بعد فضای برداری و بعد گلدی

منصور معتمدی*

۱.مقدمه

جمع اعداد مختلط، آنگونه که توسط وسل و آرگان تعریف شد، جمع پاره‌خطهای جهت‌دار است. هیأتهای متناهی $GF(p^n)$ که گالوا آنها را ساخت، فضاهای برداری n بعدی بر روی هیأت $GF(p)$ هستند. جبر اعداد چهاربرگی حقیقی که همیلتن آنها را به وجود آورد، یک فضای برداری چهار بعدی بر روی هیأت حقیقی به شمار می‌آید. بدین ترتیب باید پذیرفت، که مفهوم فضای برداری به طور ضمنی در کارهای ریاضیدانان برجسته‌ای مشهود است. اما گراسمان نخستین ریاضیدانی است که صریحاً از «فضای برداری n بعدی» در کارهای تحقیقی خود نام برده است.

بعد یک فضای برداری بر روی هیأتی چون F، عدد اصلی یک پایهٔ دلخواه آن است. از همین روست که ابتدا باید وجود یک پایه برای فضای برداری اثبات شود، و آنگاه یکی بودن عدد اصلی پایه‌ها محقق گردد. این دو در نهایت با استفاده از لم تسورن و با انتخاب اسکالرها از یک هیأت و امکان عمل تقسیم میسر می‌شود. هنگامی که مفهوم یک فضای برداری به مدولها تعمیم داده می‌شود، اسکالرها، لزوماً از یک هیأت انتخاب نمی‌شوند و دیگر وجود پایه امری بدیهی نیست. مدولهای آزاد به دسته‌ای از مدولها اتلاق می‌شود که بر روی حلقه‌ای مفروض دارای پایه‌ای باشند. از این جهت، مدولهای آزاد را می‌توان نوعی تعمیم از فضاهای برداری دانست. با وجود این و با فرض آزادبودن مدول M بر روی حلقهٔ R، یکسان بودن عدد اصلی پایه‌ها مسئلهٔ دیگری است. گرچه این یکسانی در مورد دستهٔ بزرگی از حلقه‌ها وجود دارد، اما در حالت کلی چنین نیست [۱۳] و لذا امکان تعریف بعد یک مدول دلخواه، از این طریق وجود ندارد.

در بین سالهای ۱۹۵۸ تا ۱۹۶۰ میلادی به هنگام مطالعهٔ حلقهٔ خارج‌قسمتها، مفهومی به نام بعد گلدی یا بعد یکنواخت شکل گرفت که در قسمتهای وسیعی از نظریهٔ حلقه‌ها سودمند واقع شد. در این نوشتار به معرفی و توضیح بعد گلدی می‌پردازیم. همچنانکه خواهیم دید، بعد گلدی را می‌توان برای هر Rـ مدول M تعریف کرد. در بخش دوم، پس از مقدماتی، به تعریف بعد گلدی می‌پردازیم و مطالبی پیرامون آن عنوان خواهیم کرد. در آنجا زیر مدولهایی بنام زیر مدولهای یکنواخت که به راستی تعمیمی مناسب از زیر فضاهای یک بعدی هستند نقشی اساسی دارند. در بخش سوم، کاربرد بعد گلدی در نظریهٔ حلقه‌ها را که تضمین وجود حلقه‌های خارج قسمت برای دستهٔ بااهمیتی از حلقه‌های تعویض‌ناپذیر است، مورد بحث قرار می‌دهیم. در بخش پایانی اشاره‌ای کوتاه به بعد گلدی نامتناهی و تعمیم آن در شبکه‌های مدولی خواهیم داشت. تمام حلقه‌ها را یکدار می‌گیریم. مقصود از یک Rـ مدول، مدول راست می‌باشد.

۲.مدولهای با بعد گلدی متناهی

تعریف. گوییم Rـ مدول M دارای بعد گلدی متناهی است، هرگاه هیچ مجموع مستقیم نامتناهی از زیر مدولهای ناصفر آن وجود نداشته باشد.

