نشر ریاضی، سال ۱۱، شمارهٔ ۲، صص ۶ـ۱۰

تابع زتا و ماتریسهای تصادفی

مهرداد شهشهانی*

شاید نخستین شاهدی که برای نقش تابع زتا

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s},\qquad s=\sigma+it,\ \sigma>1$$

در درک توزیع اعداد اول وجود دارد، اثبات اویلر از واگرایی سری

$$\sum_{p,\ \text{عدد اول}}\frac{1}{p}$$

است. قضیهٔ اویلر از دو جهت قابل توجه است. از یک سو این قضیه، قضیهٔ اقلیدس در مورد نامتناهی بودن مجموعهٔ اعداد اول را پربارتر می‌کند، و از سوی دیگر، و نکتهٔ مهمتر اینکه، روش اثبات ایده‌های جدیدی را مطرح می‌کند که منجر به نتایج بسیار عمیقی می‌شوند. رابطهٔ بیان تابع زتا و اعداد اول عمدتاً بر فرمول حاصلضربی زیر مبتنی است

$$\zeta(s)=\prod_{p,\ \text{عدد اول}}\frac{1}{1-\frac{1}{p^s}},\qquad \sigma>1 \tag{1}$$

برای اثبات قضیهٔ اویلر می‌توان به‌صورت زیر عمل کرد: از دو طرف رابطهٔ (۱) لگاریتم می‌گیریم و $\log(1-\frac{1}{p^s})$ را برحسب توانهای p^s بسط می‌دهیم، یعنی

$$\log(1-\frac{1}{p^s})=-\sum_k\frac{1}{kp^{sk}}$$

اکنون سری مضاعف $\sum_p\log(1-\frac{1}{p^s})$ را بدین صورت بازآرایی می‌کنیم که جملات مربوط به $k=1$ و $k>1$ را تفکیک می‌کنیم. جملات مربوط به $k>1$ به‌ازای $s\geq 1$ همگرا می‌شوند و با استفاده از $\lim_{\sigma\to 1^+}\zeta(\sigma)=\infty$ (و کمی آنالیز مقدماتی) به اثبات قضیهٔ اویلر دست می‌یابیم.

پس از اویلر، لژاندر، گاوس، چبیشف و دیگران به بررسی توزیع اعداد اول پرداختند. به‌ازای هر عدد حقیقی مثبت x، $\pi(x)$ را تعداد اعداد اول کوچکتر یا مساوی x می‌گیریم. گاوس با استفاده از شواهد عددی گسترده‌ای، این حدس جسورانه را مطرح کرد که توزیع اعداد اول به‌طور مجانبی به‌صورت زیر است

$$\pi(x)\sim\int_2^x\frac{dt}{\log t}\overset{\text{تعریف}}{=}\mathrm{Li}(x)$$

(می‌گوییم f و g به‌طور مجانبی برابرند، و می‌نویسیم $f(x)\sim g(x)$، در صورتی‌که $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=1$.) به نظر می‌آید که گاوس به هیچ‌گونه روش تحلیلی برای مرتبط ساختن $\mathrm{Li}(x)$ و $\pi(x)$ دست نیافته بوده است. یک نتیجهٔ حدس گاوس «قضیهٔ اعداد اول» است به این مضمون که

$$\pi(x)\sim\frac{x}{\log x}$$

گاوس می‌دانست که به‌ازای ثابتهای مناسب a و b نابرابریهای زیر برقرارند

$$a\frac{x}{\log x}\leq\pi(x)\leq b\frac{x}{\log x}$$

چبیشف نشان داد که این نابرابریها به‌ازای $a=0.9212\cdots$ و $b=1.0555\cdots$ برای xهای بزرگ صادق‌اند. استدلال چبیشف مبتنی بر فرمول مقدماتی

$$\log n!=\sum_{p^k\leq n}[\frac{n}{p^k}]\log p$$

است و تابع زتا در آن به کار گرفته نمی‌شود.

