نشر ریاضی، سال ۸، شمارهٔ ۱، صص ۶ـ۱۷

مفهوم رشد در گروهها

محمد جاوداری مقانی*

«رشد» یکی از مفاهیمی است که در ریاضیات کاربرد گسترده دارد. این مفهوم از طریق هندسه به نظریهٔ گروهها راه یافته و هم‌اکنون یکی از موضوعهای تحقیقاتیِ مورد علاقه در نظریه‌های هندسی و ترکیبیاتیِ گروههاست. در این نوشته پس از نگاهی گذرا به مفهوم رشد در هندسه، سیر تحول این مفهوم را در نظریه‌های یاد شده بررسی می‌کنیم.

۱. رشد گروهها

رشد در هندسه. فرض کنید M یک خمینهٔ ریمانیِ تمام و بیکران با مترِ d باشد. اگر $x_0 \in M$ نقطه‌ای ثابت و $B(x_0, r)$ گوی بستهٔ به مرکز x_0 و شعاع $r > 0$ باشد، آنگاه تابع

$$\gamma(r) = \gamma_{M,x_0}(r) = \mathrm{Vol}(B(x_0, r))$$

را که در آن $\mathrm{Vol}(B(x_0, r))$ برابر است با حجم $B(x_0, r)$، تابع رشد خمینهٔ M می‌نامیم. مرتبهٔ رشد این تابع، رشد M را در بینهایت معین می‌کند. به‌عنوان مثال، اگر M فضای اقلیدسی n بعدی باشد، آنگاه حجم گوی بستهٔ به مرکز x_0 و شعاع r، مستقل از x_0 و مضربی از r^n است. بنابراین $v(r) = O(r^n)$. در این حالت می‌گوییم فضای اقلیدسی n بعدی رشد چندجمله‌ای از درجهٔ n دارد. در مقابل می‌توان ثابت کرد که مساحت گویِ به شعاع r در صفحهٔ هذلولی مساوی است با $V(r) = 4\pi \sinh^2(\frac{r}{2})$. چون $\frac{V(r)}{e^r} \to \pi > 1$ وقتی $r \to \infty$ می‌گوییم صفحهٔ هذلولی رشدنمایی دارد.

مفهوم رشدگراف. اکنون فرض می‌کنیم Γ یک گراف همبند با مجموعهٔ رأسهای $V(\Gamma)$ و مجموعهٔ یالهای $E(\Gamma)$ باشد به‌طوری‌که هر رأس حداکثر بر L یال (L عددی ثابت است) واقع باشد. روی $V(\Gamma)$ متر d را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

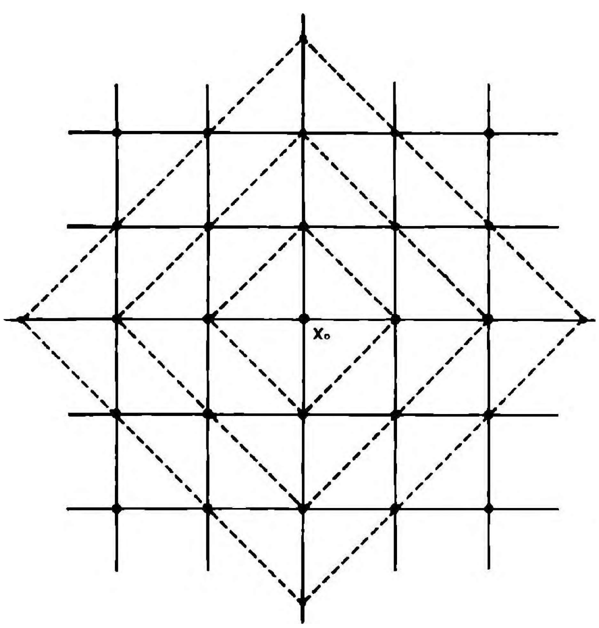
$$d(v, u) = \min\{\text{طول مسیر واصل } v \text{ و } u \text{ در } \Gamma\}$$

حال فرض می‌کنیم x_0 رأس ثابتی متعلق به $V(\Gamma)$ باشد. گوی بستهٔ به‌مرکز x_0 و شعاع r و تابع رشد $\gamma_{\Gamma,x_0}(r)$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$B(x_0, r) = \{v \in V(\Gamma) | d(x_0, v) \leq r\}$$

$$\gamma_{\Gamma,x_0}(r) = \#B(x_0, r) \; (\text{عدد اصلی منسوب به } B(x_0, r))$$

تابع $V_{\Gamma,x_0}(r)$ را تابع رشد Γ نسبت به x_0 می‌نامیم. در گراف شکل ۱، x_0 و گویهای به مرکز x_0 و شعاع ۱، ۲ و ۳ را نشان داده‌ایم. به‌آسانی دیده می‌شود



شکل۱ تابع رشد این گراف $\gamma_1(r) = 2r^2 + 2r + 1$ است

که تابع رشد این گراف عبارت است از

$$\gamma_۱(r) = ۲r^۲ + ۲r + ۱$$

و به انتخاب نقطهٔ $x_۰$ بستگی ندارد. ملاحظه می‌کنیم که $\gamma_۱(r) \in O(r^۲)$، بنابراین، گراف شکل ۱ رشد چندجمله‌ای از درجهٔ ۲ دارد.

به همین ترتیب در مورد گراف شکل ۲، تابع رشد عبارت است از

$$\gamma_۲(r) = ۱ + ۴ + ۴ \times ۳ + \cdots + ۴ \times ۳^{r-۱} = ۲ \times ۳^r - ۱$$

ملاحظه می‌کنیم که $\gamma_۲(r) \in O(۳^r)$، می‌گوییم گراف شکل ۲ دارای رشدنمایی است.

ساختن گراف یا خمینهٔ ریمانی با درجه‌های رشد متفاوت کار چندان مشکلی نیست. با این‌حال، اگر گروه تقارن این گراف یا خمینه بزرگ باشد، حدس بر این است که تابع رشد این گراف یا خمینه، چندجمله‌ای یا نمایی باشد. آنچه در پی می‌آید منشأ این حدس را روشن می‌کند [۱۶]. اکنون مفهوم رشد را برای یک گروه متناهی-مولد تعریف می‌کنیم. برای این منظور ابتدا مفهوم گراف کیلی را برای این نوع گروهها تعریف می‌کنیم.