بدیهی است که با تعریف فوق، هر Rـ مدول نوتری و از جمله هر فضای برداری با بعد متناهی، دارای بعد گلدی متناهی است. همچنین هر زیر مدول چنین مدولی دارای بعد گلدی متناهی خواهد بود. ملاحظه می‌شود همان‌طور که برای تعریف بعد متناهی یک فضای برداری ابتدا به طور کلی فضاهای برداری متناهی‌البعد تعریف می‌شوند، در تعریف بعد گلدی متناهی نیز به همین نحو عمل می‌شود. در اینجا لازم است بعضی مفاهیم اولیه را ذکر کنیم.

تعریف. گیریم M یک Rـ مدول و N یک زیر مدول آن باشد. در این صورت می‌نویسیم $N \leq M$. اگر به‌ازای هر زیر مدول ناصفر M مانند X داشته باشیم $N \cap X \neq \{0\}$، N را یک زیر مدول بزرگ M می‌نامیم و می‌نویسیم $N \leq' M$.

مثال ۱. اگر V یک فضای برداری باشد، V تنها زیر مدول بزرگ آن است.

در مورد زیرمدولهای بزرگ قضیهٔ زیر را متذکر می‌شویم.

قضیهٔ ۱.

یکم) اشتراک هر تعداد متناهی از زیر مدولهای بزرگ، یک زیر مدول بزرگ است.

دوم) اگر M_i $(1 \le i \le t)$، Rـ مدول باشد و $N_i \le' M_i$، آنگاه $N_1 \oplus N_2 \dots \oplus N_t \le' M_1 \oplus M_2 \dots \oplus M_t$.

سوم) اگر M یک Rـ مدول باشد و $N \le M$، آنگاه $N' \le M$ وجود دارد که

$$N \oplus N' \le' M \quad \text{و} \quad N \cap N' = \{0\}$$

چهارم) Rـ مدول M تنها زیر مدول بزرگ M است اگر و تنها اگر M مجموعی مستقیم و متناهی از زیر مدولهای خود باشد.

اثبات. به اثبات قسمت سوم اکتفا می‌کنیم. اگر قرار دهیم

$$S = \left\{ X : X \le M, N \cap X = \{0\} \right\}$$

به کمک لم تسورن می‌توان نشان داد که مجموعهٔ S دارای یک عنصر ماکسیمال مانند N' است. اگر Y یک زیر مدول M باشد و $Y \cap (N \oplus N') = \{0\}$، در این صورت زیر مدول $X = N' \oplus Y$ در شرط $N \cap X = \{0\}$ صدق می‌کنند، لذا $Y = \{0\}$ و $N \oplus N' <' M$. زیر مدول N' را مکمل N در M می‌نامیم. هر زیر مدولی که مکمل یک زیر مدول باشد، زیر مدول مکمل نامیده می‌شود.

عناصر سازندهٔ یک فضای برداری، عناصر پایه‌های آن هستند؛ هر عنصر پایه نیز یک زیر فضای برداری با بعد یک پدید می‌آورد. از این قرار می‌توان زیر فضاهای یک بعدی را جایگزین عناصر پایه کرد؛ بدین ترتیب، مدولهای یکنواخت که اکنون به تعریف آنها می‌پردازیم، تعمیم زیر فضاهای یک بعدی خواهند بود.

تعریف. Rـ مدول U را یکنواخت می‌نامیم هرگاه $U \ne \{0\}$ و هر زیر مدول آن در U بزرگ باشد.

بدیهی است که تعریف فوق معادل آن است که U شامل مجموع مستقیمی از زیر مدولهای ناصفر خود نباشد (آیا فضاهای برداری با بعد یک چنین خاصیتی ندارند؟).

