نشر ریاضی، سال ۱۴، شمارهٔ ۲، صص ۱۷-۲۴

گروههای کاکستر

محمد جلوداری‌ممقانی*

۱. مقدمه

مطالعهٔ گروههای کاکستر در اصل به بررسی انتظام و تقارنهای شکلهای هندسی از جمله پنج جسم افلاطونی مربوط است. برخی بر این عقیده‌اند که هدف اقلیدس از نگارش اصول تدوین کتابی در مورد اجسام افلاطونی برای مبتدیان بوده است [۱]. از این منظر می‌توان گفت که مطالعهٔ ویژگیهای عمل گروههای کاکستر (به‌عنوان کلیترین حالت گروههای انعکاسی) بر فضای کروی، اقلیدسی و یا هذلولوی، هدف اقلیدس را برآورده می‌کند و به‌علاوه، این گروهها کاربردهای وسیعی در ترکیبیات و نظریهٔ گروههای لی یافته‌اند. هدف این مقاله آشنا نمودن خواننده با مبحث گستردهٔ گروههای کاکستر است.

۲. کلایدسکوپ

در این بخش با روش دانلد کاکستر برای ساختن گروههای تقارن آشنا می‌شویم.

وقتی جسمی را در جلو آینه‌ای قرار می‌دهیم دو شیء دیده می‌شوند: جسم و تصویرش. اگر بتوانیم به داخل آینه برویم باز هم همان دو شیء را می‌بینیم، زیرا تصویر تصویر همان جسم اولیه است. به بیان دیگر یک انعکاس تنهای R، گروهی مرتبهٔ ۲ با اعضای I و R تولید می‌کند. این گروه عضو دیگری ندارد زیرا $R^2 = I$ و بنابراین $R^{-1} = R$. می‌توان به‌جای یک آینهٔ مسطح در فضا یک آینهٔ خطی در صفحه یا یک آینهٔ نقطه‌ای در خط به‌کار برد. نقطه خط را به دو نیم‌خط یا به دو شعاع تقسیم می‌کند و به‌عنوان آینه‌ای که شعاعی را به شعاع دیگر تبدیل می‌کند عمل می‌نماید.

اما وقتی شیء بین دو آینهٔ موازی قرار داده شود به لحاظ نظری تعداد تصاویر بینهایت می‌شود، زیرا تصویر هر تصویر، تصویر دیگری از جسم است و الی آخر. آینه‌ها خود بینهایت تصویر دارند: آینه‌های مجازی که مانند آینه‌های واقعی عمل می‌کنند. به بیان دیگر دو انعکاس موازی R_1 و R_2 گروهی را تولید می‌کنند که اعضای آن عبارت‌اند از

$$I, R_1, R_2, R_1R_2, R_2R_1, R_1R_2R_1, R_2R_1R_2, \cdots$$

شکل ۱

در این گروه که به حاصلضرب آزاد دو گروه مرتبهٔ ۲ موسوم است روابط زیر برقرارند

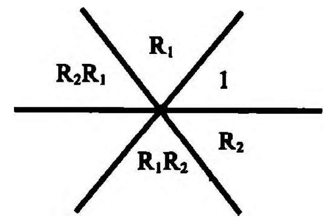
$$R_1^2 = R_2^2 = 1$$

همچنین می‌توان R_1 و R_2 را انعکاسهایی نسبت به دوخط موازی در صفحه یا نسبت به دو نقطه بر خط تلقی کرد. این دو نقطه و تصویرهای آنها (در آینه‌های مجازی) خط را به بینهایت پاره‌خط مساوی تقسیم می‌کنند که به‌صورت زیر با اعضای گروه در ارتباط‌اند. پاره‌خط واصل بین دو نقطهٔ داده شده (ناحیهٔ اشیاء ممکن) را به عضو همانی گروه یعنی ۱ نسبت می‌دهیم و هر پاره‌خط دیگر را به عضوی از گروه نسبت می‌دهیم که پاره‌خط ۱ را به این پاره‌خط تصویر می‌کند (شکل ۱).

بنا به تعریف، نقطه را با تمام تصویرهای آن هم‌ارز می‌نامیم. بنابراین هر نقطه بر خط (ازجمله، نقاط انتهایی پاره‌خط‌ها) هم‌ارز است با نقطه‌ای در ۱ اما هیچ دو نقطهٔ داخلی پاره‌خط هم‌ارز نیستند. بنابراین پاره‌خط ۱ ناحیه‌ای بنیادی برای گروهی است که توسط R_1 و R_2 تولید می‌شود. در نتیجه هیچ دو نقطه‌ای از ۱ بجز نقاط انتهایی آن هم‌ارز نیستند.

دو آینهٔ متقاطع یک کلایدسکوپ[1] (شکل‌نما، شهرفرنگ) معمولی تشکیل می‌دهند. این کلایدسکوپ را می‌توان به‌راحتی با استفاده از دو آینهٔ مربعی هم‌اندازهٔ بدون قاب و یک قطعه نوار چسب به‌طوری که زاویهٔ بین دو آینه قابل تغییر باشد و روی میز به‌صورت ایستاده قرار گیرند ساخت. هر برش افقی از این کلایدسکوپ را یک کلایدسکوپ دوبعدی می‌نامیم. روشن است که در این کلایدسکوپ، انعکاس نسبت به دو خط صورت می‌پذیرد. چون

1. kaleidoscope



شکل۲

تصویرهای هر نقطه (بجز نقطهٔ تلاقی دو آینه) روی یک دایره قرار می‌گیرند، گروه گسسته است اگر و تنها اگر زاویهٔ بین دو آینه مضرب گویایی از π باشد. در این حالت نیز کافی است این زاویه را $\frac{\pi}{p}$ انتخاب کنیم که در آن $p \geq 2$ عددی صحیح و مثبت است. در واقع اگر به‌جای $\frac{1}{p}$ کسر گویای $\frac{j}{p}$ با $j \geq 2$ به‌عنوان ضریب π انتخاب شود آنگاه عددهای صحیح m و n وجود دارند که $\frac{1}{p} = n + m\frac{j}{p}$. بنابراین زاویهٔ یکی از آینه‌های مجازی با یکی از آینه‌های واقعی $\frac{\pi}{p}$ است. در نتیجه شیء را بین دو آینه که زاویهٔ آنها $\frac{\pi}{p}$ است قرار می‌دهیم و $2p$ تصویر آن را که هر یک بین دو آینهٔ مجاور قرار دارد مشاهده می‌کنیم. در شکل ۲ این وضع به‌ازای $p = 3$ و بنابراین برای حالتی که زاویهٔ بین دو آینهٔ واقعی $\frac{\pi}{3}$ است نشان داده شده است.

