نشر ریاضی، سال ۱۳، شمارهٔ ۲، صص. ۷-۹

نظری به هومولوژی دوری ناوردا•

مسعود خلخالی*

می‌دانیم که در گذار از چارچوبهای جابه‌جایی به ناجابه‌جایی، هومولوژی [مانستگی] دوری جایگزین کوهومولوژی [همانستگی] دُرام می‌شود. به‌عنوان مثال، طبق قضیه‌ای از کُن [۷] هومولوژی دوری تناوبیِ جبر تابعهای هموار روی یک خمینهٔ هموار با کوهومولوژی دُرام آن خمینه یکریخت است. یکی از انگیزه‌های شواله و ایلنبرگ [۲] برای معرفی کوهومولوژی دُرام ناوردا این بود که بین هومولوژی دُرامِ یک گروه لی و کوهومولوژی جبر لیِ آن گروه رابطه‌ای ایجاد کند.

در این نوشتهٔ توصیفی کوتاه می‌خواهیم شرح مختصری در بارهٔ همتایِ ناجابه‌جاییِ کوهومولوژی دُرام ناوردا، که هومولوژی دوری ناوردا[۱] نام دارد، با استفاده از [۹] بیاوریم. یک هدف ما درک کوهومولوژی دوری جبر هوپف که کُن و مسکوویچی تعریف کرده‌اند [۴، ۵، و ۶] و نظریهٔ دوگان آن [۱۱] به‌عنوان نمونه‌هایی از هومولوژی دوری ناورداست. شرح کامل این موضوع را می‌توان در [۹] یافت. شرحی در بارهٔ هومولوژی دوری یکسان‌وردا[۱]ی جبر هوپف در [۱] آمده است. این دو نظریه در واقع مرتبط به هم‌اند. هومولوژی دوری ناوردا، به‌معنایی، صورتی موضعی از هومولوژی یکسان‌ورداست.

۱. تقارن در هندسهٔ ناجابه‌جایی

نقطهٔ آغاز هندسهٔ ناجابه‌جاییِ آلن کُن، ایدهٔ آشنای دوگانی میان جبر جابه‌جایی و هندسه است:

$$\{\text{جبرهای جابه‌جایی}\} \longleftrightarrow \{\text{فضاها}\}$$

$$X \longmapsto F(X) = X \text{ جبر تابعها روی}$$

$$(\text{طیف A})\,\mathrm{Spec}(A) \leftarrow A$$

این ایدهٔ کلی در شاخه‌های مختلفی از ریاضیات به صورت قضیه‌های خاص دقیق ظاهر می‌شود. به عنوان نمونه، سه مثال ارائه می‌کنیم:

(i) در آنالیز تابعی، قضیهٔ گلفاند–نایمارک [۸] بیانگر یک پادهم‌ارزی[۲] میان ردهٔ فضاهای هاوسدُرف فشرده و توابع پیوستهٔ بین آنها با ردهٔ C^*-جبرهای جابه‌جایی است. در این تناظر، به فضای X، C^*-جبر جابه‌جایی $C(X)$ متشکل از تابعهای پیوسته با مقدار مختلط روی X را نسبت می‌دهیم و بالعکس، به هر C^*-جبر، $\mathrm{Spec}(A)$ یعنی فضای ایده‌آلهای ماکسیمال A با توپولوژی طبیعی آن نظیر می‌شود.

(ii) در جبر جابه‌جایی، قضیهٔ صفر[۱] هیلبرت یک پادهم‌ارزی میان ردهٔ واریته‌های جبری مستوی روی یک میدان جبری‌-بستهٔ F و ردهٔ F-جبرهای مستوی ارائه می‌کند (برای ملاحظهٔ اثباتی از این قضیه برای میدانهای ناشمارا که شباهت چشمگیری به اثبات قضیهٔ گلفاند–نایمارک دارد، به [۳] رجوع کنید.)

(iii) فرض کنید X یک فضای هاوسدُرف فشرده باشد. قضیهٔ سر–سوآن [۸] بیانگر یک هم‌ارزی میان ردهٔ کلافهای برداری مختلط روی X و ردهٔ $C(X)$-مدولهای افکنشیِ متناهی‌مولد است. به هر کلاف برداری E، $C(X)$-مدول $\Gamma(E)$ متشکل از مقاطع سراسری پیوستهٔ E نسبت داده می‌شود.