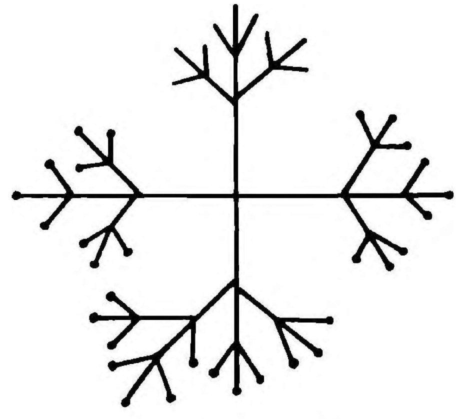
فرض کنید G گروهی متناهی-مولد و $S = \{a_۱, a_۲, \cdots, a_n\}$ یک مجموعهٔ مولّد آن باشد، به‌طوری‌که $S = S^{-۱}$ و e عضو خنثای G، به S تعلق نداشته باشد. به جفت مرتب (G, S) گراف همبند $\Gamma(G, S)$، به‌نام گراف کیلی G نسبت به S، را به‌شرح زیر نسبت می‌دهیم.

الف) هر عضو $g \in G$ را یک رأس $\Gamma(G, S)$ می‌گیریم.

ب) دو رأس $g, h \in V(\Gamma(G, S))$ را توسط یالی به‌هم وصل می‌کنیم اگر و فقط اگر $g^{-۱}h \in S$.

تابع رشد یک گروه. تابع رشد گراف $\Gamma(G, S)$ را به‌ازای $x_۰ = e$ تابع رشد گروه G نسبت به مجموعهٔ S می‌نامیم و آن را با $\gamma_{G,S}(r)$ یا اگر ابهامی در میان نباشد با $\gamma(r)$ نمایش می‌دهیم. به عبارت دیگر اگر طول عضو $g \in G$ را نسبت به S با

$$l(g) = \inf\{n | g = a_{i_۱}^{\epsilon_۱} a_{i_۲}^{\epsilon_۲} \cdots a_{i_n}^{\epsilon_n}, \epsilon_j = \pm ۱, j = ۱, \dots, n\}$$



شکل۲ این گراف رشد نمایی دارد.

تعریف کنیم، آنگاه $d(g, h) = l(g^{-۱}h)$ یک متر چپ-ناوردا روی G تعریف می‌کند. حال اگر

$$B_e(r) = \{g \in G | d(e, g) \le r\}$$

آنگاه

$$\gamma(r) = \gamma_{G,S}(r) = \#B_e(r)$$

در نتیجه مفاهیم رشد چندجمله‌ای، رشدنمایی و مرتبهٔ رشد برای یک گروه، درست مانند این مفاهیم برای یک گراف تعریف می‌شوند. گرافهای شکلهای ۱ و ۲ به‌ترتیب گرافهای گروههای آبلی آزاد $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ با مولد $S = \{a, b, a^{-۱}, b^{-۱}\}$ و گروه آزاد $F_۲ = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ با مولد $S' = \{\alpha, \beta, \alpha^{-۱}, \beta^{-۱}\}$ هستند؛ بنابراین داریم

$$\gamma_{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, S}(r) = ۲r^۲ + ۲r + ۱$$

و

$$\gamma_{F_۲, S'}(r) = ۲ \times ۳^r - ۱$$

روشن است که تابع رشد به مجموعهٔ مولد بستگی دارد. با وجود این دو تابع رشد متناظر با دو مجموعهٔ مولد برای یک گروه، ارتباط ویژه‌ای با هم دارند. این ارتباط در گزارهٔ زیر مشخص شده است.

گزاره فرض کنید $A = \{\alpha_۱, \dots, \alpha_n\}$ و $B = \{\beta_۱, \dots, \beta_m\}$ دو مجموعهٔ مولد برای گروه G باشند. اگر $\gamma_A(r)$ و $\gamma_B(r)$ به‌ترتیب توابع رشد G نسبت به A و B باشند آنگاه اعداد ثابت h_A و h_B وجود دارند که

الف) $\gamma_B(r) \le \gamma_A(h_A r)$

ب) $\gamma_A(r) \le \gamma_B(h_B r)$

اثبات. رجوع کنید به [۲۵].

این گزاره همراه با تعریف زیر به مفهوم نرخ رشد گروه، که به مجموعهٔ مولد بستگی ندارد، می‌انجامد.

توابع $f_۱, f_۲ : \mathbb{N} \cup \{c\} \to \mathbb{R}^+$ را هم‌ارز می‌نامیم و می‌نویسیم $f_۱(n) \sim f_۲(n)$ اگر عدد ثابت $k \in \mathbb{N}$ وجود داشته باشد که

$$f_۱(n) \le f_۲(kn), f_۲(n) \le f_۱(kn) \quad n = ۱, ۲, \dots$$

روشن است که $\sim$ یک رابطهٔ هم‌ارزی روی هر مجموعه از توابع فوق است و ردهٔ هم‌ارزی $[\gamma_A(n)]$ تابع $\gamma_A(n)$ به انتخاب A بستگی ندارد. این ردهٔ هم‌ارزی را نرخ رشد گروه G می‌نامیم.

اولین کسانی که ارتباط بین رشد هندسی و رشد گروهها را بررسی کردند، یفروموویچ و شوارتس [۱۶] و میلنر [۲۵] بودند، ولی مقالهٔ میلنر بود که سرآغاز مطالعهٔ رشد گروهها به‌عنوان موضوعی تازه شد. در اینجا دو قضیه از میلنر [۲۵] را که به این ارتباط پرداخته‌اند می‌آوریم.

قضیهٔ ۱. فرض کنید M یک خمینهٔ ریمانی n بعدی تمام باشد که تانسور انحنای ریچی R_M آن همه‌جا نیمه معین مثبت است. در این صورت، تابع رشد هر زیرگروه متناهی-مولد از گروه بنیادی $\pi_1 M$ در رابطهٔ

$$\gamma(r) \leq C.r^n$$

صدق می‌کند که در آن C عددی است ثابت و به مجموعهٔ مولدی که $\gamma(r)$ را نسبت به آن تعریف می‌کنیم بستگی دارد.

بنابراین رشد زیرگروه با شرایط مذکور، چندجمله‌ای است.

قضیهٔ ۲. اگر M یک خمینهٔ ریمانی فشرده باشد که تمام انحناهای مقطعی آن منفی است، آنگاه عدد ثابت $a > 1$ وجود دارد به‌طوری که تابع رشد گروه بنیادی $\pi_1 M$ در رابطهٔ

$$\gamma(r) \geq a^r$$

صدق می‌کند.

اولین دستهٔ گروههایی که میلنر تابع رشد آنها را بررسی کرد عبارت بودند ازگروه آزاد با n مولد وگروههای پوچ‌توان. وی نشان داد که برخی ازگروههای مذکور دارای رشد چندجمله‌ای هستند. این مطلب سپس برای تمام گروههای پوچ‌توان توسط ولف [۳۹] ثابت شد. هایمن بس در سال ۱۹۷۲ [۱] فرمولی برای نمای نرخ رشد گروههای پوچ توان به‌دست آورد. قضیهٔ هایمن بس در این مورد به‌صورت زیر است.