در اینجا گروه حاصل از مرتبهٔ $2p$ است و ناحیهٔ بنیادی آن ناحیهٔ بین دو شعاع حاصل از دو آینهٔ واقعی است. عضوی از گروه که در شکل ذکر نشده است دو نمایش دارد: $R_1R_2R_1$ و $R_2R_1R_2$ به‌ترتیب بسته به اینکه از بالا به آن برسیم یا از پایین. اما این نمایشها بنابر روابط موجود در گروه یعنی

$$R_1^2 = R_2^2 = (R_1R_2)^p = 1$$

برابرند. این گروه را با $[p]$ نشان می‌دهیم. حالت $[\infty]$ را می‌توان با در نظر گرفتن pای دلخواه و کمان مناسبی از دایره به‌عنوان ناحیهٔ بنیادی گروه حاصل و میل دادن p به بینهایت توجیه کرد. بنابراین به‌ازای $p = \infty$ شکل ۱ را به‌دست می‌آوریم. به همین ترتیب کالیدسکوپ‌های nبعدی و بنابراین گروههای تولیدشده توسط آنها را می‌توان تعریف کرد. برای اطلاع بیشتر به [۱] مراجعه کنید. گروههایی که کاکستر به این ترتیب به‌دست آورده است بخشی از خانوادهٔ وسیعی از گروهها هستند که ژاک تیتز آنها را در دههٔ هفتم قرن بیستم به افتخار کاکستر گروههای کاکستر نامیده است [۲]. در این دهه تیتز مطالعات گسترده‌ای در مورد گروههای مذکور انجام داد که بخشی از آن در [۳] آمده است.

۳. گروههای کاکستر

در این بخش مفاهیم اولیهٔ وابسته به گروههای کاکستر را می‌آوریم.

تعریف ۱. فرض کنید S مجموعه‌ای ناتهی و W گروهی با عضو خنثای ۱ و نمایش

$$W = \langle S | (ss')^{m(s,s')} = 1; s, s' \in S \rangle$$

باشد، که در آن تابع $m : S \times S \to \mathbb{N} \cup \infty$ در شرایط زیر صدق می‌کند:

۱) به‌ازای هر $s \in S$، $m(s,s) = 1$؛

۲) به‌ازای هر جفت s و s' از اعضای S، $m(s,s') = m(s',s)$.

در این‌صورت (W,S)، W، و S را به ترتیب یک دستگاه کاکستر، یک گروه کاکستر، و مولد کاکستر W می‌نامیم.

توجه می‌کنیم که بنابراین تعریف، مرتبهٔ عضو S در W برابر ۲ است و هنگامی که رابطه‌ای بین s و s' وجود ندارد، قرار می‌دهیم $m(s,s') = \infty$.

به هر دستگاه کاکستر یک گراف برچسب‌دار به نام گراف کاکستر وابسته است که رأسهای آن اعضای S هستند و رأس s به‌وسیلهٔ یالی به رأس s' وصل می‌شود اگر $m(s,s') \geq 3$. بنابراین در یک گراف کاکستر

۱) هیچ رأسی توسط یالی به خودش وصل نمی‌شود؛

۲) اگر $m(s,s') = 2$ آنگاه بین s و s' یالی وجود ندارد.

۳) $m(s,s') \geq 3$ را برچسب یال واصل بین رأسهای s و s' قرار می‌دهیم و معمولاً ۳ را روی یالی که برچسب ۳ دارد نمی‌نویسیم.

اگر گراف کاکستر یک گروه کاکستر همبند باشد، این گروه را تحویل‌ناپذیر می‌نامیم. لازم است قید کنیم که در این نوشته، گروههای کاکستر با مولد متناهی S مورد نظرند و بنابراین فرض می‌کنیم $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$. هر ترتیب روی S دو ماتریس $n \times n$ متقارن M و A را به‌دست می‌دهد. درآیه‌های ماتریس اول که در واقع ماتریس مجاورت گراف کاکستر و موسوم به یک ماتریس کاکستر دستگاه (W,S) است برچسب‌های یالهای گراف کاکسترند و هر جا که بین دو رأس متفاوت یالی وجود ندارد ۲ و در غیر این‌صورت (درآیه‌های روی قطر اصلی) ۱اند. درآیه‌های ماتریس $A = (a_{ij})$ که به ماتریس کسینوسی کاکستر متناظر با M، موسوم است نسبت به‌ترتیب مذکور به‌صورت

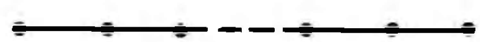
$$a_{ij} = \begin{cases} -\cos \frac{\pi}{m_{ij}} & m_{ij} \neq \infty \\ 1 & m_{ij} = \infty \end{cases}$$

تعریف می‌شوند، که در آن m_{ij} درآیه‌ای در M است. این ماتریسهای متقارن نقش ویژه‌ای در طبقه‌بندی گروههای کاکستر ایفا می‌کنند.

برای مثال، در اثبات قضیهٔ زیر که به طبقه‌بندی گروههای متناهی و تحویل‌ناپذیر کاکستر اختصاص دارد از این ماتریسها استفاده می‌شود.

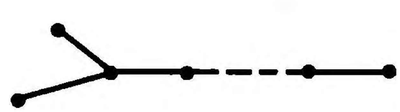
قضیهٔ ۱. هر گراف همبند کاکستر که گروه کاکستر وابسته به آن متناهی باشد متعلق به یکی از گرافهای زیر است:

۱) A_n؛ گروه جایگشتهای $n+1$ حرف، $n \geq 1$؛

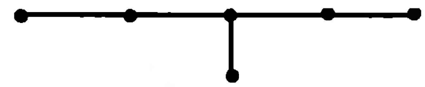


۲) B_n؛ گروه $C_2^n \rtimes \sigma_n$ از مرتبهٔ $2^n n!$، $n \geq 2$؛

۳) D_n؛ گروه $C_2^{n-1} \rtimes \sigma_n$ از مرتبهٔ $2^{n-1} n!$، $n \geq 4$؛



۴) E_6؛ گروه از مرتبهٔ $51840 = 2^{7} \cdot 3^{4} \cdot 5$؛



۵) E_7؛ گروه از مرتبهٔ $2903040 = 2^{10} \cdot 3^{4} \cdot 5 \cdot 7$؛

۶) F_8؛ مرتبهٔ این گروه $696729600 = 2^{14} \cdot 3^{5} \cdot 5^{2} \cdot 7$؛

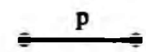
۷) F_4؛ گروه حل‌پذیر مرتبهٔ $1152 = 2^{7} \cdot 3^{2}$؛

۸) C_2؛ گروه دووجهی $C_4 \rtimes C_2$ از مرتبهٔ ۱۲؛

۹) H_3؛ گروه $A_5 \rtimes C_2$ از مرتبهٔ ۱۲۰؛

۱۰) H_4؛ گروه از مرتبهٔ ۱۴۴۰۰؛

۱۱) $I_2(p)$؛ گروه دووجهی $C_p \rtimes C_2$ از مرتبهٔ $2p$.