تحلیل ریمان از تابع زتا پایهٔ نظری ارتباط میان $\pi(x)$ و $\mathrm{Li}(x)$ را فراهم آورد. او نخست ثابت کرد که می‌توان $\zeta(s)$ را به تابعی برخه ریخت (مرومُرف)

بر $\mathbb{C}$ توسعه داد که فقط یک قطب ساده با ماندهٔ ۱ در نقطهٔ ۱ دارد و در معادلهٔ تابعی زیر صدق می‌کند.

$$\zeta(s) = 2^s\pi^{s-1}(\sin\frac{\pi s}{2})\Gamma(1-s)\zeta(1-s)$$

در اینجا $\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}dx$ تابع گاماست. برای مرتبط ساختن $\zeta(s)$ و $\pi(x)$، ریمان به معرفی تابع Jای به شرح زیر پرداخت. J تابعی پله‌ای و غیرنزولی است که روی $\mathbb{R}^+$ تعریف شده است، $J(x)=0$ به‌ازای $x<2$ و هرگاه که x از p^k، p عدد اول، می‌گذرد، مقدار J به‌اندازه $1/k$ افزایش می‌یابد. مثلاً $J(x)=1$ به‌ازای $2 \le x < 3$، $J(x) = 5/2$ به‌ازای $4 \le x < 5$ و غیره. در این‌صورت $J(x)$ نمایش ساده‌ای برحسب $\pi(x)$ دارد:

$$J(x) = \pi(x) + \frac{1}{2}\pi(x^{\frac{1}{2}}) + \frac{1}{3}\pi(x^{\frac{1}{3}}) + \cdots \qquad (2)$$

توجه کنید که به‌ازای هر x، مجموع بالا در واقع یک مجموع متناهی است.

رابطهٔ میان J و ζ را دست‌کم به‌طور صوری می‌توان به سادگی توصیف کرد. با لگاریتم‌گیری از نمایش حاصلضربی اویلر از $\zeta(s)$، رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$\log\zeta(s) = \sum_{n,p}\frac{1}{n}p^{-s} \qquad (\text{وقتی } \sigma > 1) \qquad (3)$$

بنابراین به‌ازای $\sigma > 1$ داریم

$$\log\zeta(s) = \int_0^\infty x^{-s}dJ(x)$$

که در اینجا dJ باید به مفهوم توزیع تعبیر شود (یا انتگرال بالا را یک انتگرال ریمان‌ـاستیلتیس تصور کنید). بنابراین انتگرال بالا را با استفاده از انتگرال‌گیری جزء به جزء می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$\frac{\log\zeta(s)}{s} = \int_0^\infty J(x)x^{-s}\frac{dx}{x} \qquad (4)$$

برای درک این انتگرال، توجه کنید که جایگزینی $x = e^y$ و در نتیجه $\frac{dx}{x} = dy$، انتگرال را به‌صورت

$$\int_{-\infty}^{+\infty} J(e^y)e^{-i\sigma y+yt}dy$$

در می‌آورد که همان تبدیل فوریه است. بدین ترتیب نمایش انتگرالی ذکر شده درواقع ترجمهٔ تبدیل فوریه ازگروه جمعی $(\mathbb{R},+)$ به‌گروه ضربی $(\mathbb{R}^+,\cdot)$ است که معمولاً به تبدیل ملین[1] معروف است. به‌عبارت دیگر، (۴) مبین این امر است که تبدیل ملین $J(x)$ برابر $\frac{\log\zeta(s)}{s}$ است. چون هدف ما این است که $\pi(x)$ (یا $J(x)$) را به صریح‌ترین شکل ممکن به $\mathrm{Li}(x)$ ربط دهیم، باید معکوس تبدیل ملین را به کارگیریم تا نمایشی انتگرالی برای $J(x)$ به‌دست آوریم. با ترجمهٔ فرمول معکوس انتگرال فوریه به تبدیل ملین، رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$J(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\log\zeta(s)x^{s-1}ds \qquad (5)$$

1. Mellin transform

که در اینجا $a > 1$ و انتگرال‌گیری روی خط قائم با مقدار حقیقی a است. این نمایش انتگرالی ظاهراً فقط صوری است ولی در واقع با انتگرال‌گیری جزء به‌جزء به مفهوم توزیع‌ها کاملاً معنی دارد. ریمان با استدلالی فوق‌العاده مبتکرانه نشان داد که $J(x)$، $x > 1$، برابر است با:

$$\mathrm{Li}(x) + \int_0^2 \frac{dt}{\log t} - \log 2 - \sum_{\mathrm{Im}\rho>0}(\mathrm{Li}(x^\rho) + \mathrm{Li}(x^{1-\rho})) + \int_x^\infty \frac{dt}{t(t^2-1)\log t} \qquad (6)$$

که در اینجا ρ در مجموعهٔ صفرهای تابع زتا در نوار $0 < \sigma < 1$ مقدار می‌گیرد و انتگرال $\int_0^2 \frac{dt}{\log t}$ به مفهوم مقدار اصلی کوشی است. استخراج $\pi(x)$ از $J(x)$ کاری ساده است. در واقع استدلالی مقدماتی نشان می‌دهد که

$$\pi(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n}J(x^{\frac{1}{n}}) = J(x) - \frac{1}{2}J(x^{\frac{1}{2}}) - \cdots + \frac{1}{6}J(x^{\frac{1}{6}}) - \cdots \qquad (7)$$