قضیهٔ ۳. اگر G گروهی پوچ‌توان و $\{G_k\}$ سری مرکزی پایین آن باشد آنگاه $\gamma_G(r) \sim r^d$، که در آن

$$d = \sum_k k.\dim_{\mathbb{Z}}\left(\frac{G_k}{G_{k+1}}\right)$$

و $\dim_{\mathbb{Z}}\left(\frac{G_k}{G_{k+1}}\right)$ رتبهٔ بخش آزاد گروه آبلی $\frac{G_k}{G_{k+1}}$، یعنی تعداد اعضای یک زیرمجموعهٔ مستقل خطی ماکسیمال از بخش آزاد $\frac{G_k}{G_{k+1}}$ است.

گروه G را حلپذیر می‌نامیم اگر دنباله‌ای متناهی چون $\{G_i\}_{i=0}^n$ از زیرگروههای G وجود داشته باشد به‌طوری که به‌ازای هر $0 \leq i \leq n-1$، G_i زیرگروه نرمال G_{i+1} بوده، $\frac{G_{i+1}}{G_i}$ آبلی باشد، $G_0 = 1$ و $G_n = G$. اگر در این تعریف گروههای خارج‌قسمت $\frac{G_{i+1}}{G_i}$ دوری باشند، گروه G را چنددوری[1] می‌نامیم. برای مثال گروههای جایگشت چهار حرف، سه‌حرف، و نیز گروه $\mathbb{Z}$ چنددوری هستند. توجه می‌کنیم که هرگروه پوچ توان چنددوری یا حلپذیر است ولی عکس این مطلب درست نیست.

میلنر پس از بررسی گروههای پوچ توان، به مطالعهٔ تابع رشد گروههای حلپذیر غیر چنددوری پرداخت [۲۶] و نشان داد که این نوع گروهها رشد چند جمله‌ای دارند. از آنجا که هرگروه حلپذیر با تابع رشد غیرنمایی تقریباً پوچ توان است [۱۶]، یعنی زیرگروهی پوچ توان با اندیس متناهی دارد، نتیجه‌می‌گیریم که گروههای حلپذیر رشدنمایی یا رشد چندجمله‌ای دارند. توسعهٔ این مطالعه به گروههای خطی نیز به نتیجه‌ای مشابه منجر شد. در واقع بنابر قضیه‌ای از تیتز [۳۶] هر گروه متناهی-مولد از ماتریسها روی یک هیأت یا شامل گروه آزاد با دو مولد است یا تقریباً حلپذیر است، یعنی زیرگروهی حلپذیر با شاخص متناهی دارد.

میلنر در مقاله‌ای [۲۵] این سوال را مطرح می‌کند که آیا سری رشد هر گروه متناهی-مولد، نمایی است یا چندجمله‌ای؟ این سوال به مسألهٔ میلنر معروف شده است.

در پاسخ به این سوال، گروموف گروههای با رشد چندجمله‌ای را رده‌بندی و ثابت کرد که [۲۰]:

قضیهٔ ۴ (گروموف). گروه متناهی-مولد G رشد چندجمله‌ای دارد اگر و تنها اگر شامل زیرگروهی تقریباً پوچ توان باشد.

البته ولف [۳۹] و بس [۱] نیمی از این قضیه را ثابت کرده بودند؛ گروموف قسمت دیگر را که بسیار مشکلتر است اثبات کرد. این اثبات به استقراست و مبتنی است بر لمهای زیر [۲۰].

لم ۱. اگرگروه G دارای رشد چندجمله‌ای با نمای d باشد و دنبالهٔ دقیقی چون

$$1 \to N \to G \to \mathbb{Z} \to 1$$

وجود داشته باشد، آنگاه N متناهی-مولد است و رشد چندجمله‌ای با نمای نابیشتر از $d-1$ دارد.

لم ۲. اگر در دنبالهٔ دقیق

$$1 \to N \to G \to \Delta \to 1$$

گروههای N و Δ تقریباً چنددوری باشند، آنگاه G نیز تقریباً چنددوری است.

توجه می‌کنیم که بنا به تعریف، گروهی که شامل یک زیرگروه چنددوری با شاخص متناهی باشد، تقریباً چنددوری نامیده می‌شود.

بنابراین راهبرد اثبات، پیدا کردن زیرگروهی با اندیس متناهی در G است که با $\mathbb{Z}$ همساز‌ریخت باشد. اگر G به‌وسیلهٔ یک همریختی به‌روی زیرگروهی از یک گروه لی نگاشته شود، وجوداین زیرگروه از قضیهٔ تیتز [۳۶] نتیجه می‌شود.

قضیهٔ گروموف این امکان را فراهم کرد که مفهوم رشد به نیمگروههای حذفی، نیمگروههایی که قوانین حذفی از چپ و راست در آنها برقرار است، تعمیم یابد. در این مورد هم مفاهیم نرخ رشد، رشدنمایی، رشد چندجمله‌ای و ...، مانند مورد گروهها تعریف می‌شود. با وجود این، رشد نیمگروهها بسیار شگفت‌انگیز است. مثلاً پیوستاری از نیمگروههای نایکریخت وجوددارد که همگی دارای‌نرخ رشد r^3 هستند [۱۶]. همچنین ثابت شده است که نیمگروهی با نمای رشد $\frac{5}{2}$ وجود دارد، یعنی نرخ رشد این نیمگروه با $r^{\frac{5}{2}}$ هم‌ارز است [۱۶]. در این جا بحث خود را در مورد رشد نیمگروهها با بیان تعمیمی از قضیه گروموف به‌پایان می‌رسانیم، لیکن ابتدا لازم است چند مفهوم در مورد نیمگروهها تعریف کنیم.

1. polycyclic

فرض کنید x، y، t_1، t_2، …، t_n، … متغیرهایی باشند که مقادیرشان را در نیمگروه S اختیار می‌کنند. قرار می‌دهیم

$$X_0 = x, \qquad Y_0 = y$$

$$X_{n+1} = X_n t_{n+1} Y_n, \quad Y_{n+1} = Y_n t_{n+1} X_n \qquad n = 0, 1, 2, \cdots$$

می‌گوییم نیمگروه S پوچ توان از ردهٔ n است اگر $X_n = Y_n$ و $X_{n-1} \neq Y_{n-1}$.

گوییم زیرنیمگروه T از نیمگروه S دارای شاخص متناهی است اگر زیرمجموعهٔ متناهی $K \subset S$ وجود داشته باشد که به‌ازای هر $x \in S$، $k \in K$ یافت شود به‌طوری که $xk \in T$.