قضیه ۲. هر Rـ مدول M با بعد گلدی متناهی دارای یک زیر مدول یکنواخت است.

اثبات. اگر M یکنواخت باشد، اثبات بدیهی است؛ در غیر این صورت M شامل مجموع مستقیمی از زیر مدولهای خود است:

$$M = M_0 \ge M_1 \oplus M_1'$$

تکرار این استدلال برای M_1، M_2، ...، وجود مجموع مستقیم

$$M_1' \oplus M_2' \dots$$

را نتیجه می‌دهد که به علت داشتن بعد گلدی متناهی، باید متناهی باشد و لذا یکی از M_kها باید یکنواخت باشد.

اکنون آخرین قضیه‌ای که ما را قادر به تعریف بعد گلدی می‌سازد بیان و ثابت می‌شود.

قضیهٔ ۳. گیریم M یک Rـ مدول با بعد گلدی متناهی و $U_1 \oplus U_2 \dots \oplus U_n$ یک مجموع مستقیم متناهی از زیر مدولهای یکنواخت M باشد که در M بزرگ است. در این صورت

یکم) هر مجموع مستقیم زیر مدولهای ناصفر M حداکثر دارای n جمعوند است.

دوم) یک مجموع مستقیم زیر مدولهای M در M بزرگ است اگر و تنها اگر شامل n جمعوند باشد.

اثبات. گیریم $M_1 \oplus M_2 \dots \oplus M_k$ یک زیر مدول M باشد و به ازای هر i $(1 \le i \le k)$، $M_i \ne \{0\}$. قرار می‌دهیم $N = M_2 \oplus \dots \oplus M_k$. این زیر مدول در M بزرگ نیست. بنابر قضیهٔ ۱ به ازای یک i $(1 \le i \le n)$ مثلاً $i = 1$ باید داشته باشیم $N \cap U_1 = \{0\}$؛ پس $M_2 \oplus \dots \oplus M_k \oplus U_1$ یک جمع مستقیم است. پس از k بار تکرار نتیجه می‌گیریم که $k \le n$. اثبات قسمت دوم تقریباً بدیهی است، زیرا اگر زیر مدولی در M بزرگ نباشد، دارای یک مکمل است که باید شامل یک زیر مدول یکنواخت باشد.

از قضیهٔ فوق نتیجه می‌شود که برای مدولی با بعد گلدی متناهی مانند M، یعنی مدولی که شامل هیچ مجموع مستقیم نامتناهی از زیر مدولهای ناصفر خود نیست، یک کران بالا برای تعداد جمعوندهای مجموعهای مستقیم متناهی آن وجود دارد. این کران بالا یک عدد طبیعی است که آن را بعد گلدی یا بعد یکنواخت می‌نامیم و با $\mathrm{Gdim}M$ یا $\mathrm{Udim}M$ نشان می‌دهیم، پس،

$\mathrm{Gdim}M =$

$\sup\{k$: M شامل مجموع مستقیم k زیر مدول ناصفر M است$\}$

نتایج زیر بلافاصله به دست می‌آیند.

یکم) $\mathrm{Gdim}M = 0$ اگر و تنها $M = 0$

دوم) $\mathrm{Gdim}M = 1$ اگر و تنها اگر M یکنواخت باشد

سوم) اگر $N \le M$ آنگاه $\mathrm{Gdim}N \le \mathrm{Gdim}M$. تساوی برقرار است اگر و تنها N در M بزرگ باشد.

چهارم) $\mathrm{Gdim}\ M$ ماکسیمم طول زیر مدولهای مکمل M است.

نکته. می‌دانیم اگر دو فضای برداری بر روی یک هیأت، بعدهای متناهی یکسان داشته باشند یکریخت هستند. اما اگر قرار دهیم $n = p_1p_2\dots p_k$ و $m = q_1q_2\dots q_k$ که در آن p_i ها و q_i ها اعداد اول متمایز هستند، در این صورت $\mathrm{Gdim}\mathbf{Z}_n = \mathrm{Gdim}\mathbf{Z}_m$، با وجود این $\mathbf{Z}_n \not\cong \mathbf{Z}_m$.