که در اینجا مقدار $\mu(n)$ (تابع موبیوس) صفر است اگر n یک مقسوم‌علیه مجذور داشته باشد و برابر $(-1)^k$ است در صورتی که n برابر حاصلضرب k عدد اول متمایز باشد، و $\mu(1) = 1$. بدین ترتیب فرمول ریمان برای $J(x)$ مبنایی برای مرتبط ساختن $\pi(x)$ به خواص تحلیلی ایجاد می‌کند، یا به‌طور دقیق‌تر، به صفرهای تابع زتا. امید این بوده است که سرشت نوسانی جملات

$$\sum_{\mathrm{Im}\rho>0}(\mathrm{Li}(x^\rho) + \mathrm{Li}(x^{1-\rho}))$$

منجر به حذف جملات متعددی شود و نقش اصلی در مقدار $J(x)$ را $\mathrm{Li}(x)$ به عهده داشته باشد. وفور صفرهای $\zeta(s)$ در ناحیهٔ $0 \le \sigma \le 1$ اساساً از قضایای نظریهٔ توابع تام[1] دارای مرتبهٔ متناهی[2] که در آن قضایا آهنگ رشد تابع تام به نمای همگرایی صفرهایش ربط داده می‌شود، نتیجه می‌گردد. قضیهٔ فاکتورگیری آدامار[3] که توابع تام دارای مرتبهٔ متناهی را به‌صورت یک حاصلضرب نامتناهی نمایش می‌دهد، حربهٔ عمده در مرتبط ساختن صفرهای تابع به مرتبهٔ رشد آن است. این قضیه همچنین بسط حاصلضربی دیگری برای تابع زتا ارائه می‌کند که منجر به فرمول‌های صریحی در نظریهٔ اعداد می‌شوند.

به جای بهره‌گیری مستقیم از نمایش انتگرالی $J(x)$، می‌توان نشان داد که صفرنشدن $\zeta(s)$ در نیم‌صفحهٔ بستهٔ $\sigma \ge 1$ نتیجه می‌دهد که $\pi(x)$ به‌طور مجانبی برابر $\frac{x}{\log x}$ است. این در واقع روشی است که آدامار و دُ لا واله پوسن مستقل از یکدیگر برای اثبات قضیهٔ اعداد اول به‌کار گرفتند. معلوم شده است که میزان خطا در نمایش مجانبی $\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$ در حد، $O(\frac{x}{(\log x)^2})$ است. می‌توان با تجزیه و تحلیل ناحیه‌های خالی از صفر تابع $\zeta(s)$ تخمین‌های دقیق‌تری از خطا به‌دست آورد. به ادعای فرضیهٔ ریمان (RH)، همهٔ صفرهای $\zeta(s)$ که در $0 \le \sigma$ قرار دارند روی خط $\sigma = \frac{1}{2}$ واقع می‌شوند. صحت این فرضیه خطا را به $O(\sqrt{x}\log x)$ تقلیل می‌دهد و به‌عکس. باید در اینجا

1. entire functions 2. finite order

3. Hadamard factorization theorem

خاطرنشان کرد که طبق شواهد عددی گسترده، تابع $\mathrm{Li}(x)$ تقریب بهتری از $\frac{x}{\log x}$ برای $\pi(x)$ است.

پس از اثبات قضیهٔ اعداد اول در سال ۱۸۹۶، پیشرفتهای گسترده‌ای در نظریهٔ توابع تام یک متغیر مختلط صورت گرفت. با عنایت به رابطهٔ میان مرتبهٔ رشد این توابع و توزیع صفرهای آنها، به نظر می‌رسید که تحلیل عمیقتری از توابع تام ممکن است منجر به اثبات فرضیهٔ ریمان شود. در واقع در سال ۱۹۰۰ هیلبرت ابراز خوشبینی کرد که طی چند دههٔ بعد اثباتی از RH پیدا شود. تاریخ خلاف این را نشان داده است و باورعمومی این است که نظریهٔ توابع نمی‌تواند به تنهایی اثبات RH را فراهم آورد.