قضیهٔ ۵ (گریگورچوک). نیمگروه متناهی-مولد و حذفی S رشد چندجمله‌ای دارد اگر و تنها اگر شامل زیر نیمگروهی پوچ توان با شاخص متناهی باشد [۱۶].

اثبات این قضیه مبتنی است بر تقریب‌زدن رشد گروه کسرهای $G = SS^{-1}$ با رشد نیمگروه S. اگر S رشد چندجمله‌ای داشته باشد، G نیز رشد چندجمله‌ای دارد و لذا قضیهٔ گروموف را می‌توان به‌کار برد.

۲. گروهی با رشد متوسط

فرض کنید G گروهی متناهی-مولد و $\lambda_S(n)$ تابع رشد G نسبت به مجموعهٔ مولدی چون S باشد. به آسانی دیده می‌شود که به‌ازای هر دو عدد صحیح و نامنفی m و n نابرابری $\lambda_S(m+n) \le \lambda_S(m)\lambda_S(n)$ برقرار است، پس حد

$$\lambda_S = \lim_{n\to\infty} \lambda_S(n)^{1/n}$$

وجود دارد [۲۹] و به آسانی دیده می‌شود که $\lambda_S \ge 1$. بنا به تعریف حد، اگر $\lambda_S > 1$ آنگاه G رشد نمایی دارد. در حالتی که $\lambda_S = 1$ می‌گوییم G دارای رشد زیرنمایی است. اگر $\lambda_S = 1$ و رشد G چندجمله‌ای نباشد، گفته می‌شود G رشد متوسط دارد.

اینکه آیا گروه با رشد متوسط وجود دارد، مضمون مسألهٔ میلنر است. در سال ۱۹۸۳ گریگورچوک گروهی با رشد متوسط ارائه داد [۱۳]. این گروه را C می‌نامیم و در زیر آن را معرفی می‌کنیم. برای این کار از درخت دوتایی خاصی استفاده می‌کنیم.

الفبای $\{0, 1\}$ و واژه‌نامهٔ $\mathbb{W} = \{0, 1\}^*$ حاوی تمام واژه‌های تشکیل شده از دو حرف ۰ و ۱، از جمله واژهٔ تهی λ، را در نظر می‌گیریم. این واژه‌نامه را به‌صورت زیر مرتب می‌کنیم

الف) قرار می‌دهیم $\lambda < 0 < 1$.

ب) به‌ازای دو کلمهٔ $u, v \in \mathbb{W}$ می‌گوییم u بزرگتر از v است و می‌نویسیم $v < u$ اگر

(i) طول (تعداد حرفهای) u بزرگتر (بیشتر) از طول (تعداد حرفهای) v باشد،

(ii) در صورتی که طولهای u و v برابر باشند، اولین دو حرف متفاوت در طرفهای چپ u و v به ترتیب ۱ و ۰ باشند. مثلاً داریم:

$$v = 11100 < 11110 = u$$

حال درخت دوتایی Δ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

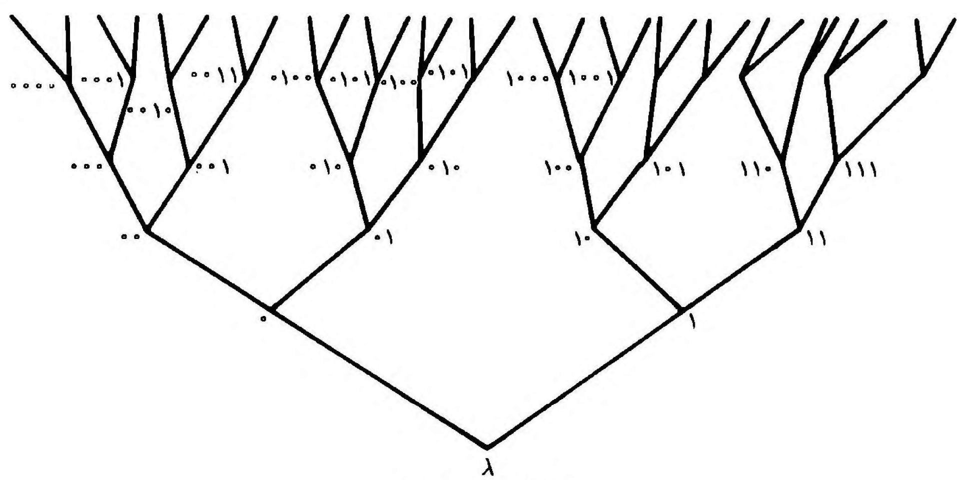
۱) رأسهای Δ اعضای $\mathbb{W}$ هستند و کلمهٔ تهی λ تنها رأسی است که انتهای هیچ یالی نیست، این رأس را ریشهٔ Δ می‌نامیم.

۲) به هر رأس Δ درست یک یال وارد و از هر رأس درست دو یال خارج می‌شود. اگر $v_1 = i_1 \cdots i_k$ و $v_2 = j_1 \cdots j_k$ دو راس Δ باشند، یال $\overrightarrow{v_1 v_2}$ تعریف می‌شود اگر و تنها $v_2 = v_1 0$ یا $v_2 = v_1 1$.

ملاحظه می‌کنیم که هر یک از رأسهای Δ خود ریشهٔ زیردرختی یکریخت با Δ است. زیردرخت با ریشهٔ $u \in \mathbb{W}$ را با Δ_u نشان می‌دهیم.

اگر کلمه‌های $\mathbb{W}$ را به‌ترتیب از پایین به بالا و از چپ به راست در سطوح مختلف قرار دهیم شکل ۳ را برای درخت دوتایی Δ به‌دست می‌آوریم.

حال تبدیلهای a، b، c و d از درخت Δ را به شرح زیر تعریف می‌کنیم.



شکل ۳ درخت دوتایی Δ

الف) a زیردرختهای Δ_0 و Δ_1 را به‌طور خطی جابه‌جا می‌کند و ریشهٔ Δ، λ را ثابت نگه می‌دارد. بنابراین هر رأس به‌صورت $1u$ یا $0u$ به رأس $0u$ یا $1u$ تبدیل می‌شود.

ب) b روی درخت Δ_0 مانند a روی درخت Δ عمل می‌کند. بنابراین b دو نیمهٔ درخت Δ_0 را به‌طور خطی جابه‌جا می‌کند. روی هر زیردرختی از Δ_1 که ریشهٔ آن با کلمه‌ای به‌صورت $\underbrace{11\cdots1}_{k}0$ آغاز شود که در آن (به پیمانهٔ ۳) $k \equiv 0, 2$، مانند a عمل می‌کند و بقیهٔ Δ_1 را ثابت نگه می‌دارد.

