1) \\
K_{8n+4}(\mathbf{Z}) = 0 & \\
K_{8n+5}(\mathbf{Z}) = \mathbf{Z} & \\
K_{8n+6}(\mathbf{Z}) = \mathbf{Z}/c_k & (\text{به ازای } k = 2n+2) \\
K_{8n+7}(\mathbf{Z}) = \mathbf{Z}/4k \cdot d_k & (\text{به ازای } k = 2n+2)
\end{array}$$

درستی این حدس به ازای $K_i(\mathbf{Z})$ اگر $i \leqslant 6$ ثابت شده است، و در حالتهای دیگر حداقل می‌دانیم که سمت راست، کران پایین برای گروههای $K_i(\mathbf{Z})$ است.

برای نمونه، این حدس پیش‌بینی می‌کند که $K_{23}(\mathbf{Z})$ یک گروه دوری از مرتبهٔ ۶۵۵۲۰(!) است. نکتهٔ قابل توجه، پدید آمدن چند تناوب خاص در جدول است، درست همانند جبرهای باناخ حقیقی. متأسفانه، هنوز با درک کل ماجرا فاصله داریم. برای یک مرور اجمالی و ارتباط با مسائل (حل‌نشده) کلاسیک در نظریهٔ اعداد، مثل حدس واندیور، مرجع **[۲۷]** را توصیه می‌کنیم.

در طرف مثبت ماجرا، اولین محاسبهٔ Kـگروه‌های جبری توسط کوییلن انجام شد **[۳۴]**. او برای میدانی متناهی با اعضای q (که معمولاً $\mathbf{F}_q$ نامیده می‌شود) ثابت کرد که

$$K_{2i}(\mathbf{F}_q) = 0 \text{ بەازای } i > 0 \text{ و } K_{2i-1}(\mathbf{F}_q) \approx \mathbf{Z}/(q^i - 1)\mathbf{Z}.$$

با توجه به این نتیجه، می‌بینیم که تناوب بات به مفهوم ابتدایی آن نمی‌تواند درست باشد. با این حال، اگر نظریهٔ K با ضرایب متناهی $\mathbf{Z}/n$، مانند $K_i(A; \mathbf{Z}/n)$، را در نظر بگیریم شرایط مساعدتر می‌شود. چنین نظریه‌ای را برودر[1] و مؤلف در دههٔ ۷۰ ارائه کرده‌اند (**[۲۶]**، **[۳۸]**): این در دنباله‌ای کامل چون

$$\begin{aligned} K_i(A) \xrightarrow{\cdot n} K_i(A) &\to K_i(A; \mathbf{Z}/n) \\ &\to K_{i-1}(A) \xrightarrow{\cdot n} K_{i-1}(A) \end{aligned}$$

می‌گنجد. اگر A میدان F باشد، برای نمونه داریم

$$K_1(F;\, \mathbf{Z}/n) \approx F^*/(F^*)^n$$

اگر F یک میدان جبریٔ‌بسته باشد، گروه nامین ریشه‌های واحد در F را با μ_n نشان می‌دهیم. این با $\mathbf{Z}/n$ یکریخت است، اما نه به طور متعارف. توجه کنید که $K_*(F;\, \mathbf{Z}/n)$ در این حالت یک ساختار حلقه‌ای خوش‌تعریف دارد **[۲۶]** که با آنچه قبلاً برای $K_*(F)$ نشان داده شد سازگار است.

قضیه [۳۹]. فرض کنید F یک میدان جبریٔ‌بسته باشد با مشخصه‌ای که نسبت به n اول است. آنگاه

$$K_{2i-1}(F;\, \mathbf{Z}/n) = 0 \qquad K_{2i}(F;\, \mathbf{Z}/n) \approx (\mu_n) \otimes i$$

1. Browder

به علاوه، این یکریختیها با ساختار حلقه سازگارند. به بیان دیگر، ضرب ناوی

$$K_{2i}(F;\, \mathbf{Z}/n) \otimes K_2(F; \mathbf{Z}/n) \to K_{2i+2}(F;\, \mathbf{Z}/n)$$

یکریختی است.

این نتیجه مشابه واقعی تناوب بات است، زیرا ایجاب می‌کند Kـگروهها با ضرایب، تناوبی باشند، اگرچه باید توجه کرد که عدم یکریختی متعارف μ_n با $\mathbf{Z}/n$ مانع تشابه کامل این دو می‌شود.