بدین ترتیب، طبیعی است که رده‌های گوناگون جبرهای ناجابه‌جایی را شواهد وجودِ رده‌هایی از فضاهای ناجابه‌جایی یا کوانتومی تلقی کنیم که هنوز وجودِ بالفعل ندارند.

چگونه می‌توان مفهوم تقارن را در هندسهٔ ناجابه‌جایی صورتبندی کرد؟ نخست خاطرنشان می‌کنیم که می‌توان خود مفهوم گروه را به صورت جبر هوپف یا، به مفهومی محدودتر، به صورت گروه کوانتومی، کوانتیزه کرد. یادآوری می‌کنیم که یک جبر هوپف روی میدان F از یک F-جبر شرکت‌پذیر و یکدار H مجهز به نگاشتهای خطی $\Delta : H \to H \otimes H$، $\epsilon : H \to F$ و $S : H \to H$، به ترتیب موسوم به پادضرب[۲]، پادواحد[۳]، پادپا[۴]، تشکیل شده است که در آن Δ پادشرکت‌پذیر است، ϵ پادواحد است، و به‌ازای هر $h \in H$، رابطهٔ $\sum S(h^{(1)})h^{(2)} = \sum h^{(1)}S(h^{(2)}) = \epsilon(h)1_H$ برقرار است. در اینجا $\Delta(h)$ را به $\sum h^{(1)} \otimes h^{(2)}$ نمایش داده‌ایم. مفاهیم معمولی جبر، مانند شرکت‌پذیری، جابه‌جایی‌بودن، یکداربودن، مدول، مدول مضاعف[۵]، ... را می‌توان به سهولت به جبرهای هوپف تعمیم داد به این ترتیب که ویژگیهای جبری مورد نظر را به صورت نمودارهای جابه‌جایی نشان می‌دهیم و سپس جهت پیکانها را معکوس می‌کنیم [۱۴]. در اینجا چند

1. equivariant 2. anti-equivalence

1. Nullstellensatz 2. co-multiplication 3. co-unit 4. antipode 5. bimodule

مثال از جبرهای هوپف می‌آوریم و بالاخص خاطرنشان می‌کنیم که چگونه گروهها و جبرهای لی منجر به پیدایش جبرهای هوپف می‌شوند.

(الف) فرض کنید G یک گروه باشد و $H = FG$ جبر-گروه آن روی میدان F. حال Δ، ϵ، و S را به صورت $\Delta(g) = g \otimes g$ و $\epsilon(g) = 1$ و $S(g) = g^{-1}$، به‌ازای هر $g \in G$، تعریف می‌کنیم. به سادگی می‌توان تحقیق کرد که H یک جبر هوپف است.

(ب) فرض کنید $\mathfrak{g}$ یک جبر لی روی میدان F باشد و $H = \mathrm{U}(\mathfrak{g})$ جبر پوششی $\mathfrak{g}$. طبق تعریف، $H = T(\mathfrak{g})/I$ که در آن $T(\mathfrak{g})$ جبر تانسوری فضای برداری $\mathfrak{g}$ است و I ایده‌آل دو طرفهٔ ایجاد شده توسط عناصر به‌شکل $x \otimes y - y \otimes x - [x, y]$؛ و x و y در $\mathfrak{g}$اند. حال Δ، ϵ، و S را به‌صورت $\Delta(g) = 1 \otimes g + g \otimes 1$، $\epsilon(g) = 0$ و $S(g) = -g$، به‌ازای هر $g \in \mathfrak{g}$، تعریف می‌کنیم. و باز می‌توان تحقیق کرد که H یک جبر هوپف است.

(ج) فرض کنید G یک گروه جبری مستوی روی یک میدان جبری-بستهٔ F باشد و $H = F[G]$ حلقهٔ مختصاتی G. با گرفتن دوگان نسبت به‌نگاشتهای ضرب، واحد و وارون، یعنی $G \times G \to G$، $\{1\} \to G$، و $G \to G$، می‌توان پادضرب $\Delta : F[G] \to F[G \times G] = F[G] \otimes F[G]$، $\epsilon : F[G] \to F$ و $S : F[G] \to F[G]$ را به‌ترتیب تعریف کرد. می‌توان تحقیق کرد که H یک جبر هوپف است.