اثبات. با به‌کار بردن روش حالت به حالت ثابت می‌کنند که ماتریس کسینوسی کاکستر معین مثبت است اگر و تنها اگر گراف کاکستر متناظر با آن متعلق به یکی از گرافهای فوق باشد [۵]. ■

بنابراین تا جایی که به گروههای متناهی که توسط مجموعه‌ای متناهی از انعکاسها تولید می‌شوند مربوط می‌شود ماتریس کاکستر متناظر است با یک گروه کاکستر اگر ماتریس کسینوسی متناظر با آن معین مثبت باشد. پس سؤال طبیعی این است که آیا سایر ماتریسهای کاکستر نیز متناظر با گروههای کاکسترند؟ به‌طوری که در [۲] و [۳] ثابت شده است پاسخ این سؤال مثبت است، یعنی به‌ازای هر ماتریس کاکستر یک گروه کاکستر وجود دارد که ممکن است نامتناهی باشد و یک ماتریس کاکستر آن همان ماتریس داده شده است.

متذکر می‌شویم که به‌طور کلی قضیه‌ای در مورد طبقه‌بندی گروههای کاکستر اثبات نشده است، اما دسته‌های وسیعی از این گروهها از جنبه‌های گوناگونی مورد مطالعه قرار گرفته‌اند. دستهٔ معروفی از این گروهها گروههای هندسی‌اند که توسط کلایدسکوپ‌ها تولید می‌شوند. این گروهها که به گروههای انعکاسی نیز موسوم‌اند بر سه دسته‌اند: گروههای انعکاسی کروی که روی یک کره عمل می‌کنند و بنابراین ناحیهٔ بنیادی آنها بخش محدبی از یک کرهٔ دوبعدی است، گروههای مذکور در قضیهٔ ۱ از نوع گروههای کروی‌اند؛ گروههای انعکاسی اقلیدسی که روی فضاهای اقلیدسی عمل می‌کنند و بنابراین ناحیهٔ بنیادی آنها بخش محدبی از فضای اقلیدسی مربوط است، و سرانجام گروههای انعکاسی هذلولوی که روی فضاهای هذلولوی عمل می‌کنند. برای اطلاعات بیشتر به [۶] مراجعه کنید.

گروههای

$$W = \langle a, b, c | a^{2} = b^{2} = c^{2} = (ac)^{p} = (bc)^{q} = (ca)^{r} = 1 \rangle$$

که در آن p، q، r اعداد صحیح و مثبت‌اند، کروی، اقلیدسی، یا هذلولوی‌اند هرگاه

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$$

به‌ترتیب بزرگتر از، مساوی با، یا کوچکتر از ۱ باشد ([۴] و [۵]).

در حالت کلی، این گزاره که به‌ازای هر فضای هذلولوی H^n گروه کاکستری هست که روی آن با ایزومتری عمل می‌کند نادرست است ([۴] و [۶]). گروههای کاکستر جبری بسیاری وجود دارند که به هیچ‌یک، از این دسته‌ها تعلق ندارند.

هرگروه کاکستر (W, S) دارای زیرگروههای خاصی موسوم به زیرگروههای سهموی است که در مطالعهٔ هندسی گروههای کاکستر اهمیت بسزایی دارند. به‌طور مشخص، هرگاه $S' \subset S$ و W' توسط S' تولید شود می‌گوییم W' یک زیرگروه سهموی W است. بین دستگاههای کاکستر و زیرگروههای سهموی رابطهٔ نزدیکی وجود دارد:

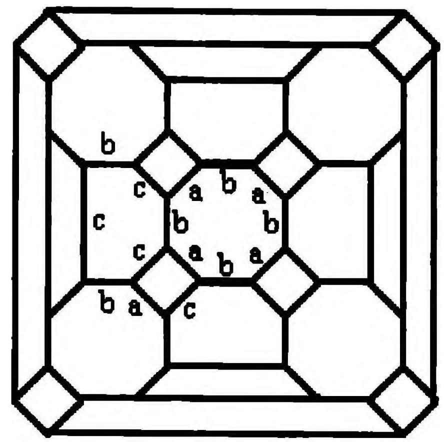
گزارهٔ ۱ فرض کنید (W, S) یک دستگاه کاکستر باشد، $S' \subset S$، و W' توسط S' تولید شود. در این‌صورت (W', S') یک دستگاه کاکستر است.

اثبات. به [۷] مراجعه کنید. ■

۴. تابع رشد، سری رشد و مشخصهٔ اویلر

یکی از مسأله‌های مهم نظریهٔ ترکیبیاتی گروهها «مسألهٔ واژه» است. صورتی از این مسأله در مورد گروههای کاکستر از این قرار است: به‌ازای دستگاه کاکستر (W, S) آیا الگوریتمی وجود دارد که به‌ازای هر واژهٔ $w \in S^*$ تعیین کند که این واژه معرف عضو خنثای گروه W هست یا نیست؟ البته این مسأله در حالت کلی حل‌پذیر نیست (برای اطلاعات بیشتر رجوع کنید به [۹]). اما در مورد گروههای کاکستر حل‌پذیر است [۱]. راه‌حلهای عملی این مسأله موجب شده‌اند مفاهیمی چون رشد[1] و همرشد[2] گروه نه تنها در نظریهٔ مذکور که در نظریه‌های احتمالاتی گروهها و نظریهٔ گامهای تصادفی روی گروهها و گرافها، اعتبار فراوانی کسب کنند (رجوع کنید به [۱۹] و مرجعهای آن). در این بخش به مفهوم رشد گروههای کاکستر و سری رشد این گروهها با استفاده از مفهوم گراف کیلی می‌پردازیم و رابطهٔ آن را با مشخصهٔ اویلر گروه داده‌شده بیان می‌کنیم. از آنجا که رشد رابطهٔ نزدیکی با حجم و این یکی قرابت ویژه‌ای با مفهوم فاصله دارد نخست به مفهوم فاصله روی گروه می‌پردازیم [۲۱].