پ) c روی درخت Δ_0 مانند a روی درخت Δ عمل می‌کند، و روی هر زیردرختی از Δ_1 که ریشهٔ آن با کلمه‌ای به‌صورت $\underbrace{111\cdots1}_{k}0$ آغاز شود که در آن (به پیمانهٔ ۳) $k \equiv 0, 2$، مانند a عمل می‌کند و بقیهٔ Δ_1 را ثابت نگه می‌دارد.

ت) d درخت Δ_0 را ثابت نگه می‌دارد و روی هر زیردرختی از Δ_1 که ریشهٔ آن با کلمه‌ای به‌صورت $\underbrace{11\cdots1}_{k}0$ آغاز شود که در آن (به پیمانهٔ ۳) $k \equiv 1, 2$، مانند a روی Δ عمل می‌کند.

با اندکی دقت ملاحظه می‌کنیم که

$$a\circ a = b\circ b = c\circ c = d\circ d = I$$

حال گروه C را به‌عنوان گروهی که به‌وسیلهٔ a، b، c و d تولید می‌شود تعریف می‌کنیم. این گروه دارای ویژگیهای جالب بسیاری است. گریگورچوک [۱۷، ۱۲] ثابت کرده است که

قضیهٔ ۶. الف) C نامتناهی است.

ب) C متناوب است، یعنی، مرتبهٔ هر عضو آن متناهی است.

پ) C دارای نمایش متناهی نیست، یعنی، نمی‌توان آن را با تعداد متناهی مولد و تعداد متناهی رابطه نمایش داد.

ت) C با گروه حاصلضرب $C \times C$ متوافق است، بدین معنی که C و $C \times C$ زیرگروههای با شاخص متناهی یکریخت دارند.

ث) C رشدی متوسط دارد. در واقع اگر $\lambda(n)$ تابع رشد C نسبت به $\{a,b,c,d\}$ باشد، آنگاه اعداد ثابت A و B وجود دارند که

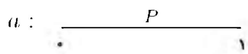
$$e^{A\sqrt{n}} \le \lambda(n) \le e^{An^{\alpha}}$$

که در آن $\alpha = \log_{32} 31$.

بجاست متذکر شویم که تعریف اولیهٔ گروه C مبتنی است بر تعریف a، b، c و d به‌عنوان تبدیلهایی از بازهٔ $[0,1]$ که اعداد $\frac{k}{2^n}$، $0 \le k \le 2^n$، $n = 0, 1, \ldots$ از آن حذف شده‌اند [۱۲]. در واقع اگر $\alpha \underline{\quad I \quad} \beta$ و $\alpha \underline{\quad P \quad} \beta$ به‌ترتیب تبدیل همانی و تبدیل

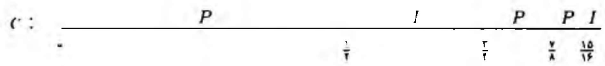
$$P(x) = \begin{cases} x + \frac{\beta-\alpha}{2} & \alpha < x < \frac{\beta+\alpha}{2} \\ x - \frac{\beta-\alpha}{2} & \frac{\beta+\alpha}{2} < x < \beta \end{cases}$$

را نشان دهند. آنگاه a، b، c و d عبارت‌اند از

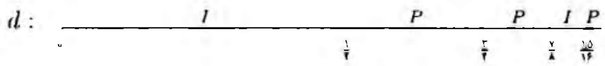


$$a = P$$

$$b = PPIPPI\ldots$$



$$c = PIPPIP\ldots$$



$$d = IPPIPP\ldots$$

اکنون دلیل اینکه (مثلاً) b روی درختی با ریشهٔ $\underbrace{11\cdots1}_{k}0$ (به‌پیمانهٔ ۳) $k \equiv 0, 1$ مانند a روی درخت Δ عمل می‌کند، بیشتر روشن می‌شود.

گروه C دارای نمایش متناهی نیست، در واقع ایزیونوک[1] ثابت کرده است [۲۳] که اگر $w_0 = ad$ و به ازای هر $i \ge 0$، w_{i+1} را با جایگزینی

$$a \to aca,\ b \to a,\ c \to b, d \to c$$

از w_i به‌دست آوریم آنگاه

$$\begin{aligned} G = \langle a,b,c,d \mid a^2 &= b^2 = c^2 = d^2 = bcd \\ &= w_i^4 = (w_i w_{i+1})^2 = 1 \qquad i \ge 0 \rangle \end{aligned}$$

یک نمایش مینیمال برای G است.

۳. گروههای رام

مفهوم گروه رام را در سال ۱۹۲۹ فون‌نویمان در ارتباط با پارادوکس باناخ‌ـتارسکی مطرح کرد. تعریف وی از این مفهوم مبتنی است بر مفهوم اندازه و از این قرار است.

می‌گوییم گروه G رام است اگر روی سیگما‌ـجبر تمام زیر مجموعه‌های G اندازهٔ جمعی‌ـمتناهی μ وجود داشته باشد به طوری که

الف) $\mu(G) = 1$

ب) $\mu(gA) = \mu(A)$ بهازای هر $g \in G$ و هر $A \subseteq G$.

فون‌نویمان ثابت کرد که

(i) اگر G رام و H زیر گروهی از G باشد آنگاه H نیز رام است.

(ii) اگر N زیر گروه نرمال گروه رام G باشد آنگاه $\frac{G}{N}$ نیز رام است.

1. Lysenok

(iii) اگر G_α خانواده‌ای از گروههای رام و G حد مستقیم آنها باشد آنگاه G رام است.

(iv) اگر F توسیعی از گروه رام G توسط یک گروه رام دیگر باشد آنگاه F نیز رام است.

همچنین می‌توان ثابت کرد که گروههای تقریباً حلپذیر و موضعاً متناهی رام هستند. از طرف دیگر گروه آزاد با دو مولد و لذا هر گروهی که این گروه را به‌عنوان زیرگروه خود داشته باشد رام نیست.

فولنر[1] در سال ۱۹۵۵ اولین معیار رام بودن را برای یک گروه به‌صورت زیر بیان کرد.

قضیهٔ ۷. (فولنر) گروه G رام است اگر و تنها اگر دنبالهٔ $\{F_n\}$ از زیرمجموعه‌های متناهی G وجود داشته باشد به‌طوری که

(الف') $$\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = G$$

(ب') $$F_n \subseteq F_{n+1}$$

(پ') $$\lim \frac{|gF_n \Delta F_n|}{|F_n|} = 0$$ به‌ازای هر $g \in G$،

در اینجا $|F|$ معرف تعداد اعضای مجموعهٔ F و $F\Delta E$ معرف تفاضل متقارن مجموعه‌های E و F است. در واقع شرایط قضیهٔ فولنر صورت ترکیبیاتی مفهوم تجزیهٔ منظم رویه‌های ریمان آلفرس است. می‌گوییم خمینهٔ دوبعدی ریمانی M تجزیهٔ منظم دارد اگر ناحیه‌های چندضلعی D_i، $i = 1, 2, \cdots$ در M وجود داشته باشند به‌طوری که

(۱) $$\bigcup_{i=1}^{\infty} D_i = M$$

(۲) $$D_i \subset D_{i+1}$$

(۳) $$\lim_{i\to\infty} \frac{l(\partial D_i)}{S(D_i)} = 0$$

که در آن $l(\partial D_i)$ طول محیط D_i و $S(D_i)$ مساحت D_i است.