مثالهای (الف) و (ب) پاد جابه‌جایی هستند و مثال (ج)، جابه‌جایی. مثال بعدی از این‌رو جالب توجه است که نه جابه‌جایی است و نه پاد جابه‌جایی، و در واقع یکی از اولین مثالهای گروه کوانتومی است.

(د) جبر هوپف $H = A(SL_q(2, F))$ یا به‌اصطلاح «حلقهٔ مختصاتی» گروه کوانتومی $SL_q(2, F)$ به‌این صورت تعریف می‌شود: فرض کنید $q \in F$ ناصفر باشد و یک ریشهٔ واحد نیز نباشد. H به‌عنوان جبر به‌وسیلهٔ علامتهای x، u، v، و y با روابط زیر تولید می‌شود.

$$ux = qxu, vx = qxv, yu = quy, yv = qvy,$$

$$uv = vu, xy - q^{-1}uv = yx - quv = 1$$

ضرب، پادواحد و پادبای H به‌صورت زیر تعریف می‌شوند

$$\Delta \begin{bmatrix} x & u \\ v & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & u \\ v & y \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} x & u \\ v & y \end{bmatrix}$$

$$\epsilon(x) = \epsilon(y) = 1, \ \epsilon(u) = \epsilon(v) = 0,$$

$$S(x) = y, \ S(y) = x, \ S(u) = -qu, \ S(v) = q^{-1}v$$

برای ملاحظهٔ تفصیل مطالب به [۱۲] مراجعه کنید.

اکنون می‌توانیم مفهوم اصلی این بخش، یعنی کنش یک جبر هوپف را برروی یک جبر، معرفی کنیم. گیریم H یک جبر هوپف و A یک جبر باشد. گوییم A یک جبر H-پادمدول است اگر A یک H-پادمدول باشد و نگاشت ساختاری $\rho : A \to H \otimes A$ یک ریختار [مورفیسم] جبرها باشد. به‌عنوان مثال، کنش یک گروه جبری G روی واریتهٔ V را می‌توان به این صورت بیان کرد که بگوییم $A = F[V]$ یک $H = F[G]$ جبر پادمدول است. نگاشت ساختاری $A \to H \otimes A$ دوگان کنش $G \times V \to V$ است. به‌طریق مشابه، A را یک جبر H-مدول می‌نامیم اگر A یک H-مدول باشد و نگاشت ساختاری $H \otimes A \to A$ یک ریختار جبرها باشد. به‌عنوان مثال، اگر گروه G روی جبر A به‌صورت یکریختی‌ها عمل کند، A یک جبر $H = FG$-مدول است.

۲. کوهومولوژی دوری یا همتای ناجابه‌جایی هومولوژی دُرام

کوهومولوژی دوری در [۷]، و نیز مستقلاً توسط تسیگان[1]، معرفی شد. در این بخش، تعریف کوهومولوژی دوری جبرهای شرکت‌پذیر (توپولوژیک) و نیز کوهومولوژی دوری جبرهای هوپف را یادآوری می‌کنیم [۴، ۵، ۶] و همچنین به‌نظریهٔ دوگان مربوط می‌پردازیم. نظریه‌های اخیر قرابت چندانی با نظریه‌های دوری جبرها ندارند. نکتهٔ اصلی این مقاله این است که، به‌تبعیت از [۹]، نشان دهیم که هومولوژی دوری جبرهای هوپف را می‌توان به‌عنوان هومولوژی (به‌ترتیب، کوهومولوژی) ناوردای جبرها (به‌ترتیب، پاد جبرها) تعبیر کرد. کتاب [۱۳] مرجعی برای هومولوژی دوری جبرهاست.

فرض کنید A یک جبر شرکت‌پذیر باشد و $C^n(A)$ فضای تابعکهای $(n+1)$-خطی $\varphi : A^{\otimes(n+1)} \to \mathbb{C}$ روی A. اگر $C^n_\lambda(A) \subset C^n(A)$ فضای تابعکهای دوری یعنی آن φهایی باشد که

$$\varphi(a_n, a_0, a_1, \dots a_{n-1}) = (-1)^n \varphi(a_0, a_1, \dots, a_n)$$

عملگر $b : C^n(A) \to C^{n+1}(A)$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$(b\varphi)(a_0, \dots, a_{n+1}) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \varphi(a_0, \dots, a_i a_{i+1}, \dots, a_{n+1})$$
$$+ (-1)^{n+1} \varphi(a_{n+1}a_0, a_1, \dots, a_n)$$

می‌توان تحقیق کرد که $b^2 = 0$. آلن کن به این کشف قابل توجه دست یافت که $(C^{\cdot}_\lambda(A), b)$ در واقع یک زیر مجتمع[2] $(C^{\cdot}(A), b)$ است. کوهومولوژی مجتمع اول را کوهومولوژی دوری A می‌خوانند و به $HC^{\cdot}(A)$ نمایش می‌دهند، وکوهومولوژی مجتمع دوم را کوهومولوژی هوخشیلد[3] A (با ضرایب در A^*) می‌نامند و به $HH^{\cdot}(A)$ نمایش می‌دهند.