قضیه [۳۹]. نگاشتهای بدیهی

$$\begin{aligned} K_i(\mathbf{C};\, \mathbf{Z}/n) &\to K_i^{\mathrm{top}}(\mathbf{C};\, \mathbf{Z}/n) \\ K_i(\mathbf{R};\, \mathbf{Z}/n) &\to K_i^{\mathrm{top}}(\mathbf{R};\, \mathbf{Z}/n) \end{aligned}$$

یکریختی هستند. بەویژه، گروههای دستهٔ اول، تناوبی با دورهٔ تناوب ۲ هستند و گروههای دستهٔ دوم، تناوبی با دورهٔ تناوب ۸.

در اینجا ممکن است بپرسیم چگونه $K_i(F; \mathbf{Z}/n)$ را برای یک میدان دلخواه محاسبه کنیم (گروههای $K_*(F)$ در حال حاضر ممکن است مهارنشدنی بەنظر برسند) احساس کلی متخصصان (این موضوع هنوز بەطور کامل درک نشده) این است که باید آنها را با استفاده از گروههای $K_*(\overline{F};\, \mathbf{Z}/n)$، که $\overline{F}$ بستار جدایی‌پذیر F است، و با در نظرگرفتن عمل گالوا[1] روی آنها محاسبه کرد که این امر به ابزارهای زیادی از جبر و توپولوژی جبری احتیاج دارد.

کاربردها. بسیاری ازکاربردهای نظریهٔ Kی جبری را در مراجع **[۳۷]** و **[۹]** می‌توان یافت. ما تنها به دو نمونه اشاره می‌کنیم.

اولی مربوط به توپولوژی دیفرانسیل است. فرض کنید M یک کرهٔ S^n باشد. فضای $\mathcal{P}(M)$ مرکب از شبه‌ایزوتوپ‌های M، فضای وابریختی‌های $M \times [0, 1]$ است که روی $M \times \{0\}$ همانی را القا می‌کند. براساس نتیجه‌ای از والدهاوسن[2] **[۳۱]**، گروههای هوموتوپی $\pi_i(\mathcal{P}(M)) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$ با $K_{i+2}(\mathbf{Z}) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$ یکریخت‌اند. بەویژه به عقیدهٔ بورل **[۲۲]** این گروهها دوره‌ای با دورهٔ تناوب ۴ و یکریخت با $\ldots \mathbf{Q}, 0, 0, 0, \mathbf{Q}, 0, 0$ هستند (از $i = 0$ شروع می‌شود).

کاربرد چشمگیر دیگر از آنِ مرکورژف و ساسلین **[۳۳]** است و با ناوردای جبری شناخته‌شده‌ای به نام گروه براوئر[3] میدان F سروکار دارد. جبرهای سادهٔ مرکزی A روی F را در نظر بگیرید. دو جبر این‌چنینی مانند A و A'، هم‌ارز نامیده می‌شوند اگر $M_p(A)$ و $M_{p'}(A')$ بەازای p و p' مناسب یکریخت باشند. گروه براوئر دقیقاً خارج‌قسمت مجموعهٔ جبرهای فوق توسط این رابطهٔ هم‌ارزی است و عمل گروه از ضرب تانسوری جبرها ناشی می‌شود. اگر میدان F شامل nامین ریشه‌های واحد باشد، آنگاه گروه nـتابهای براوئر با $K_2(F)/nK_2(F)$ یکریخت است. برای نمونه، اگر $n = 2$، این نتیجه ایجاب می‌کند هر عضو ۲ـتاب گروه براوئر را بتوان با استفاده از ضرب تانسوری تعداد متناهی جبر کواترنیونی نمایش داد.

1. Galois action 2. Waldhausen 3. Brauer group

مراجع

کتابهایی دربارهٔ نظریهٔ K و کاربردهای آن

1. Atiyah M. F., *K-theory*, Benjamin, New-York (1967).
2. Bass H., *Algebraic K-theory*, New York, Benjamin (1968).
3. Berrick J., *An Approach to Algebraic K-theory*, Pitman (1982).
4. Connes A., *Noncommutative Geometry*, Academic Press (1994).
5. Friedlander E. and Weibel C., *School on Algebraic K-theory and Applications. An Overview of the Subject*, ICTP Trieste (1997).
6. Karoubi M., *K-theory, an Introduction*, Grundlehren der Math, Wissen. **226**, Springer, Berlin (1978).
7. Karoubi M., *Cyclic Homology and K-theory*, Astérique 149. Société Mathématique de France (1987).
8. Milnor J., *Introduction to Algebraic K-theory*, Ann. of Math. Studies **197**, Princeton, NJ. Princeton University Press (1974).
9. Rosenberg J., *Algebraic K-Theory and its Application*, Graduate Texts N^0 **147**, Springer, Berlin (1994).
10. Srinivas V., *Algebraic K-theory*, Birkhäuser, Boston (1996).