1. growth 2. cogrowth



شکل۳

تعریف ۲. فرض کنید (W,S) یک دستگاه کاکستر باشد که در آن S مجموعه‌ای متناهی است و شامل عضو خنثای گروه نیست. منظور از گراف کیلی W نسبت به S گرافی است که رأسهای آن اعضای Wاند و بین دو عضو g و h یالی رسم می‌شود اگر و تنها اگر $g^{-1}h \in S$.

روشن است که گراف کیلی متناهی است اگر و فقط اگر گروه W متناهی باشد.

مثال ۱. در شکل ۳ گراف کیلی گروه متناهی

$$W=\langle a,b,c \mid a^2=b^2=c^2=(ab)^4=(bc)^3=(ca)^2=1\rangle$$

را که به ردهٔ B_3 تعلق دارد رسم کرده‌ایم.

برای تبدیل W به یک فضای متری ابتدا لازم است مفهوم فاصلهٔ دو عضو دلخواه از آن را تعریف کنیم.

تعریف ۳. به‌ازای هر عضو $w\neq 1$ از گروه کاکستر W با مولد متناهی کاکستر S، طول w نسبت به S را با $|w|_S$ و یا اگر ابهامی در میان نباشد با $|w|$ نشان می‌دهیم و آن را به‌صورت

$$|w| = \inf\{l \mid w = s_1 s_2\cdots s_l,\ s_i\in S,\ 1\le i\le l\}$$

تعریف می‌کنیم.

طول عضو خنثای W را برابر با صفر تعریف می‌کنیم. اگر g و h دو عضو از W باشند فاصلهٔ آنها نسبت به S را با $d_S(g\cdot h)$ نشان می‌دهیم و به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$d_S(g\cdot h)=|g^{-1}h|$$

به‌آسانی دیده می‌شود که اگر W، S و d طبق تعریف فوق داده شده باشند آنگاه d یک متریک بر W است و تحت ضرب از طرف چپ ناورداست.

از مفهومهای مهم در هر فضای متری مفاهیم کره وگوی‌اند. بنابه تعریف، کرهٔ به مرکز ۱ و شعاع n مجموعهٔ تمام اعضای گروه است که طول آنها n است. تعداد اعضای این مجموعه را با a_n نشان می‌دهیم. مجموعهٔ نقاط داخل و روی کرهٔ به مرکز ۱ و شعاع n را گوی بسته به مرکز ۱ و شعاع n می‌نامیم. تعداد اعضای این مجموعه را که تابعی از $\mathbb{N}\cup\{0\}$ به $\mathbb{N}$ است تابع رشد W نسبت به S می‌نامیم و با $\gamma(n)$ نشان می‌دهیم. اگر تعداد اعضایی از گروه را که روی کرهٔ به مرکز ۱ و شعاع n قرار دارند با a_n نشان دهیم آنگاه $a_n=\gamma_n-\gamma_{n-1}$.

ملاحظه می‌کنیم که تعریف γ_n و a_n به مجموعهٔ مولد گروه بستگی دارد. در زیر پس از آوردن یک تعریف ثابت می‌کنیم که این وابستگی تا حدی قابل اغماض است.

تعریف ۴. دو فضای متری (M,d) و (M',d') را شبه‌ایزومتریک می‌نامیم هرگاه توابع $f:M\to M'$ و $g:M'\to M$ و اعداد ثابت $a>0$ و $b\ge 0$ یافت شوند به‌طوری که

۱) $d'(f(x),f(y))\le ad(x,y)+b$ به‌ازای هر دو عضو x و y از M؛

۲) $d(g(x'),g(y'))\le ad'(x',y')+b$ به‌ازای هر دو عضو x' و y' از M'؛

۳) $d'(fg(x'),x')\le b$ به‌ازای هر عضو x' از M'؛

۴) $d(gf(x),x)\le b$ به‌ازای هر عضو x از M.

توجه می‌کنیم که در شرایط ۱)ـ۴) برابری aها و برابری bها ضرورتی ندارد و می‌توان این تعریف را به‌جای دو عدد با شش عدد بیان کرد.

قضیهٔ ۲. فرض کنید $S=\{s_1,\dots,s_k\}$ و $S'=\{t_1,\dots,t_l\}$ دو مولد متناهی برای گروه کاکستر W باشند. اگر d و d' به‌ترتیب متریکهای حاصل از S و S' بر W باشند آنگاه (W,d) و (W,d') شبه ایزومتریک‌اند.

اثبات. در اینجا به‌جای توابع f و g در تعریف فوق تابع همانی را در نظر می‌گیریم و قرار می‌دهیم $b=0$. فرض کنید طول عضو w نسبت به S برابر با n است و لذا اعضای s_1، ...، s_n متعلق به S وجود دارند به‌طوری‌که

$$w=s_{i_1}\cdots s_{i_n}$$

فرض می‌کنیم $a=\max\{\alpha,\beta\}$ که در آن α و β به‌ترتیب ماکسیمم طولهای اعضای S نسبت به S' و برعکس هستند. ملاحظه می‌کنیم که $|w|_{S'}\le a\,|w|_S$ و $|w|_S\le a\,|w|_{S'}$، و برهان تمام است. ■

تعریف ۵. می‌گوییم رشد تابع $\gamma_1(n)$ از رشد تابع $\gamma_2(n)$ سریعتر نیست و می‌نویسیم

$$\gamma_1(n)\preccurlyeq\gamma_2(n)$$

هرگاه $c\ge 1$ یافت شود به‌طوری که به‌ازای هر $n\in\mathbb{N}$ داشته باشیم

$$\gamma_1(n)\le c\gamma_2(n)$$

هرگاه $\gamma_1(n)\preccurlyeq\gamma_2(n)$ و $\gamma_2(n)\preccurlyeq\gamma_1(n)$ می‌گوییم این دو تابع هم‌ارزند و می‌نویسیم $\gamma_1(n)\sim\gamma_2(n)$.

به‌آسانی ثابت می‌شود که تابعهای رشد یک گروه نسبت به دو مجموعهٔ مولد متناهی هم‌ارزند. بنابراین گروه G را با رشد چندجمله‌ای (به‌ترتیب نمایی) می‌خوانیم هرگاه $\gamma(n) \sim n^d$ به‌ازای یک عدد طبیعی d (به‌ترتیب $\gamma(n) \sim e^n$). گروهی که با رشد چندجمله‌ای یا نمایی نباشد گروه با رشد متوسط نامیده می‌شود.