معروفترین حدس در مورد ارتباط میان رشد یک تابع تام یا برخه‌ریخت و فرضیهٔ ریمان، فرضیهٔ لینداُف[1] است. برای تابع برخه‌ریخت ϕ تعریف می‌کنیم:

$$\mu_\phi(\sigma) = \inf\{a \in \mathbb{R} | \phi(\sigma + it) = O(|t|^\alpha) \text{، وقتی } t \to \infty\}$$

فرضیهٔ لینداف این است که

$$\mu_\zeta(\tfrac{1}{2}) = 0$$

برای توصیف رابطهٔ بین رشد ζ و صفرهای آن، تعداد صفرهای $\zeta(\sigma + it)$ در ناحیهٔ $\{\sigma > \rho, 0 \le t \le T\}$ را به $N(\rho, T)$ نمایش می‌دهیم. قضیهٔ معروفی در مورد تابع زتای ریمان حکم می‌کند که فرض لینداف معادل است با اینکه وقتی $T \to \infty$، به‌ازای $\rho > \frac{1}{2}$

$$N(\rho, T+1) - N(\rho, T) = o(\log T)$$

از این مطلب روشن است که صحت RH، صحت فرضیهٔ لینداف را تضمین می‌کند، اما عکس موضوع صحیح نیست. تابع $N(\rho, T)$ مورد مطالعهٔ فراوان قرار گرفته است و می‌دانیم که

$$N(0, T) = \frac{T}{2\pi}\log\frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + O(\log T)$$

بدین ترتیب، آهنگ افزایش تعداد صفرهای $\zeta(s)$ در ناحیهٔ $T \le t \le T+1$ مانند $\log T$ است وقتی $T \to \infty$.

وفور صفرهای $\zeta(s)$ در نوار بحرانی $0 < \sigma < 1$ این نگرش را القاء می‌کند که تفاضل میان مقادیر موهومی متوالی صفرهای تابع زتا ممکن است ساختار جالب توجهی داشته باشد. به فرض صحت RH، صفرهای ζ در نیمصفحهٔ بالا به صورت $\frac{1}{2} + i\tau_j$ هستند که در آن $\tau_j < \tau_{j+1}$. در این‌صورت حدس زده می‌شود که توزیع زوجهای صفرهای تابع زتا به صورت

$$\frac{\#\{(\tau, \tau') | 0 < \tau < \tau' < T, \tau' - \tau \in [\frac{2\pi\alpha}{\log T}, \frac{2\pi\beta}{\log T}]\}}{\frac{T\log T}{2\pi}} \sim \int_\alpha^\beta \left(1 - (\frac{\sin \pi t}{\pi t})^2\right)dt$$

باشد که در آن $\beta > \alpha > 0$. این تخمین که به حدس همبستگی زوجی[2] برای صفرهای تابع زتا معروف است، توسط هیو مونتگمری با فرض صحت

1. Lindelöf 2. pair correlation conjecture

RH به دست آمد (به [M] و [RS] نگاه کنید). تحلیل عددی گسترده توسط اُدلیزکو صحت این حدس را تأیید می‌کند. حدس همبستگی زوجی است که به رابطهٔ میان صفرهای تابع زتا و توزیع ویژه‌مقدارهای ماتریسهای ارمیتی اشاره دارد، موضوعی که اکنون به آن خواهیم پرداخت.

طبق قضیه‌ای استاندارد در آنالیز برای هر گروه توپولوژیک موضعاً فشردهٔ G، اندازهٔ مثبت منحصر به فردی چون $d\mu$ (با تقریب ضرب در عدد ثابت) موسوم به اندازهٔ هار[1] وجود دارد که نسبت به ضرب در طرف چپ ناورداست، یعنی برای هر تابع پیوستهٔ ϕ و هر $x \in G$، داریم $\int_G \phi(xy)d\mu(y) = \int_G \phi(y)d\mu(y)$. اگر به علاوه گروه فشرده (یا آبلی) باشد، آنگاه $d\mu$ لزوماً نسبت به ضرب چپ و راست و نیز معکوس‌گیری در G ناورداست، یعنی