نکته. مدولهای خارج قسمت یک Rـ مدول با بعد گلدی متناهی، لزوماً دارای بعد متناهی نیستند. مثلاً Q به عنوان یک Zـ مدول دارای بعد گلدی ۱ است، در صورتی که Q/Z دارای بعد گلدی متناهی نیست.

مثال ۲. اگر R یک حلقه و $\mathrm{Gdim}R = n$، در این صورت $M_m(R)$ حلقهٔ ماتریسهای $m \times m$ با درایه‌های متعلق به R، یک R- مدول است و $\mathrm{Gdim}M_m(R) = nm$.

اکنون قضیه‌ای را که مشابه قضیه‌ای معروف در مورد بعد فضاهای برداری است، بیان و ثابت می‌کنیم.

قضیه ۴. گیریم M یک R- مدول با بعد گلدی متناهی و M_1 و M_2 زیر مدولهای آن باشند. اگر $M_1 \cap M_2 = \{0\}$، آنگاه

$$\mathrm{Gdim}(M_1 \oplus M_2) = \mathrm{Gdim}\, M_1 + \mathrm{Gdim} M_2$$

اثبات. فرض کنیم $\mathrm{Gdim}\, M_1 = r$، $\mathrm{Gdim} M_2 = s$. در این صورت زیر مدولهای یکنواخت $U_1, U_2, \dots, U_r$ و همچنین زیر مدولهای یکنواخت $V_1, V_2, \dots, V_s$ وجود دارند به قسمی که $K_1 = U_1 \oplus U_2 \dots \oplus U_r$ در M_1 و $K_2 = V_1 \oplus V_2 \dots \oplus V_s$ در M_2 بزرگ هستند. کافی است نشان دهیم که $K_1 \oplus K_2$ در $M_1 \oplus M_2$ بزرگ است. به سادگی می‌توان نشان داد که

$$K_1 \oplus K_2 = (K_1 \oplus M_2) \cap (K_2 \oplus M_1)$$

می‌دانیم که $K_1 \cap M_2 = \{0\}$، پس X را مکمل K_1 در $M_1 \oplus M_2$ می‌گیریم که شامل M_2 است. به ویژه $K_1 \cap X = \{0\}$. اکنون می‌توان نشان داد که $M_1 \cap X = \{0\}$. اگر x یک عنصر X باشد، داریم $x = m_1 + m_2$ (m_1 به M_1 و m_2 به M_2 تعلق دارند) و لذا $x - m_2$ که برابر با m_1 است به $X \cap M_2$ تعلق دارد، پس $m_1 = 0$ و $x = m_2$. بنابراین $X \subseteq M_2$ و به علت ماکسیمال بودن X باید داشته باشیم $X = M_2$، و $K_1 \oplus X = K_1 \oplus M_2$ در $M_1 \oplus M_2$ است و در نتیجه $K_1 \oplus K_2 = (K_1 \oplus M_2) \cap (K_2 \oplus M_1)$ در $M_1 \oplus M_2$ بزرگ است.

نکته. می‌دانیم اگر V یک فضای برداری متناهی‌البعد بر روی هیأت F، و W_1 و W_2 زیر مدولهای آن باشند، آنگاه

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$$

همان‌طور که ملاحظه شد، حالتی را که در آن $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ می‌توان به بعد گلدی مدولهایی که دارای بعد گلدی متناهی هستند تعمیم داد. متأسفانه حالت کلی، دیگر برقرار نیست. در مرجع [۱] صفحهٔ ۲۹۴ در تمرین دوم به غلط گفته شده که دستور مشابهی برقرار است. در این مورد کمیلو موفق به اثبات قضیه زیر شده است.