از آنجا که هر گروه کاکستر خطی است یعنی با زیرگروهی از یک گروه ماتریسی یکریخت است ([۲]، [۱۰]) از قضیهٔ بدیل تیتز[1] [۸] نتیجه می‌شود که یک گروه کاکستر یا حل‌پذیر است یا شامل زیرگروهی یکریخت با گروه آزاد تولید شده توسط دو مولد است. بنابراین هر گروه کاکستر که حل‌پذیر نباشد «میانگین‌پذیر» هم نیست. برای تعریفی از میانگین‌پذیری به [۲۱] مراجعه کنید.

تعریف ۶. به‌ازای دستگاه کاکستر (W, S)، S متناهی، سری

$$W(t) = \sum_{|w|=0}^{\infty} t^{|w|} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

را سری رشد گروه W نسبت به S می‌نامیم.

سری رشد برای گروههای متناهی، یک چندجمله‌ای است و برای گروههای نامتناهی ممکن است تابعی گویا یا ناگویا نسبت به t باشد. در مورد گروههای کاکستر، نویسندگان بسیاری با استفاده از روشهای جبری مختلف ثابت کرده‌اند که $W(t)$ تابعی گویاست ([۷]، [۱۲]). در واقع اگر W متناهی باشد آنگاه

$$W(t) = \prod_{i=1}^{l}(1 + t + t^2 + \cdots + t^{m_i})$$

که در آن m_iها نماهای W هستند، و اگر W نامتناهی باشد آنگاه رابطهٔ بازگشتی

$$\frac{(-1)^{|S|+1}}{W(t)} = \sum_{X \subset S} \frac{(-1)^{|X|}}{W_X}(t)$$

برقرار است، که در آن W_X زیرگروه سهموی تولید شده توسط X است. این روابط به‌آسانی نشان می‌دهند که $W(t)$ گویاست.

به‌علاوه اگر $\chi(W)$ مشخصهٔ اویلر W (برای تعریف به [۱۲] مراجعه کنید.) باشد آنگاه

$$W(1) = \frac{1}{\chi(W)}$$

چند تا از دیگر ویژگیهای $W(t)$ عبارت‌اند از

۱) صفرهای $W(t)$ ریشه‌های واحدند.

۲) $\frac{1}{W(+\infty)}$ عددی صحیح است.

۳) $\frac{1}{W(t^{-1})}$ یک سری با ضرایب صحیح است.

1. Tits alternative theorem

۵. دستگاههای بازنویسی و سری رشد کامل

یکی از روشهای محاسباتی در نظریهٔ ترکیبیاتی گروهها، روش واژه‌های ممنوعه است که مؤلف در [۱۳] و گریگورچوک در [۱۴] به آن پرداخته‌اند. در این بخش، با به‌کار بردن این روش، سریهای رشد کامل گروههای کاکستر مثلثی را به‌دست می‌آوریم. از ابزارهای ضروری برای اجرای روش مذکور، یک دستگاه بازنویسی متناهی و کامل به‌ازای هر گروه است؛ بنابراین، نخست باید برای گروههای مورد مطالعه دستگاههای بازنویسی ارائه دهیم. البته، این کار برای هر گروهی امکان‌پذیر نیست؛ اما در مورد تمام گروههای کاکستر مثلثی این کار را انجام داده‌ایم. در تعریف سری رشد ملاحظه می‌کنیم که $a_n \in Z$ و $W(t)$ به حلقهٔ سریهای توانی صوری $Z[[t]]$ تعلق دارد. مفاهیم تابع و سری رشد را می‌توان با تعریفهای زیر به گروه حلقه‌ها و گروه جبرها توسعه داد. فرض می‌کنیم R حلقه‌ای یکدار، G گروهی دلخواه و $R[G]$ گروه‌حلقه با ضرایب در R باشد. یادآور می‌شویم که هر عضو $R[G]$ به‌صورت مجموعی متناهی مثل $\sum_1^k a_i g_i$ است که در آن $a_i R$ و $g_i \in G$ اعضایی دلخواه هستند.

تعریف ۷. تابع

$$\gamma^c : N \cup \{0\} \to R[G]$$

با تعریف

$$\gamma^c(n) = \sum_{\substack{g \in G \\ |g|=n}} g \tag{1}$$

را تابع رشد کامل و سری

$$F^c(z) = \sum_{g \in G} g z^{|g|} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{|g|=n} \right) z^n \tag{2}$$

را که عضوی از $R[G][[z]]$ است سری رشد کامل G نسبت به S و R می‌نامیم.

ملاحظه می‌کنیم که اگر در این تعریف حلقهٔ Z را به‌جای R قرار دهیم سری رشد کامل تعریف شده در [۱۵] را به‌دست می‌آوریم. سری رشد نیز حالت خاصی از سری رشد کامل است: کافی است در (۲)، به هر g عدد ۱ را نسبت دهیم. فرض می‌کنیم که (W, S) یک دستگاه کاکستر است. با استفاده از روابط $(s_i s_j)^{m_{ij}} = 1$ می‌توانیم به هر جفت s_i و s_j در S، قانون بازنویسی‌ای به‌صورت

$$s_i s_j \cdots s_i \to s_j s_i \cdots s_j$$

به‌نحو مناسبی نسبت دهیم. ملاحظه می‌کنیم که طول هر یک از واژه‌های دو طرف این قانون برابر m_{ij} است. اگر با استفاده از لم کنوث‌ـ‌بندیکس[1] [۱۱] بتوانیم مجموعهٔ این قوانین را به‌صورت یک مجموعهٔ کامل و متناهی از قوانین بازنویسی برای W در آوریم آنگاه مجموعهٔ تکمیل‌شده را دستگاه بازنویسی متعارف برای W می‌نامیم. هر یک از واژه‌های واقع در طرف چپ هر یک از این قوانین را یک واژهٔ ممنوعه می‌نامیم.

1. Knuth-Bendix

تعریف ۸. یک زنجیر مختلط نسبت به یک دستگاه بازنویسی متعارف برای W زنجیری است دقیق که تمام حرفهای متعلق به S را در بر دارد. زنجیر دقیقی که مختلط نباشد ساده نامیده می‌شود.

خواننده می‌تواند برای تعریفهای مفاهیم این بخش به [۱۳] مراجعه کند.

قضیهٔ ۳. هر گروه مثلثی

$$W = \langle a, b, c | a^{۲} = b^{۲} = c^{۲} = (ab)^{p} = (bc)^{q} = (ca)^{r} = ۱ \rangle$$

یک دستگاه بازنویسی متعارف، متناهی و کامل می‌پذیرد.

برای اثباتی از این قضیه و قضیه‌های زیر به [۱۶] مراجعه کنید.