کتابهایی دربارهٔ توپولوژی جبری

11. Eilenberg S. and Steenrod N., *Foundations of Algebraic topology*, Princeton University Press (1952).
12. Hatcher A., *Algebraic Topology*, Cambridge University Press (2002).
13. HU S-T., *Homotopy Theory*, Academic Press (1959).
14. Munkres J. R., *Topology, A First Course*, Prentic Hall (1975).

کتابها و مقاله‌های دیگر

15. Adams J.F., "Vector fields on the sphere", *Ann. Math.* **75**, 603-632 (1962).
16. Atiyah M.F., "Global theory of elliptic operators", *Proc. Internat. Conf. On functional analysis and related topics*, p. 21-30, Univ. of Tokyo Press (1970).
17. Atiyah M.F. and Bott R., "On the periodicity theorem for complex vector bundles", *Acta Math.* **112**, p. 229-247 (1964).
18. Atiyah M.F. and Hirzebruch F., "Vector bundles and homogeneous spaces", *Proc. Symposium in Pure Maths, Amer. Math.* Soc. **3**, 7-38 (1961).
19. Atiyah M.F. and Hirzebruch F., "Reimann-Roch theorems for differentiable manifolds", *Bull. Amer. Math.* Soc. **65**, 276-281 (1959).
20. Atiyah M.F. and Singer I.M., "The index of elliptic operators", *Ann. of Math.* **87**, 484-530, 564-604 (1968), **93**, 119-138 (1971).
21. Bass H., Milnor J. et Serre J.P., "Solution of the congruence subgroup problem for $SL_n(n \geq 3)$ and $Sp_n(n \geq 2)$", *Publ. Math IHES* **33**, p. 59-137 (1967).
22. Borel A., "Stable real cohomology of arithmetic groups", *Ann. Sc. Ec. Norm. Sup.* **7**, 235-272 (1974).
23. Borel A. et Serre J.P., "Le théorème de Riemann-Roch (d'après Grothendieck)", *Bull. Soc. Math. France* **86**, 97-136 (1958).
24. Borevich Z.I. and Shavarevich I.R., *Number theory*, Academic Press (1966).
25. Bott R., "The stable homotopy of the classical groups", *Ann. of Math.* **70**, 313-337 (1959).
26. Browder W., *Algebraic K-theory with Coefficients* Z/p. Springer Lecture Notes in Math. Nr **657** (1978).
27. Gajda W., *On $K_*(Z)$ and Classical Conjectures in the Arithmetic of Cyclotomic Fields*, Contemporary Math., 346, American Math. Society (2005).
28. Karoubi M., *Les isomorphismes de Chern et de Thom-Gysin en K-théories*, Séminaire Cartan-Schwartz 1963/64. Benjamin (1967).
29. Karoubi M., "Algèbres de Clifford et K-théorie", *Ann. Sci. Ec. Norm. Sup.*, p. 161-270 (1968).
30. Karoubi M. et Villamayor O., "Foncteurs K^n en algèbre et en topologie", *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris*, t-**269**, p. 416 (1969).
31. Loday J.-L., *Homotopie des espaces de concordance*, Séminaire Bourbaki N^0 **516** (1977/78).
32. Milnor J., *Morse theory*, Annals of Math Studies **51**, Princeton University Press (1963).
33. Merkurjev A.S. and Suslin A.A., "K-cohomology of Severi-Brauer varieties and the norm residue homomorphism", *Math. USSR Izv.*, **21**, 307-440 (1983).
34. Quillen D., "On the cohomology and K-theory of the general linear groups over a finite field", *Ann. of Math.* **96**, p. 552-586 (1972).
35. Quillen D., "Higher algebraic K-theory", *Lecture Notes in Maths* **341**, 85-147, Berlin-Heidelberg-New York, Springer (1973).
36. Samuel P., *Théorie algébrique des numbers*, Hermann (1962).
37. Serre J.-P., *Représentations linéaires des groups finis*, Hermann (1978).
38. Soule C., "K-théorie des anneaux d'entiers de corps de nombres et cohomologie étale", *Inventiones Math.* **55**, p. 251-295 (1979).
39. Suslin A., *Algebraic K-theory of Fields*, Proceedings of the International Congress of mathematician 1986, American Math. Society (1987).

* * * * * *

• متن سخنرانی ایرادشده در کنفرانس مؤسسهٔ ریاضیات کلی (Clay Mathematics Institute)، آوریل ۲۰۰۵.

* مکس کروبی، دانشگاه پاریس ۷، فرانسه.