قضیهٔ۵. (کمیلو [۳]) گیریم $a \le b \le m$ سه عدد طبیعی دلخواه باشند. در این صورت حلقهٔ آرتینی موضعی، R، R- مدول M و زیر مدولهای M_1 و M_2 وجود دارند که

$$\mathrm{Gdim} M_1 = a, M = M_1 + M_2$$
$$\mathrm{Gdim} M = m, \mathrm{Gdim} M_2 = b.$$

۳. حلقهٔ خارج قسمتها

اره [۱۲] در سال ۱۹۳۰ و آسانو [۲] در سال ۱۹۳۹ میلادی نظریهٔ حلقهٔ خارج قسمتها را پی‌ریزی کردند. اما این قسمت از نظریهٔ حلقه‌ها تا پایان دههٔ پنجم سدهٔ اخیر که مقاله‌های باارزشی از جانسن [۹]، اتومی [۱۶]، گلدی [۶ و ۷]، کروازو و لزیور [۴]، لمبک [۱۰] و دیگران منتشر شد مورد توجه قرار نگرفت. پس از آن پیشرفتهای سریع و چشمگیری در این زمینه به دست آمد تا جایی که اکنون مطالعهٔ اصولی آن امکان‌پذیر گشته و اکثر مؤلفان کتابهای پیشرفتهٔ نظریهٔ حلقه‌ها، فصلهایی را به حلقهٔ خارج قسمتها اختصاص می‌دهند.

اولین مثالی که بی‌درنگ دربارهٔ حلقهٔ خارج قسمتها می‌توان ارائه داد، Q هیأت خارج‌قسمتهای یک قلمرو صحیح R است. این هیأت را می‌توان با دو ویژگی زیر مشخص کرد.

یکم) R یک زیرحلقهٔ Q است.

دوم) هر عنصر Q را می‌توان به شکل as^{-1} که a و s عناصر R هستند و $s \neq 0$ نوشت.

شیوهٔ ساختن Q طوری است که به سادگی می‌توان آن را به هر حلقهٔ تعویض‌پذیر تعمیم داد: به این منظور، مجموعهٔ S، متشکل از عناصر غیر مقسوم‌علیه صفر که تحت عمل ضرب بسته باشد، در نظر گرفته می‌شود. در این حالت می‌توان حلقهٔ خارج قسمتها، $R[S^{-1}]$ را شامل عناصری چون (a, s) دانست که $a \in R$ و $s \in S$، با این شرط که $(a, s) = (b, t)$ اگر و تنها اگر $U \in S$ وجود داشته باشد به طوری که $Uat = Ubs$. به این ترتیب حلقهٔ $R[S^{-1}]$ ساخته می‌شود که علاوه بر صدق کردن در شرایط یکم و دوم، (با قید $s \in S$) هر عنصر $s \in S$ در آن وارون‌پذیر خواهد بود. [۱۵]

چنانچه R تعویض‌پذیر نباشد و S را یک مجموعهٔ بستهٔ ضربی از عناصر غیر مقسوم‌علیه صفر فرض کنیم، نمی‌توان $R[S^{-1}]$ را درست مانند حلقه‌های تعویض‌پذیر تعریف کرد، و وجود چنین حلقه‌ای منوط به برقراری شرط دیگری است:

«به‌ازای هر $a \in R$ و هر $s \in S$ عنصری مانند $b \in R$ و عنصری مانند $t \in S$ وجود داشته باشد که تساوی $at = sb$ برقرارگردد.»

با برقراری این شرط هر عنصر S در $R[S^{-1}]$ وارون‌پذیر راست می‌شود و هر عنصر حلقهٔ راست خارج قسمتها را می‌توان به صورت as^{-1} که $a \in R$ و $s \in S$، نوشت. در حالتی که S مجموعهٔ تمام عناصری باشد که مقسوم علیه صفر نیستند، شرط اخیر را شرط (راست) اره و $R[S^{-1}]$ را حلقهٔ راست خارج قسمتها می‌نامند. در صورتی که شرط (چپ) اره نیز برقرار باشد حلقهٔ چپ، خارج قسمتها با حلقهٔ راست خارج قسمتها یکریخت است.