قضیهٔ ۴. فرض می‌کنیم گروه کاکستر W یک دستگاه بازنویسی متعارف، کامل و متناهی بپذیرد. در این‌صورت مجموع متناوب $\sum_{i\leq m}(-۱)^{i+۱}Q_m^{(i)}$ روی تعداد زنجیرهای مختلط به طول m برابر صفر است.

قضیهٔ ۵. فرض می‌کنیم $F^c(z)$ سری رشد کامل گروه مثلثی W با مجموعهٔ مولد $S = \{a, b, c\}$ باشد. در این‌صورت اگر $f^c_{\langle x,y\rangle}$ سری رشد کامل زیرگروه سهموی‌ای از W باشد که توسط عضوهای x، y متعلق به S تولید می‌شود آنگاه داریم

$$\frac{۱}{F^c(z)} = ۱ + \frac{۱}{f^c_{\langle a,b\rangle}} + \frac{۱}{f^c_{\langle b,c\rangle}} + \frac{۱}{f^c_{\langle c,a\rangle}} - \frac{۳ - (a+b+c)z}{۱ - z^{۲}}$$

سریهای رشد کامل را می‌توان در مورد رده‌هایی دیگر از گروههای کاکستر محاسبه کرد [۱۷]. سریهای رشد کامل، حلقهٔ رابط نظریهٔ ترکیبیاتی گروهها و C^*ـجبرها محسوب می‌شوند و از این رو جا دارد تحقیقات و محاسبات بیشتری دربارهٔ آنها صورت پذیرد.

۶. آجرفرش‌های صفحه‌های اقلیدسی و هذلولوی

در این بخش منظور از صفحهٔ $\mathbb{P}$ یکی از صفحه‌های اقلیدسی $\mathbb{R}^{۲}$ یا هذلولوی $\mathbb{H}^{۲}$ است. در این بخش پس از تعریف آجرفرش‌های نرمال و شبه‌نرمال صفحهٔ $\mathbb{P}$، آجرفرش‌های ناشی از گروههای کاکستر را معرفی می‌کنیم.

تعریف ۹. یک آجرفرش صفحه عبارت از خانواده‌ای چون $\mathfrak{I}$ از قرصهای بستهٔ توپولوژیک T (آجر) است که در شرایط زیر صدق کند

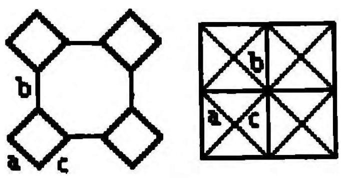
۱) $\mathbb{P} = \cup_{T\in\mathfrak{I}} T$

۲) اشتراک درون هر دو عضو $\mathfrak{I}$ تهی باشد.

هر مؤلفهٔ همبندی اشتراک دو یا چند آجر، بسته به اینکه یک نقطه یا یک منحنی باشد یک رأس یا یک یال آجرفرش نامیده می‌شود. اگر این رأسها و یالها را به‌ترتیب، با V و E نشان دهیم گراف $\Gamma = (V, E)$ را گراف یالی آجرفرش مربوط می‌نامیم.

مثال ۲

۱) آجر فرش صفحهٔ اقلیدسی با آجرهای مربعی یکسان از معمولیترین آجرفرش‌هاست. گراف یالی این آجرفرش یکی از گرافهای مورد مطالعهٔ پولیا در بحث گامهای تصادفی بوده است. توجه می‌کنیم که این آجرفرش را می‌توان با استفاده از آجرفرشی که توسط گروه کاکستر



شکل۴

$$W = \langle a, b, c | a^{۲} = b^{۲} = c^{۲} = (ab)^{۴} = (bc)^{۴} = (ac)^{۲} = ۱ \rangle$$

در صفحهٔ اقلیدسی ایجاد می‌شود به‌دست آورد [۲۰]. (شکل ۴).

۲) صفحهٔ هذلولوی را به دلیل داشتن امکانات بیشتر می‌توان با آجرهای متنوع‌تری فرش کرد. شکل ۵ این صفحه را با آجرفرشی مثلثی که در آن مساحت هر مثلث π و لذا اندازهٔ هر یک از زاویه‌های آن صفر است نشان می‌دهد.

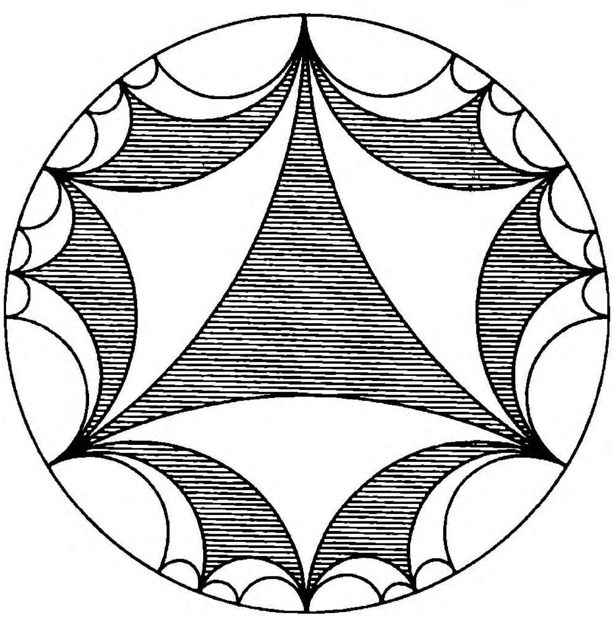
مسلماً صفحه را می‌توان به بینهایت روش آجرفرش نمود. بنابراین آجرفرش‌هایی حائز اهمیت‌اند که از ویژگیهای خاصی برخوردار باشند. فرض کنید به‌ازای هر آجر T از آجرفرش $\mathfrak{I}$ اعداد M_T و m_T چنان وجود داشته باشند که آجر T شامل دایره‌ای به شعاع m_T و داخل دایره‌ای به شعاع M_T باشد.

اگر بتوان توابع M_T و m_T را ثابت و بنابراین مستقل از T اختیار کرد و به‌علاوه اشتراک هر دو آجر تهی یا مجموعه‌ای همبند باشد می‌گوییم این آجرفرش نرمال است.