$$\int_G \phi(xy)d\mu(y) = \int_G \phi(yx)d\mu(y) = \int_G \phi(y^{-1})d\mu(y)$$

اندازهٔ لبگ روی گروه جمعی $\mathbb{R}$ و $\frac{dt}{t}$ روی گروه ضربی $\mathbb{R}^+$ ساده‌ترین مثالهای اندازهٔ هار هستند. $d\mu$ را اندازهٔ هار بهنجارشده [نرمالشده] روی گروه یکانی[2] $U(n)$ بگیرید، پس $\mathrm{vol}(U(n)) = 1$. یک توصیف صریح برای اندازهٔ هار روی $U(n)$ با در نظرگرفتن حاصلضرب گوه‌ای[3] درایه‌های ماتریس $A^{-1}dA$ به‌دست می‌آید که در اینجا A می‌تواند هر پرمایش[4] گروه یکانی باشد و d نسبت به پرمایش اتخاذ شده محاسبه می‌شود. راه دیگری برای توصیف اندازهٔ هار روی $U(n)$، که با کامپیوتر به‌خوبی تقریب زده می‌شود، استفاده از متغیرهای تصادفی نرمال است. فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی مستقل نرمال با میانگین صفر و واریانس $\frac{1}{2}$ باشند. در این‌صورت $X + iY$ را یک متغیر تصادفی نرمال مختلط استاندارد می‌نامیم. حال فرض کنید n^2 متغیر تصادفی γ_{jk} داده شده‌اند که مستقل، مختلط و نرمال استاندارد هستند. با تشکیل ماتریس $[\gamma_{jk}]$ و استفاده از فرایند گرام-اشمیت بر ستونهای ماتریس، یک ماتریس یکانی به دست می‌آوریم. حال یک تقریب برای اندازهٔ هار روی $U(n)$ به روش مونت‌کارلو به دست می‌آید. به بیان دیگر هرگاه زیرمجموعه‌ای چون W از $U(n)$ داده شده باشد، با انتخاب تصادفی نقاط $U(n)$ به روش فوق و محاسبهٔ نسبت انتخابهایی که در W قرار می‌گیرند، اندازهٔ هار W به‌دست می‌آید. از آنجا که شبیه‌سازی متغیر تصادفی نرمال و پیاده‌سازی روش گرام-اشمیت هر دو به‌وسیلهٔ کامپیوتر عملی هستند، با این روش می‌توان اندازهٔ هار روی $U(n)$ را در عمل مورد استفاده قرار داد. بدین ترتیب می‌توان ماتریسهای یکانی تصادفی را به‌وسیلهٔ کامپیوتر ایجاد کرد. ویژه‌مقدارهای یک ماتریس یکانی A به شکل $\{e^{i\theta_j}\}$ هستند که در آن $0 \le \theta_1 \le \theta_2 \le \ldots \le \theta_n < 2\pi$. توزیع ویژه‌مقدارهای یک ماتریس یکانی تصادفی روی دایرهٔ واحد یکنواخت نیست بلکه به‌وسیلهٔ تابع چگالی

$$f(\theta_1, \cdots, \theta_n) = \frac{1}{2^n \pi^n n!}\prod_{j<k}|e^{i\theta_j} - e^{i\theta_k}|^2 \qquad (8)$$

1. Haar measure 2. unitary 3. wedge product
4. parametrization

داده می‌شود. از این عبارت پیداست که ویژه‌مقدارهای ماتریس یکانی تصادفی تمایل به دفع یکدیگر دارند و نمایش تصویری آنها روی دایرهٔ واحد نشان می‌دهد که به صورتی «هم‌فاصله‌تر» از اعداد مختلط با طول واحد که طبق توزیع یکنواخت انتخاب شده‌اند، قرار می‌گیرند. اکنون تابع همبستگی زوجی را برای ویژه‌مقدارهای یک ماتریس یکانی به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$r_2(A)(a,b) = \frac{\#\left\{j\neq k \,|\, n(\theta_j-\theta_k)\in[2\pi a, 2\pi b]\right\}}{n}$$

هرگاه $a<b$ اعداد حقیقی باشند. امید ریاضی

$$r_2(a,b)=\int_{U(n)} r_2(A)(a,b)\,d\mu(A)$$

وجود دارد و یک اندازه است که به هر بازهٔ $[a,b]$ عدد حقیقی مثبت $r_2(a,b)$ را نسبت می‌دهد. از ملاحظات کلی احتمالی (قانون اعداد بزرگ) می‌توان نتیجه گرفت که $r_2(A)(a,b)$ به $r_2(a,b)$ میل می‌کند وقتی $n\to\infty$. به علاوه، اندازهٔ $r_2(a,b)$ را می‌توان به‌صورت زیر نمایش داد

$$r_2(a,b)=\int_a^b \left(1-\left(\frac{\sin \pi x}{\pi x}\right)^2\right)dx \qquad (۹)$$