طبیعی‌ترین پرسش پس از طرح نکته‌های فوق، این است که حلقهٔ R چگونه باشد تا این حلقهٔ خارج قسمتها (راست یا چپ)، به‌شرط وجود، ساختمان شناخته شده‌ای داشته باشد، یا واجد شرایط مشخصی باشد. حلقه‌های نیم سادهٔ آرتینی به دلیل قضیه‌ای که ذیلاً بیان می‌کنیم می‌تواند چنین حلقه‌ای باشد. حلقهٔ نیم‌ساده، حلقه‌ای است که اشتراک همه ایده‌آلهای راست (یا چپ) آن ایده‌آل صفر باشد. حلقه‌های آرتینی به حلقه‌هایی اطلاق می‌شود که هر زنجیر کاهندهٔ ایده‌آلهای آن متناهی باشد.

قضیه. (آرتین ـ ودربورن) اگر R یک حلقهٔ نیم سادهٔ آرتینی باشد، آنگاه حلقه‌های تقسیم $D_1, D_2, \dots, D_k$ و اعداد طبیعی $n_1, n_2, \dots, n_k$ وجود دارند به طوری که

$$R \cong M_{n_1}(D_1) \oplus M_{n_2}(D_2) \dots \oplus M_{n_k}(D_k)$$

اعداد $n_1, n_2, \dots, n_k$ منحصر به فرد هستند و حلقه‌های تقسیم $D_1, D_2, \dots, D_k$ با تقریب یکریختی یکتا هستند. [۱۷ و ۱]

از آنجا که هر مجموع مستقیم و متناهی حلقه‌هایی از نوع $M_n(D_i)$، نیم ساده و آرتینی است، می‌توان گفت که حلقه‌های نیم سادهٔ آرتینی همان مجموع مستقیم و متناهی حلقهٔ ماتریسها با درایه‌های متعلق به یک حلقهٔ تقسیم هستند.

در بین سالهای ۱۹۵۸ تا ۱۹۶۰ میلادی، کروازو و لزیور [۴] مشترکاً و گلدی [۶ و ۷] به طور جداگانه موفق شدند حلقه‌هایی را که حلقهٔ خارج قسمتهای آن یک حلقهٔ نیم سادهٔ آرتینی باشند مشخص کنند.

قضیه (کروازو ـ لزیور ـ گلدی). حلقهٔ R دارای یک حلقهٔ خارج قسمتهای نیم سادهٔ آرتینی است اگر و تنها اگر در شرایط زیر صدق کند

یکم) حلقهٔ R شامل هیچ ایده‌آل پوچتوان مگر صفر نباشد،

دوم) هر زنجیر فزاینده از ایده‌آلهای راست، پوچساز متناهی باشد،

سوم) هیچ مجموع مستقیم نامتناهی از ایده‌آلهای راست ناصفر R وجود نداشته باشد.

شرط یکم در واقع تعریف حلقه‌های نیم اول است، یعنی حلقه‌هایی که اشتراک همهٔ ایده‌آلهای اول آن ایده‌آل صفر باشد. شرط دوم، شرط وجود زنجیری فزاینده را برای نوع خاصی از ایده‌آلهای راست، بیان می‌دارد: ایده‌آل راستی مانند A که به ازای آن یک زیر مجموعهٔ R مانند S وجود داشته باشد، به طوری که $A = A_{nn}S = \{r \in R : sr = 0 \ \forall s \in S\}$. حلقه‌های نوتری، به وضوح چنین شرطی را دارند. اگر R یک قلمرو صحیح باشد، حلقهٔ $R[x_1, x_2, \dots]$ یعنی حلقهٔ چند جمله‌ایها با تعدادی شمارا متغیر، یک حلقهٔ غیر نوتری واجد شرط دوم است. شرط سوم را می‌توان به طور طبیعی برای هر Rـ مدول تعریف کرد و این همان است که مقدمات شکل‌گیری مفهوم زیر فضاهای یکنواخت و بعد گلدی را فراهم آورده است.