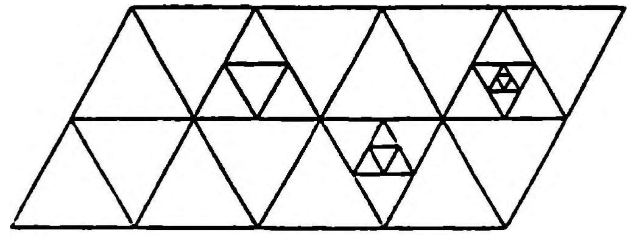
در صورتی که عددهای ثابت K و δ وجود داشته باشند به‌طوری که

۱) $M_T \leq K m_T$ به‌ازای هر T و

۲) $M_T \leq \delta$ به‌ازای هر T



شکل۵



شکل۶

و به‌علاوه اشتراک هر دو آجر تهی یا مجموعه‌ای همبند باشد آجرفرش را شبه‌نرمال می‌نامیم. در شکل ۶ قسمتی از یک آجرفرش شبه‌نرمال از صفحهٔ اقلیدسی را مشاهده می‌کنید. برای به‌دست آوردن این آجرفرش، دنبالهٔ $\{T_n\}$ از آجرهای آجرفرش صفحهٔ اقلیدسی را که توسط گروه کاکستر

$$W = \langle a,b,c | a^۲ = b^۲ = c^۲ = (ab)^۳ = (bc)^۳ = (ac)^۳ = ۱\rangle$$

ایجاد می‌شود در نظر می‌گیریم. هر یک از آجرهای T_n را با وصل کردن نقاط وسط اضلاع آن به چهار آجر کوچکتر $T_{n,۱}$، $T_{n,۲}$، $T_{n,۳}$، $T_{n,۴}$ تجزیه می‌کنیم. فرض کنید $T_{n,۱}$ آجر میانی باشد. در مرحلهٔ دوم این عمل را با دنبالهٔ آجرهای میانی $\{T_{n,۱}\}_{n\geq ۲}$ تکرار می‌کنیم. دنبالهٔ مثلثهای میانی حاصل این مرحله را با $T_{n,۱,۱}$ نشان می‌دهیم. اکنون فرایند فوق را در مورد دنبالهٔ $\{T_{n,۱,۱}\}_{n\geq ۳}$ تکرار می‌کنیم. با این کار مثلث nام دنبالهٔ اصلی به $۳n+۱$ مثلث متساوی‌الاضلاع تجزیه می‌شود. روشن است که این آجرفرش شبه‌نرمال است اما نرمال نیست.

توجه می‌کنیم که این تعریف شامل مثلث‌بندی صفحهٔ هذلولوی توسط مثلثهایی که دایرهٔ محیطی ندارند نمی‌شود.

اکنون رابطهٔ آجرفرشها و گروههای کاکستر سه‌مولدی را بررسی می‌کنیم. برای این منظور گروه کاکستر

$$W = \langle a,b,c | a^۲ = b^۲ = c^۲ = (ab)^p = (bc)^q = (ac)^r = ۱\rangle$$

را در نظر می‌گیریم. فرض کنید $۱/p + ۱/q + ۱/r = ۱$. در این‌صورت $\pi(۱/p + ۱/q + ۱/r) = \pi$، و لذا π/p، π/q و π/r زاویه‌های مثلثی در صفحهٔ اقلیدسی‌اند. ناحیهٔ بسته‌ای را که محدود به این مثلث است R می‌نامیم و آن را به‌صورت ۲ـسادک $R = [x,y,z]$ با زاویه‌های $\frac{\pi}{p}$، $\frac{\pi}{q}$ و $\frac{\pi}{r}$ نشان می‌دهیم. اکنون روی حاصلضرب دکارتی $W \times R$ ساختاری قرار می‌دهیم که آجرفرش مثلثی صفحهٔ اقلیدسی بخشی از این ساختار است.

به هر زیرسادک R زیرگروهی از W را به‌صورت زیر نسبت می‌دهیم:

$$W_x = \langle a,b | a^۲ = b^۲ = (ab)^p = ۱\rangle$$

و

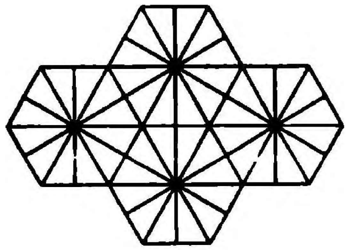
$$W_y = \langle b,c | b^۲ = c^۲ = (bc)^q = ۱\rangle$$

و

$$W_z = \langle a,c | a^۲ = c^۲ = (ac)^q = ۱\rangle$$

و

$$W_{[s,t]} = W_s \cap W_t$$



شکل۷

و

$$W_R = ۱$$

که در آن $[s,t]$ یک ۱ـسادک در R است. رابطهٔ هم‌ارزی $\sim$ روی $W \times R$ را به‌صورت

$$(g,s) \sim (h,t) \iff s = t \quad و \quad g^{-۱}h \in W_s$$

تعریف می‌کنیم. اگر $[g,s]$ ردهٔ هم‌ارزی عضو (g,s) باشد و مجموعهٔ این رده‌ها را با $W \times R/\sim$ نشان دهیم، آنگاه عمل گروه W روی آن با تعریف $g[h,x] = [gh,x]$ ناپیوستهٔ سره است، یعنی به‌ازای هر X از این مجموعه، همسایگی O از آن وجود دارد به‌طوری که $O \cap g(O) = \emptyset$ به‌ازای هر $g \in W\backslash\{۱\}$، و R برای این عمل یک ناحیهٔ بنیادی است و لذا $W \times R/\sim$ یک آجرفرش مثلثی صفحهٔ اقلیدسی است. با این تعریف و با یکی گرفتن $(۱,x) \in W \times R$ با $x \in R$ ملاحظه می‌کنیم که پایدارساز[1] هر زیرسادک R، زیرگروهی است که به آن نسبت داده‌ایم. در شکل ۷ این مثلث‌بندی را به‌ازای $r = ۶$، $q = ۳$، $p = ۲$ مشاهده می‌کنید.

در ترسیم این شکل، رأسهای x، y و z را به‌ترتیب متناظر با رأسهای زاویه‌های $\frac{\pi}{۳}$، $\frac{\pi}{۲}$ و $\frac{\pi}{۶}$ گرفته‌ایم. این کار موجب می‌شود که چیده شدن مثلثها در کنار هم چنان انجام پذیرد که هیچ دو مثلثی بخشهای منطبق برهم پیدا نکنند و مجموع زاویه‌های تشکیل‌شده دور هر رأس، درست ۲π باشد. به‌علاوه، ملاحظه می‌کنیم که در این مثلث‌بندی رأسهای هر مثلثی به روشی طبیعی برچسب‌دار شده است. این مثلث‌بندی را بنا[2] یا مجتمع کاکستر[3] وابسته به گروه سه‌مولدی کاکستر فوق می‌نامیم. اگر این مجتمع را یک گراف برچسب‌دار با رأسها و یالهای معلوم فرض کنیم، دوگان آن که گراف کیلی گروه نسبت به مولد $\{a,b,c\}$ است به‌دست می‌آید ــ یعنی گرافی که هر یک از رأسهای آن نقطه‌ای در داخل یکی از مثلثهاست و هیچ دو رأسی در داخل یک مثلث قرار ندارند و دو رأس بر یک یال واقع‌اند اگر از دو مثلث مجاور انتخاب شوند.