که شباهت قابل توجهی به توزیع زوجهای صفرهای تابع زتا دارد که قبلاً بحث آن رفت. محاسبات عددی گستردهٔ صفرهای $\zeta(s)$ و ویژه‌مقدارهای ماتریسهای یکانی تصادفی نشان می‌دهند که بافت‌نگارهای تفاضلهای صفرهای متوالی $\zeta(s)$ و $\theta_j-\theta_{j-1}$، پس از بهنجارسازی مناسب، روی خمهای تقریباً یکسان قرار می‌گیرند ([O] را ببینید). طبعاً می‌توان ماتریسهای متعامد یا گروههای همتافته[1] (فشرده) را نیز در نظر گرفت و توزیع ویژه‌مقدارهای آنها را نیز مورد مطالعه قرار داد. در این حالت، نتایجی مشابه ولی متفاوت برقرارند. مسألهٔ ذی‌ربط توزیع $\mathrm{Tr}(A^k)$، وقتی A یک ماتریس تصادفی از یک گروه کلاسیک فشرده باشد در [DS] حل شده است.

برای مقایسهٔ صفرهای تابع زتا و ویژه‌مقدارهای ماتریسهای یکانی تصادفی، کُرام[2] و دیاکونیس[3] این فرض آماری را که داده‌های تشکیل شده از صفرهای تابع زتا از چگالی (۸) ناشی شده‌اند مورد آزمون قرار دادند [CD]. به‌طور دقیق‌تر به یاد آورید که فاصلهٔ میان صفرهای متوالی $\zeta(s)$، $s=\sigma+it$، حدوداً برابر $2\pi/(\log t-\log 2\pi e)$ است و ویژه‌مقدارهای ماتریسهای یکانی تصادفی فاصلهٔ تقریبی $\frac{2\pi}{n}$ را از هم دارند. برای مقایسهٔ فاصلهٔ میان ۵۰۰۰۰ صفر که از حدود 10^{20}امین صفر شروع شوند و فاصلهٔ بین ویژه‌مقدارهای ماتریسهای $n\times n$ یکانی، معقول است که فرض کنیم $n\sim\log\frac{t}{2\pi e}$. با محاسبه‌ای ساده معلوم می‌شود انتخاب $n=42$ انتخاب خوبی است. در اینجا تفاضلهای $\delta_j=\tau_j-\tau_{j-1}$ بین ۵۰۰۰۰ صفر متوالی با شروع از حدود 10^{20} امین صفر محاسبه می‌شوند. از اینجا $1190\sim\frac{50000}{42}$ بلوک از ۴۲ تفاضل متوالی به‌دست می‌آید. برای هر بلوک قرار می‌دهیم $\Delta_j=\sum_{k=1}^{j}\delta_k$ و

$$X_j=\exp\left[(2\pi i)\left(\frac{\Delta_j}{\Delta_{42}}+U\right)\right] \qquad (۱۰)$$

1. symplectic groups 2. Coram 3. Diaconis

که در اینجا U توزیع یکنواخت روی $[0,1)$ است. به اصطلاح معمول آماری، «فرض صفر» این است که X_jها از مشاهدهٔ متغیری تصادفی با چگالی (۸) به‌دست آمده‌اند. با به‌کارگیری آزمونهای آماری بهینه، نشان داده می‌شود که فرض صفر در سطح ۱٪ رد نمی‌شود ولی در سطح ۵٪ مردود است. قابل توجه است که اگر به جای گروه یکانی، گروه متعامد یا گروههای همتافته (فشرده) را به‌کار گیریم، فرض صفر برخلاف پیش‌بینی [KS] حتی در سطح ۱٪ رد می‌شود.

رفتار صفرهای تابع زتا از جهات دیگری هم به ویژه‌مقدارهای ماتریسهای یکانی تصادفی شباهت دارد. کِلی ویاند[1] نشان داد که ساختار همبستگی به نسبت شگفت‌آوری بین تعداد ویژه‌مقدارهای ماتریسهای یکانی تصادفی در بازه‌های $(e^{2\pi i\alpha},e^{2\pi i\beta})$ و $(e^{2\pi i\gamma},e^{2\pi i\delta})$ وجود دارد [DE]. در واقع، وی نشان داد که:

۱. برای بازه‌های مجزا، همبستگی صفر است؛

۲. به‌ازای $\alpha<\gamma<\beta<\delta$ همبستگی صفر است؛

۳. به‌ازای $\alpha<\beta=\gamma<\delta$، ضریب همبستگی $-\frac{1}{2}$ است؛

۴. به‌ازای $\alpha=\gamma<\delta<\beta$، ضریب همبستگی $\frac{1}{2}$ است.