مثال. فرض کنید M یک خمینهٔ بستهٔ هموار باشد و $V \subset M$ یک زیرخمینهٔ بستهٔ n بعدی. تابعک خطی زیر را در نظر بگیرید

$$\varphi(f_0, f_1, \dots, f_n) = \int_V f_0 df_1 \cdots df_n$$

می‌توان به‌آسانی (به‌کمک فرمول استوکس) تحقیق کرد که φ یک n-دور دوری روی $A = C^\infty(M)$ است. این مثال به صراحت رابطهٔ نزدیک جریان[4]های درام روی خمینهٔ M و کوهومولوژی $A = C^\infty(M)$ را نشان می‌دهد. در واقع، طبق قضیه‌ای اساسی از کن [۷]، برای $A = C^\infty(M)$ داریم

$$HC^n(A) \simeq Z_n(M) \oplus_{i \geq 1} H^{dR}_{n-2i}(M)$$

که در اینجا Z_n فضای n-جریان‌های درام بسته روی M است و H^{dR} هومولوژی درام جریانهاست.

هومولوژی دوری جبرها(ی توپولوژیک) نظریه‌ای مبسوط است که پیامدهای عمیق و پیوندهای بسیار با بخشهایی از آنالیز، توپولوژی و جبر

1. B. Tsygan 2. subcomplex 3. Hochschild 4. current

دارد (نظریهٔ شاخص[1]، نظریهٔ K، حدس نویکوف، نظریهٔ Kی جبری) [۶، ۸، ۱۳]. در چند سال اخیر یک نظریهٔ هومولوژی دوری جدید توسط کن و مسکوویچی تعریف شده است [۴، ۵، ۶] که تفاوتهای بنیادی با نظریهٔ هومولوژی دوری جبرها دارد و شالوده‌های جبری آن بسیار پیچیده‌ترند. ما در [۱۱] نظریهٔ دوگان این را برای جبرهای هوپف تعریف کردیم. هر دو نظریه را می‌توان برحسب وجود نگاشت سرشتی جامع[2] برای کنش جبرهای هوپف درک کرد. در [۹] ما رهیافت متفاوتی نسبت به این نظریه‌ها یافتیم که از هومولوژی درام ناوردا منبعث می‌شود. ما نخست یک همتای ناجابه‌جایی برای کوهومولوژی درام ناوردا [۲] تعریف می‌کنیم. این نظریه را هومولوژی دوری ناوردا نام گذارده‌ایم. سپس نشان می‌دهیم که هومولوژی دوری یک جبر هوپف H دقیقاً هومولوژی دوری ناوردای جبر H نسبت به کنش طبیعی (به‌وسیلهٔ انتقال) H روی خود آن است. این رهیافت شباهت قابل ملاحظه‌ای به‌روش استخراج کوهومولوژی جبرهای لی به‌عنوان کوهومولوژی درام ناوردای گروه لی آن توسط شواله و ایلنبرگ، دارد [۲].

۳. هومولوژی دوری ناوردا

تعریف. مقصود از یک سه‌تایی چپ هوپف، یک سه‌تایی (A, H, M) است که در آن H یک جبر هوپف، A یک جبر Hـ پادمدول چپ، و M یک Hـمدول چپ است.

یک مثال ذی‌ربط، سه‌تایی (H, M, M) است که در آن پاد کنش H روی $A = H$ از طریق پاد ضرب $\Delta : H \to H \otimes H$ است (این همتای ناجابه‌جایی کنش گروه روی خود از طریق انتقال چپ است.)