به‌آسانی می‌توان دید که سه‌تایی‌هایی که می‌توان با آنها آجرفرش‌های مثلثی متفاوت برای صفحهٔ اقلیدسی ساخت عبارت‌اند از

$$p=۶, q=۲, r=۳;\quad p=۳, q=۳, r=۳;\quad p=۲, q=۴, r=۴$$

با این حال با استفاده از این آجرفرش‌ها می‌توان آجرفرش‌های دیگری به‌دست آورد.

---

1. stabilizer 2. building 3. Coxeter building

با همان روش فوق، در صفحهٔ هذلولوی نیز می‌توان با استفاده از گروههای کاکستر سه‌مولدی آجرفرش‌های مثلثی ایجاد کرد، با این تفاوت که در اینجا به‌جای برابری $۱/p+۱/q+۱/r = ۱$ از نابرابری $۱/p+۱/q+۱/r < ۱$ استفاده می‌کنیم، و این از آنجا ناشی می‌شود که در هندسهٔ هذلولوی مجموع زاویه‌های هر مثلث کمتر از π رادیان است. بنابراین صفحهٔ هذلولوی را می‌توان با مثلثهای هم‌اندازه که مجموع زاویه‌های هر یک از آنها برابر عدد ثابتی چون α است پوشاند. اگر $r = ۰$، یکی از زاویه‌های هر یک از این مثلثها برابر با صفر است، و به همین ترتیب اگر $r = q = ۰$ یا $p = q = r = ۰$، آنگاه هر مثلث دو یا سه زاویه با اندازه‌های صفر خواهد داشت. مجدداً با استفاده از این آجرفرش‌ها می‌توانیم آجرفرش‌هایی تا حدودی دلخواه به‌دست آوریم.

در واقع قضیهٔ زیر را ثابت کرده‌ایم.

گزارهٔ ۲. فرض کنید $r \geq ۶$ و $q \geq ۳$ دو عدد صحیح باشند. در این‌صورت آجرفرشی وجود دارد که هر آجر آن یک r ضلعی منتظم است و در هر رأس آن تعداد q چندضلعی مشترک‌اند.

اثبات. در روش کلی مثلث‌بندی که در بالا بیان شد p را برابر با ۲ انتخاب می‌کنیم. بنابه فرض داریم $۱/p + ۱/q + ۱/r \leq ۱$. اگر $۱/p + ۱/q + ۱/r \leq ۱$ آنگاه آجرفرشی از مثلثها در صفحهٔ هذلولوی به‌دست می‌آید. زاویه‌های هر یک از این مثلثها عبارت‌اند از π/r، π/q و $\pi/۲$. در واقع این آجرفرش تجزیهٔ گرانیگاهی[1] آجرفرش مورد نظر است. اکنون این تجزیه را نادیده گرفته آجرفرش مورد نظر را به‌دست می‌آوریم.

در حالتی‌که $۱/p + ۱/q + ۱/r = ۱$، آجرفرشی از شش‌ضلعی‌های منتظم در صفحهٔ اقلیدسی حاصل می‌شود. ■

مراجع

1. H. S. M. Coxeter, *Regular polytopes*, Dover (1973).
2. K. S. Brown, *Buildings*, Springer-Verlag, New-York (1989).
3. N. Bourbaki, *Groups et Algebres de Lie*, Chapitres 4,5, et 6, Hermann, Paris (1968).
4. Pierre de la Harpe, "An invitation to Coxeter groups", in *Group Theory from Geometrical Viewpoint*, E. Ghys, A. Haelfliger and A. Verjovsky (eds.), World Scientific, Singapore (1991).
5. J. E. Humphreys, *Refletion Groups and Goxeter Groups*, Cambridge University press, Cambridge (1992).
6. E. B. Vinberg, "Hyperbolic reflection groups", *Russian Math. Survey*, (1) **40** (1985).
7. Luis, Paris, "Growth series of Coxeter groups", In *Croup Theory from Geometrical Viewpoint*, E. Ghys, A. Haelfliger and A. Verjovsky (eds.), World Scientific, Singapore (1991).
8. Pierre de la Harpe, "Free groups in linear groups", *L'Enseignement Mathematique*, **20** (1983) 129-144.

1. barycentric subdivision

9. J. E. Rotmann, *An Introduction to the Theory of Groups*, Allyn and Bacon, Inc. Boston (1984).
10. J. Tits, "Le problém des mots dans les groupes de Coxeter", *Symp. Math*, **1**, Acad. Press (1968) 175-185.
11. D. Epstein et. al., *Word Processing in Groups*, Jones and Bartlett, Boston (1992).
12. J. P. Serre, "Cohomologie des groupes discrets", in *Prospects in Mathematics*," Ann. Math. Studies, **70**, Princeton University Press, Princeton (1971) 77-169.
13. M. J. Mamaghani, "The growth series of surface groups", *Mat. Zametki*, (5) **58** (1995). 681-693.
14. R. I. Grigorchuk, "Growth functions, rewriting systems and the Euler characteristic" *Mat. Zametki*, (5) **58** (1995). 653-668.
15. R. I. Grigorchuk and T. Nagnibeda, "Operator growth functions of discrete groups", preprint (1997).
16. M. J. Mamaghani, "Rewriting systems and complete growth series of triangle Coxeter groups", *Mat. Zametki* (3) **71** (2002).
17. M. J. Mamaghani, "Complete growth series of Coxeter groups with more than three generators", *Bulletin of the IMS*, Vol. (1) **29** (2003).
18. B. Grunbaum and G. C. Shephard, *Tilings and Patterns*, Freeman and Company, New York (1987).
19. W. *Woess, Random Walks on Infinite Graphs and Groups*, Cambridge Tracts in Mathematics, cambridge Univ. Press (2000).
20. H. S. M. Coxeter and W. O. J. Moser, *Generators and Relations for Discrete Groups*, Springer (1984).

۲۱. محمد جلوداری ممقانی، «مفهوم رشد در گروهها»، نشر ریاضی، سال ۸، شمارهٔ ۱ (۱۳۷۵) صص ۶ـ۱۷.

۲۲. محمد جلوداری ممقانی، «گروههای کاکستر و سری رشد کامل آنها»، گزارش علمی، شورای پژوهشهای علمی کشور (۱۳۷۹).

******

* محمد جلوداری‌ممقانی، دانشگاه علامه‌طباطبایی

j_mamaghani@atu.ac.ir