همچنان که قبلاً شرح داده شد، می‌توان بلوکهای اعداد مختلط با قدر مطلق ۱ را مطابق (۱۰) ساخت. در اینجا $\alpha<\beta$ را تثبیت می‌کنیم و یک پنجرهٔ متحرک $(e^{2\pi i\gamma},e^{2\pi i\delta})$ در نظر می‌گیریم که در آن $\gamma=\alpha+\tau$ و $\delta=\beta+\tau$ و τ متغیر است. با در نظر گرفتن تابع همبستگی به‌عنوان تابعی از τ، تابعهای همبستگی تقریباً یکسان برای ماتریسهای یکانی تصادفی و صفرهای تابع زتا به‌دست می‌آیند.

یکی از انگیزه‌های بررسی توزیع ویژه‌مقدارهای ماتریسهای یکانی، مسائل فیزیک هسته‌ای بوده است. فضای برداری χ متشکل از ماتریسهای ارمیتی $n\times n$ با تابع چگالی احتمال $Ce^{-\mathrm{Tr}(A^*A)}$ (با انتخاب Cی مناسب) معمولاً «مجموعهٔ یکانی معظّم»[2] (GUE) نامیده می‌شود. همین‌طور مجموعه‌های معظّم متعامد[3] (GOE) و همتافته[4] (GSE) در نظر گرفته می‌شوند. ویگنر[5] بود که این نظر را مطرح کرد که طیف انرژی هسته‌های پیچیده را می‌توان برحسب ویژه‌مقدارهای ماتریسهای تصادفی متعلق به GOE، GUE و GSE مدلسازی کرد. قانون معروف نیمدایرهٔ ویگنر را می‌توان در چارچوب GOE استخراج کرد. از دههٔ ۱۹۵۰ توزیع ویژه‌مقدارهای ماتریسهای تصادفی موضوع کاوشهای گسترده‌ای بوده است. دایسن[6] نشان داد که توزیع ویژه‌مقدارها، یا به‌طور دقیق‌تر همبستگیهای ویژه‌مقدارهای ماتریسهای تصادفی از گروههای یکانی، متعامد، و همتافته (فشرده) همان خواص آماری GUE، GOE و GSE را دارا هستند. از بعضی جهات راحت‌تر است که گروههای کلاسیک فشرده را در نظر بگیریم تا مستقیماً GUE، GOE و GSE را. به نظر می‌رسد که فرمول مونتگمری (مبتنی بر RH) در مورد تابع همبستگی زوجی را دایسن مستقلاً حدس زده باشد بر این اساس که وی آن را مشابه تابع همبستگی زوجی ویژه‌مقدارهای تصادفی می‌پنداشت. این تقارن (اگر واقعیت داشته باشد) نقطهٔ شروع تحقیقات فراوانی در این مبحث بوده است. برای ملاحظهٔ

1. K. Wieand 2. Grand Unitary Ensemble 3. Grand Orthogonal Ensemble 4. Grand Symplectic Ensemble 5. Wigner 6. Dyson

شرحی در مورد مسائل فیزیکی که منجر به ماتریسهای تصادفی می‌شوند. به [Me] و [BK] و مراجع مندرج در آنها مراجعه کنید.

میان رفتار ویژه‌مقدارهای ماتریسهای یکانی تصادفی و صفرهای تابع زتا تفاوتهای مفهومی قابل ملاحظه‌ای نیز وجود دارد. برای کمّی ساختن این تفاوت، مفهوم «واریانس عددی» برای دنباله‌ای از کمیتهای تصادفی با رشد خطی را مطرح می‌کنیم. به‌طور دقیق، فرض کنید $N(x)$ نمایش‌دهندهٔ کمیتهای تصادفی حقیقی باشد، $x \in \mathbb{Z}^+$، با این خاصیت که $N(x+y) \sim N(x)+N(y)$ و $N(x+y)-N(x)-N(y)$ دارای میانگین صفر باشد. در این صورت برای مقادیر (بزرگ) ثابت x و متغیر t، واریانس عددی عبارت است از کمیت

$$\frac{1}{l}\sum_{t=1}^{l} \mathrm{Var}[N(x+t)-N(x)-N(t)]$$

برای به‌کارگیری واریانس عددی در مورد ویژه‌مقدارهای ماتریسهای یکانی تصادفی و صفرهای تابع زتا بهنجارسازی مناسبی مورد نیاز است که شرط $x, t \in \mathbb{Z}^+$ را تأمین کند. می‌توان نشان داد که برای ویژه‌مقدارهای ماتریسهای یکانی تصادفی، واریانس عددی تابعی یکنوای صعودی نسبت به l است. ولی برای صفرهای تابع زتا، واریانس عددی دیگر تابعی صعودی نیست و نوسانات زیادی به‌ازای صفرهای بزرگ (بزرگتر از 10^{20}امین صفر) دارد. تفاوت دو کمیت را می‌توان به صورت کمی به شکل مجموعهایی برحسب اعداد اول و مقادیر تابع زتا بیان کرد. برای ملاحظهٔ بحثی پیرامون این مسأله به [BK] نگاه کنید. احتمالاً شباهت بین توابع همبستگی ویژه‌مقدارهای ماتریسهای یکانی تصادفی و صفرهای تابع زتا در نواحی نوسان یا نزول واریانس عددی صفرها رو به نقصان می‌رود.