در [۱۱] به هر سه‌تایی هوپف (A, H, M) یک مدول دوری نسبت می‌دهیم (برخی فرضهای فنی در اینجا لازم می‌آید. برای سهولت توصیف فرض می‌کنیم $S^2 = id_H$). یادآوری می‌کنیم که یک مدول دوری، یک مدول سادکی[3] M_n، $n \geq 0$، است مجهز به یک کنش گروه دوری $\mathbb{Z}/(n+1)\mathbb{Z}$ روی M_n، $\tau_n : M_n \to M_n$، به‌طوری که برخی روابط اضافی نیز برقرارند (برای تعریف دقیق، ر.ک. [۱۳]). قرار می‌دهیم

$$C_n(A, M) = M \otimes A^{\otimes(n+1)}$$

نخست یک ساختار مدول پَرادوری[4] روی $C_n(A, M)$، $n \geq 0$، وضع می‌شود، و سپس یک Hـپادکنش چپ $\rho : C_n(A, M) \to H \otimes C_n(A, M)$ تعریف می‌شود که القا شده از Hـپادکنش روی A است. مدول زنجیره‌های ناوردا روی A فضای پادناورداهای این پادکنش است:

$$C_n^H(A, M) = \{x \in C_n(A, M) | \rho(x) = 1 \otimes x\}$$

در این زمینه، نتایج زیر نقش اساسی دارند (برای اثباتها، ر.ک. [۹]).

قضیه. فرض کنید (A, H, M) یک سه‌تایی هوپف باشد، در این صورت $C_n^H(A, M)$، $n \geq 0$، یک مدول دوری است.

قضیه. مدول دوری سه‌تایی هوپف (H, H, F) با مدول دوری منسوب به H یکریخت است [۱۱].

برای اثبات اینکه مدول پاددوری یک جبر هوپف به مفهوم موردنظر کن-مسکوویچی را می‌توان از طریق فرایند مشابهی به‌دست آورد، باید یک نظریهٔ هومولوژی دوری ناوردا برای پادجبرها بنا کرد. این موضوع و نتایج بسیار دیگر در [۹] آمده است.

1. index theory
2. universal characteristic map
3. simplicial module
4. paracyclic

مراجع

1. R. Akbarpour, and M. Khalkhali, "Hopf algebra equivariant cyclic homology and cyclic homology of crossed product algebras," To appear in *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*.
2. C. Chevalley, S. Eilenberg, "Cohomology theory of Lie groups and Lie algebras", *Tran. Amer. Math. Soc.*, **63** (1948) 85-124.
3. N. Chriss, and V. Ginzburg, *Representation Theory and Complex Geometry*, Birkhäuser (1997).
4. A. Connes, and H. Moscovici, "Cyclic cohomology and Hopf algebra symetry", Conference Moshe Flato 1999 (Dijon), *Lett. Math. Phys.*, (1) **52** (2000) 1-28.
5. A. Connes, and H. Moscovici, "Cyclic cohomology and Hopf algebras". Moshe Flato (1973-1998), preprint.
6. A. Connes, and H. Moscovici, "Hopf algebras, cyclic cohomology and the transverse index theorem", *Comm. Math. Phys.*, (1) **198** (1998) 199-246.
7. A. Connes, "Noncommutative differential geometry", *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, **62** (1985) 257-360.
8. M. Gracia-bondia, J. Varilly, and H. Figueroa, *Elements of Noncommutative Geometry*, Birkhäuser (2001).
9. M. Khalkhali, and B. Rangipour, "Invariant cyclic homology", preprint.
10. M. Khalkhali, and B. Rangipour, "On the generalized cyclic Eilenberg-Zilber theorem", To appear in *Canadian Mathematical Bulletin*.
11. M. Khalkhali, and B. Rangipour, "A new cyclic module for Hopf algebras", To appear in *K-Theory*.
12. A. Klimyk, and K. Schmüdgen, *Quantum Groups and Their Representations*, Texts and Monographs in Physics, Springer-Verlag, Berlin (1997).
13. J. L. Loday, *Cyclic Homology*, Springer-Verlag (1992).
14. M. E. Sweedler, *Hopf Algebras*, Benjamin (1969)

* * * * * *

* مسعود خلخالی، بخش ریاضی دانشگاه انتاریوی غربی، کانادا

masoud@uwo.ca

نویسندهٔ این مقاله از همیاری استاد دکتر شهشهانی در ترجمهٔ اصل مقاله به زبان فارسی و نیز از علاقهٔ ایشان به این موضوع که مشوق نویسنده در نوشتن این مقاله بوده است، کمال تشکر را دارد.