۴. بعد گلدی نامتناهی و تعمیم در شبکه‌های مدولی

مفهوم بعد گلدی را می‌توان به طور طبیعی برای هر R- مدول M تعریف کرد. بعد گلدی M، سوپرمم مجموعهٔ تمام اعداد اصلی مانند k است به قسمی که M شامل مجموع مستقیم k زیر مدول ناصفر باشد. این سوپرمم یک عدد اصلی است که در اینجا نیز با $\mathrm{Gdim}\ M$ نشان داده می‌شود. یک علت عدم توجه به حالت کلی ممکن است سختی کارکردن با اعداد اصلی باشد. از طرفی این پرسش نیز مطرح بوده است که آیا در Rـ مدول M با بعد گلدی a یک جمع مستقیم از a زیر مدول ناصفر وجود دارد یا خیر؟

دانس و فوکس مشترکاً نشان داده‌اند که برای دستهٔ بزرگی از اعداد اصلی که در اینجا از ذکر جزئیات آن صرف نظر می‌شود پاسخ این پرسش مثبت است [۵].

مفهوم بعد گلدی را می‌توان برای هر شبکهٔ مدولی تعریف کرد که بی‌جهت نمی‌دانیم به اختصار به توضیح آن بپردازیم. ابتدا چند تعریف را یادآوری می‌کنیم.

تعریف. شبکه، یک چهارتایی است مانند $\mathcal{L} = (L, \le, \vee, \wedge)$ که در آن $(L, \le)$ یک مجموعهٔ نیم مرتب است، و $\vee$ و $\wedge$ اعمال دوتایی هستند که در قوانین زیر صدق می‌کنند.

$$a \vee b \le d \iff (a \le d \,\&\, b \le d)$$
$$c \le a \wedge b \iff (c \le a \,\&\, c \le b)$$

$a \vee b$ و $a \wedge b$ را به ترتیب سوپرمم و اینفیمم a و b می‌نامیم.

در شبکه‌ها همواره فرض می‌کنیم ۰ و ۱ متعلق به L وجود دارند به قسمی که به ازای هر a متعلق به L

$$0 \le a \quad \text{و} \quad a \le 1$$

همچنین اگر a و b عناصر L باشند قرار می‌دهیم

$$[a,b] = \{x \in L : a \le x \le b\}$$

به وضوح $[a,b]$ یک زیر شبکهٔ L است و $L=[0,1]$.

تعریف. شبکهٔ $\mathcal{L} = (L, \le, \vee, \wedge)$ را مدولی می‌نامیم هرگاه

$$c \le b \Longrightarrow b \wedge (c \vee d) = c \vee (b \wedge d)$$

مثال. اگر M یک Rـ مدول باشد، در این صورت $\mathcal{L} = (L, \subseteq, \vee, \wedge)$ که در آن L مجموعهٔ تمام زیر مدولهای M است و

$$A \wedge B = A \cap B \qquad A \vee B = A + B$$

یک شبکهٔ مدولی است.

تعریف. گیریم $\mathcal{L} = (L, \le, \vee, \wedge)$ یک شبکهٔ مدولی و a یک عنصر L باشد. گوییم a در L بزرگ است اگر به ازای هر عنصر ناصفر L مانند x داشته باشیم $a \wedge x \neq 0$. چنانچه هر عنصر ناصفر L در $\mathcal{L}$ بزرگ باشد $\mathcal{L}$ را یک شبکهٔ یکنواخت می‌نامیم.