مفهوم مشابه تابع زتا برای واریته‌ها [چندگوناها] روی میدانها [هیأتها]ی متناهی، یعنی تابع زتای ویل اساساً تابع مولد تعداد نقاط گویای واریته است وقتی که میدان زیربنایی تعریف، توسعه می‌یابد. تابع زتای ویل بسیار بهتر از تابع زتای ریمان درک شده است. نتایجی در مورد رابطهٔ فاصلهٔ بین صفرهای تابع زتای ویل و ماتریسهای یکانی تصادفی وجود دارد که در [KS] و مراجع آن به آن پرداخته شده است. موفقیتی که در درک تابع زتای ویل به‌دست آمده است مرهون پیشرفت نظریهٔ کوهومولوژی مناسب (نظریهٔ lـایک[1]) برای واریته‌ها روی میدانهای متناهی است که در آن قضایای مشابه «دوگانی پوانکاره»، قضیهٔ نقطهٔ ثابت لفشتس، و قضیهٔ سخت لفشتس[2] معتبرند. در این وضعیت نقاط گویای واریتهٔ تعریف شده روی میدان متناهی $\mathbb{F}_q$، نقاط ثابت خودریختی فروبنیوس $x \to x^q$ هستند. محاسبهٔ تابع مولد برای تعداد نقاط ثابت در اینجا به‌وسیلهٔ قضیهٔ نقطهٔ ثابت لفشتس خطی‌سازی می‌شود. اثرها[3]ی عملگرهای خطی که توسط خودریختی فروبنیوس روی گروههای کوهومولوژی lـایک، القاء می‌شوند تابع زتای ویل را پدید می‌آورند. این امر، به مفهوم کلی، همراستا با دیدگاه (منسوب به هیلبرت و پولیا) است که درک عمیقتر تابع زتای ریمان ممکن است از طریق مرتبط ساختن آن به عملگر یکانی یا ارمیتی مناسب روی یک فضای هیلبرت حاصل شود. برای ملاحظهٔ نظریه‌پردازیهایی در این وادی به فصل ۵ مرجع [P] نگاه کنید.

1. l-adic 2. Hard Lefschetz theorem 3. traces

مراجع

[BK] Berry, M. V. and J. P. Keating, "The Riemann zeros and eigenvalue asymptotics", *SIAM Review*, (2) **41**, 236-266.

[CD] Coram, M. and P. Diaconis, "New tests of the correspondence between unitary eigenvalues and zeros of Riemann's zeta function", *Preprint*, Department of Statistics, Stanford University (2000).

[DE] Diaconis, P. and S. Evans, "Linear functionals of eigenvalues of random matrices", *Preprint*, Department of Statistics, Stanford University (2000).

[DS] Diaconis, P. and M. Shahshahani, "On the eigenvalues of random matrices", *Jour. Appl. Prob.*, Special Volume **31 A**, 696-730.

[E] Edwards, H. M., *Riemann's Zeta Function*, Academic Press (1974).

[KS] Katz, N. and P. Sarnak, "Zeros of zeta functions and symmetry", *Bull. AMS*, (1) **36** (1999) 1-26.

[M] Montgomery, H., "The pair correlation of zeros of zeta function", *Proc. Symp. Pure Math.*, **24** (1973) 171-183.

[Me] Mehta, M., *Random Matrices*, Academic Press (1967).

[O] Odlyzko, A., "The 10^{20}-th zero of Riemann zeta function and 70 million of its neighbors", *Preprint*, ATT (1989).

[P] Patterson, S. J., *An Introduction to the Theory of the Riemann Zeta Function*, Cambridge University Press (1988).

[RS] Rudnick, Z. and P. Sarnak, "Zeros of principal L-functions and random matrix theory", *Duke Math. Jour.*, **81** (1996) 269-322.

[T] Titchmarsh, E. C., *The Theory of Riemann Zeta Function*, Oxford University Press (1986).

******

* مهرداد شهشهانی، پژوهشگاه دانشهای بنیادی

mehrdads@karun.ipm.ac.ir