به آسانی دیده می‌شود که صفحهٔ اقلیدسی تجزیهٔ منظم دارد ولی صفحهٔ لباچفسکی از این تجزیه بی‌بهره است. مثلاً

$$D_i = \{(x,y) \in R^2 \mid |x| + |y| \le i \quad i = 1, 2, \cdots\}$$

یک تجزیهٔ منظم $\mathbb{R}^2$ است. توجه می‌کنیم که

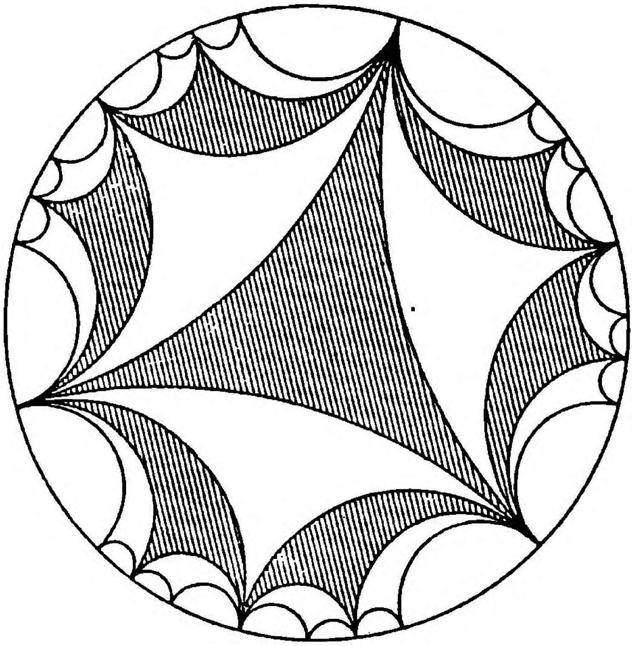
$$\lim_{i\to\infty} \frac{l(\partial D_i)}{S(D_i)} = \lim_{i\to\infty} \frac{4\sqrt{2}i}{2i^2} = 0$$

در شکل ۴ آجرفرشی از صفحهٔ هذلولوی در الگوی قرص پوانکاره مشاهده می‌کنید.* هر یک از مثلثهای این آجرفرش با مثلث دیگر قابل انطباق است. با استفاده از این آجرفرش، تجزیهٔ $\{D_i\}_{i=1}^{\infty}$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

1. Folner

* در این مورد به کتاب زیر مراجعه کنید

Magnus, *Noneuclidean Tesselations and Their Groups*, AP (1974)



شکل ۴

D_1: ناحیهٔ مثلثی وسط شکل؛ D_2: اجتماع D_1 با سه ناحیهٔ مثلثی کنار D_1؛ D_3: اجتماع D_2 و ناحیه‌های مثلثی اطراف D_2 که یک ضلع مشترک با مثلثهای واقع در $D_2 - D_1$ دارند؛ و الی آخر.

چون اندازهٔ هر یک از زاویه‌های مثلث D_i صفر است پس $S(D_i) = \pi$ و چون هر یک از اضلاع D_i دو نقطه در بینهایت را به‌هم وصل می‌کند پس $l(\partial D_i) = \infty$. در نتیجه $\frac{l(\partial D_i)}{S(D_i)} = \infty$، و لذا $\{D_i\}$ تجزیه منظمی برای صفحهٔ هذلولوی نیست.

علاوه بر تشابه ظاهری شرایط فولنر و تجزیهٔ منظم خمینه‌های ریمانی، قضیهٔ زیر ارتباط عمیق بین تجزیه‌پذیری و رام بودن را بیان می‌کند.

قضیهٔ ۸. فرض کنید M یک خمینه ریمانی فشرده و $\widetilde{M} \to M$ پوشش منظم متناظر با زیرگروه نرمال H از $\pi_1 M$ باشد. در این صورت M دارای تجزیهٔ منظم است اگر و تنها اگر گروه تبدیلهای پوششی $G \simeq \frac{\pi_1(M)}{H}$ رام باشد. [۱۶].

تاکنون تلاشهای زیادی برای مشخص کردن گروههای رام صورت گرفته است. ردهٔ گروههای آبلی و گروههای حاصل از این گروهها با اعمال چهارگانهٔ $(i) - (iv)$ فوق را ردهٔ گروههای رام ابتدایی می‌نامیم. این رده تنها ردهٔ شناخته شدهٔ گروههای رام در زمان فون‌نویمان بود و لذا دی[1] را به طرح سوال زیر سوق داد.

آیا ردهٔ EG گروههای رام ابتدایی برابر است با ردهٔ AG گروههای رام؟

در سال ۱۹۸۵ گریگورچوک در مقاله‌ای [۱۳] به این سؤال دی پاسخ منفی داد. وی با استفاده از پاسخ منفی خود به‌سؤال میلنر، گروه متناوبی ساخت که متعلق به EG نیست. گریگورچوک در مقالهٔ خود سؤال دومی نیز به شرح زیر مطرح کرد.

1. M.Day

اگر NF ردهٔ گروههایی باشد که گروه آزاد با دو مولد زیرگروه آنها نیست، آیا $AG = NF$؟

برای پاسخ دادن به سؤال دوم دی لازم است که یک معیار ترکیبیاتی برای مفهوم گروه رام ارائه شود.

فرض کنید گروه G توسط مجموعهٔ متناهی $S = \{a_1^{\pm 1}, \cdots, a_n^{\pm 1}\}$ تولید شده باشد. اگر F_n گروه آزاد تولید شده توسط S باشد و $G = \frac{F_n}{N}$، آنگاه عدد

$$\alpha = \limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|N_n|}$$

را نمای رشد G می‌نامیم. در اینجا N_n مجموعهٔ اعضایی از N است که طولشان n باشد. اهمیت این مفهوم در قضیهٔ زیر نهفته است.

قضیهٔ ۹. G رام است اگر و تنها اگر $\alpha = 2m - 1$ [۱۶].