تعریف زیرمجموعهٔ $I \subseteq L - \{0\}$ را مستقل توأم می‌نامیم هرگاه به ازای هر زیر مجموعهٔ نامتناهی I مانند X، اگر x یک عنصر $I - X$ باشد داشته باشیم $\vee X \wedge x = 0$ که در آن $\vee X$ سوپرمم تمام عناصر مجموعهٔ متناهی X است.

قضیه (گرسوزک ـ پوزیلوسکی) [۸]. چهار شرط زیر در مورد شبکهٔ $\mathcal{L} = (L, \le, \vee, \wedge)$ هم‌ارز هستند.

یکم) L شامل هیچ مجموعهٔ نامتناهی مستقل توأم نیست،

دوم) L شامل یك مجموعهٔ مستقل توأم $\{a_۱, a_۲, \ldots, a_n\}$ است به قسمی که $a_۱ \vee a_۲ \ldots \vee a_n$ در $\mathcal{L}$ بزرگ است و شبکه‌های $[۰, a_i]$ برای هر $۱ \leq i \leq n$ یکنواخت است،

سوم)

$$\sup\{k : \text{شامل زیرمجموعه‌ای مستقل توأم با } k \text{ عنصر است } L\} = n$$

چهارم) برای هر دنبالهٔ $\ldots \leq a_۲ \leq a_۱$ از عناصر L یك j وجود دارد که به ازای هر $k \geq j$، a_j در $[۰, a_k]$ بزرگ است.

عدد n در قسمت سوم قضیهٔ فوق را بعد گلدی شبکهٔ $\mathcal{L}$ می‌نامیم.

مراجع

1. F. W. Anderson and K. R. Fuller, *Rings and Categories of Modules*, Springer - Verlag (1974).
2. K.E.Asano, "Arithemetische Idealtheorie innichtkcommutiven Ringen" *Japan.J.Math*, **15** (1939)1-36.
3. V.P.Camilo, "On a conjecture of Herstein", *J.Algebra*, **50**(1978) 274-275.
4. R.Croisot, L.Lesieur, "Sur les anneaux premier a gauch," *Ann. Sci.E'col Norm.Sup.*, **76** (1959)161-183.
5. J.Dauns and L.Fuchs., "Infinite Goldie dimension," *J.Algebra*, **155**(1988)297-302.
6. A.W.Goldie, "The structure of prime rings under ascending chain conditions,"*Proc.London Math.Soc.*,VIII(1958)589-608.
7. A.W.Goldie,"Semiprime rings with maximum condition," *Proc. London Math.Soc.*, X(1960)201-220.
8. P. Grzesczuk, and E. R. Puczylowski,"On infinite Goldie dimension of modular lattices and modules,"*J. Pure Applied Algebra*, **35** (1985) 151-155.
9. R.E.Johnson, "The extended centeralizer of a module,"*Proc. Amer.Math.Soc*,**2**(1951)891-895.
10. J.Lambek:"On the structure of semiprime rings and their rings of quotients,"*Cand.J.Math*.**13**(1961)237-244.
11. J. C-MConell and J. C. Robson, *Noncommutative Noetherian Rings*, J. Wiley & Sons (1987).
12. O. Ore, "Linear equation in non commutative fields." *Ann.of Math.*,**32** (1930) 463-477.
13. R.Peinado,"Note on modules", *Math.Mag.*, **37**(1964)266-267.
14. L.Rowen, *Ring Theory*, vol 1 Academic Press (1988).
15. B.Stenström,*Rings of Quotients.*,Springer Verlag (1975).
16. Y.Utumi,"On quotient rings," *Osaka Math.J.*,(1956)8-18.

۱۷. معتمدی،م.آشنایی با نظریهٔ حلقه‌ها.اهواز.انتشارات دانشگاه شهید چمران.۱۳۶۷.

****

★ منصور معتمدی، بخش ریاضی دانشگاه اهواز