در نتیجه، ویژگی رام بودن گروه G به‌اندازهٔ هستهٔ N در نمایش به‌صورت یک گروه خارج‌قسمت $\frac{F_m}{N}$ مربوط می‌شود. اولشانسکی اولین کسی بود که با ارائه دادن مثال ناقضی، نادرستی حدس $AG = NF$ را ثابت کرد. [۲۶].

در سال ۱۹۷۵ آدیان[1] ثابت کرد که گروه آزاد متناوب برنساید

$$B(m,n) = < a_1, a_2, \cdots, a_m | x^n = 1 > \qquad (1.3)$$

به‌ازای $m \geq 2$ و $n \geq 665$ دارای رشدنمایی است. به‌علاوه حدس زد که این گروه رام نیست، وی سپس با استفاده از قضیهٔ فوق حدس خود را در سال ۱۹۸۲ ثابت کرد [۱۶].

با توجه به اینکه هر گروهی که گروه آزاد با دو مولد زیرگروه آن باشد رام نیست، این سؤال مطرح است که آیا گروه غیر رامی وجود دارد که گروه آزاد با دو مولد را به‌عنوان زیرگروه خود نداشته باشد. این مسأله را برای نخستین بار اولشانسکی [۲۷] حل و ثابت کرد که

قضیهٔ ۱۰. گروه غیر رامی وجود دارد که هر یک از زیرگروههای آن دوری است.

اگر چه اثبات این قضیه مبتنی بر تقریب تابع رشد گروه خاصی است، گروموف با استفاده از مفهوم دیگری بنام Tـ گروه، گروه غیر رامی ارائه داده است که شامل زیرگروه آزاد با دو مولد نیست [۲۱].

گروههای رام دارای ویژگیهای بسیار زیبایی هستند. فرض کنید $S = \{a_1^{\pm 1}, \cdots, a_m^{\pm 1}\}$ یک مجموعهٔ متناهی‌ـمولد برای G باشد. توزیع احتمال p روی G را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$p(a_i^\epsilon) \geq 0,\ p(a_i^\epsilon) = p(a_i^{-\epsilon}), \sum_{i=1}^{m} p(a_i^\epsilon) = 1 \quad \epsilon = \pm 1$$

و احتمال انتقال $g \to g a_i^\epsilon$ برابر است با $p(a_i^\epsilon)$. اگر $p_{e,e}^{(n)}$ احتمال بازگشت به e (عضو خنثای G) پس از n انتقال باشد، عدد

$$r_S = \limsup_n \sqrt[n]{p_{e,e}^{(n)}}$$

1. Adyan

را شعاع طیفی G نسبت به S می‌نامیم. با استفاده از نابرابری کوشی‌ـشوارتس داریم

$$1 = (\sum_{g \in B(e,n)} P_{e,g}^{(n)})^2 \leq (\sum_{g \in B(e,n)} 1)(\sum_{g \in B(e,n)} [p_{e,g}^{(n)}]^2) = \gamma(n) p_{e,e}^{(2n)}$$

از این روابط و تعریف شعاع طیفی نتیجه می‌شود که

$$\frac{1}{\sqrt{\gamma_S}} \leq r_S \leq 1$$

با استفاده از شعاع طیفی اکنون می‌توانیم معیار کستن[1] را برای رام بودن G بیان کنیم.

قضیهٔ ۱۱. G رام است اگر و تنها اگر $r_S = 1$ [۱۸].

علاوه بر اینها اخیراً گریگورچوک و سیلبرشتاین الگوریتمی ارائه داده‌اند که تشخیص می‌دهد که گروه تک رابطه‌ای داده شده‌ای رام هست یا نه. اتفاقاً این الگوریتم مسألهٔ یکریختی (یعنی، اینکه دو گروه داده شده یکریخت هستند یا نه) را برای ردهٔ گروههای رام تک رابطه‌ای حل کرده و به این سؤال که آیا گروه، رشدنمایی یا زیرنمایی دارد پاسخ مثبت می‌دهد [۶].

۴. سری رشد

به‌جفت مرتب (G, S) که در آن G یک گروه و S یک مجموعهٔ مولد متقارن G است و $e \notin S$، یک سری به نام سری رشد G نسبت به S به‌صورت زیر نسبت می‌دهیم.

تعریف. سری

$$F_S(z) = \sum_{g \in G} z^{l(g)}$$

را که در آن $l(g)$ طول g نسبت به S است، سری رشد G نسبت به S می‌نامیم. توجه می‌کنیم که اگر

$$\sigma(n) = \sigma_S(n) = \#\{g \in G | l(g) = n\}$$

تابع رشد کروی G نسبت به S باشد آنگاه

$$F_S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma(n) z^n$$

و نیز اگر $a_n = \gamma(n)$ مقدار تابع رشد G نسبت به S در نقطهٔ n باشد، آنگاه

$$\sigma(n) = a_n - a_{n-1}$$

و لذا با فرض $a_{-1} = 0$ و $a_0 = 1$ داریم

$$F_S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n - a_{n-1}) z^n = (1 - z) \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

1. Kesten

بنابراین

$$\sum_{n=0}^{\infty}\gamma(n)z^n = \frac{F_S(z)}{1-z} = G(z)$$

گاه $G(z)$ سری رشد و $F_S(z)$ سری رشد کروی G نسبت به S نامیده می‌شوند.

سولومون [۲۸] اولین کسی بود که سری رشد گروههای کاکستر را محاسبه کرد. در فصل ۴ کتاب [۲]؛ در تمرین ۲۶، محاسبهٔ سری رشد گروههای کاکستر توسط فرمولهای بازگشتی مطرح و در تمرینهای ۱۵ تا ۲۶ فصل چهارم همان کتاب حل شده‌اند. ژان پی‌یر سر ثابت کرد [۳۱] که صفرها و قطبهای سری رشد گروههای کاکستر، واحدهای جبری هستند و به‌استثنای ± 1 به‌صورت جفتهای معکوس ظاهر می‌شوند. به‌علاوه وی ثابت کرد که اگر $\chi(G)$* مشخصهٔ اویلر برای گروه کاکستر G باشد، آنگاه

$$F_S(1) = \frac{1}{\chi(G)} \qquad (*)$$

توجه می‌کنیم که در تمام موارد فوق سری رشد نسبت به مجموعهٔ مولد طبیعی گروه کاکستر محاسبه می‌شود. جیمز کانن می‌گوید [۳] که برای نخستین بار مفهوم سری رشد و اثبات شهودیِ گویا بودن این سری را در مورد گروههای فشردهٔ خمینه‌های سه‌بعدی هذلولوی از ترستن شنیده‌است. علاوه بر این موارد توجه می‌کنیم که اگر گروه G سری رشد گویا داشته باشد، آنگاه مسألهٔ کلمه برای آن حل‌پذیر است، بدین معنی که الگوریتمی وجود دارد که به‌ازای هر کلمهٔ متعلق به گروه آزاد تولید شده توسط S، تعیین می‌کند این کلمه مساوی است با عضو خنثای گروه G یا خیر.

فرض کنید G یک گروه و S یک مولد متناهی آن باشد می‌گوییم (G,S) یک دستگاه کاکستر است اگر و تنها اگر G دارای نمایش زیر باشد

$$G = < s \in S \,|\, (st)^{m_{s,t}} = 1,\ s,t \in S >$$

که در آن، $m_{s,s} = 1$ و اگر $s \neq t$ آنگاه $m_{s,t} \in \{2,3,\cdots,\infty\}$ توجه می‌کنیم که تساوی $m_{s,t} = \infty$ به‌معنای عدم وجود رابطه‌ای بین s و t است. قضیهٔ زیر را داریم

قضیهٔ ۱۲. فرض کنید (G,S) یک دستگاه کاکستر باشد.

الف) اگر S متناهی باشد آنگاه

$$\frac{z^m + (-1)^{|S|+1}}{F_S(z)} = \sum_{X \subsetneq S}\frac{(-1)^{|X|}}{F_X(z)} \qquad (1.4)$$

که در آن $m = \max_{w\in G} l(w)$

ب) اگر S نامتناهی باشد، آنگاه

$$\frac{(-1)^{|S|+1}}{F_S(z)} = \sum_{X \subsetneq S}\frac{(-1)^{|X|}}{F_X(z)} \qquad (2.4)$$

* برای تعریف مشخصه اویلر یک گروه به مرجع [۳۲] یا
K.S. Brown, *Cohomology of Groups*, Springer-Verlag (1982)
رجوع کنید

برای اثبات به [۲] یا [۲۸] مراجعه کنید. بنابراین برای محاسبهٔ سری رشد یک گروه کاکستر باید سری رشد زیرگروههای کاکستر آن را که توسط زیر مجموعه‌های سرهٔ S تولید می‌شوند محاسبه کنیم. از (۱) و (۲) نتیجه می‌شود که $F_S(z)$ گویاست و صفرهای آن ریشه‌های واحدند.

سری رشد گروههای آزاد و گروههای دوری و گروههای بنیادی برخی از رویه‌ها را گریسن در تز دکتری خود به‌دست آورده است [۱۱]. در واقع اگر F_m گروه آزاد تولید شده توسط $S = \{a_1^{\pm 1}, a_2^{\pm 1}, \cdots, a_m^{\pm 1}\}$ باشد، آنگاه با توجه به اینکه تعداد اعضای F_m به‌طول $n \geq 2$ مساوی است با $2m(2m-1)^{n-1}$، داریم

$$\begin{aligned} F_S(z) &= 1 + 2mz + 2m(2m-1)z^2 + \cdots \\ &= 1 + 2mz[1 + (2m-1)z + \cdots] \\ &= 1 + \frac{2mz}{1-(2m-1)z} = \frac{1+z}{1-(2m-1)z} \end{aligned}$$

کانن [۳] سری رشد گروههای رویه

$$G_g = \langle a_1^{\pm 1}, \cdots, a_g^{\pm 1}, b_1^{\pm 1}, \cdots, b_g^{\pm 1} \,|\, \prod_{i=1}^{g}[a_i, b_i] = 1 \rangle$$

را به‌ازای $g \geq 2$ و با استفاده از گراف کیلی و رنگ‌آمیزی رأسهای آن محاسبه کرد. وی با تعریف نوع مخروطی تشخیص داد که رأسهای این گراف، $(g+1)$ نوع مخروطی بیشتر نیستند و لذا رابطه‌ای بازگشتی بین ضرایب تابع $F_S(z)$ به‌دست آورد و در نتیجه برای اولین بار سری رشد **گروههای رویه** با مولد $S = \{a_1^{\pm 1}, a_2^{\pm 1}, \cdots, a_g^{\pm 1}, b_1^{\pm 1}, \cdots, b_g^{\pm}\}$ را به‌ازای $g \geq 3$ به‌صورت زیر ارائه داد:

$$F_S(z) = \frac{1 + 2z + 2z^2 + \cdots + 2z^{g-1} + z^g}{1 - (2g-2)z - \cdots - (2g-2)z^{g-1} + z^g} \quad g \geq 3$$

توجه می‌کنیم که در این حالت مشخصهٔ اویلر رویهٔ با گونهٔ g عبارت است از

$$\chi(G) = 2 - g = \frac{1}{F_S(z)}$$

فلوید و پلاتنیک [۹] اولین کسانی بودند که فرمولی برای $F_S(1) - \frac{1}{\chi(G)}$ در مورد گروههای فوخسی با مولدهای ویژه به‌نام مجموعه‌های مولد هندسی به‌دست آوردند. این عبارت معمولاً برابر با صفر است ولی آنها مثالهایی ارائه کردند که این عبارت در آن موارد صفر نبود و لذا اولین مثالهای ناقض $F_S(1) = \frac{1}{\chi(G)}$ را به دست دادند.

والتر پری در سال ۱۹۸۸ در مقاله‌ای [۲۹] خانواده‌ای از مثالهای ناقض $F_S(1) = \frac{1}{\chi(G)}$ را ارائه داد. وی ابتدا نشان داد که اگر به‌ازای $m \geq 1$، مجموعه

$$T_m = \{g \in G \,|\, l(g) \leq m\}$$

به‌عنوان مجموعهٔ مولد G در نظر گرفته شود آنگاه $F_S(z)$ و $F_{T_m}(z)$ در رابطهٔ

$$F_{T_m}(z^m) = \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{1-z^m}{1-\xi^k z}f(\xi^k z) \qquad (3.4)$$

صدق می‌کنند، که در آن $\xi = e^{۲i\pi/m}$ یک ریشهٔ mام واحد است. اکنون روشن است که اگر $F_S(z)$ قطبی در ریشه‌های واحد نداشته باشد آنگاه

$$F_{T_m}(۱) = F_S(۱) \qquad (۴.۴)$$

ولی اگر $F_S(z)$ قطبی در یکی از ریشه‌ها داشته باشد، آنگاه ممکن است این تساوی بر قرار نباشد. به‌عنوان مثال به‌آسانی می‌توان دید که سری رشد گروه $\mathbb{Z}$ نسبت به مجموعهٔ مولد $S = \{۲,۳\}$ عبارت است از

$$f_S(z) = \frac{۱+۳z+۴z^۲-۲z^۳}{۱-z}$$

فرض کنید $G_i = \mathbb{Z}$ و $S_i = S$، $i = ۱,۲$، دو نسخه از این گروه باشند. می‌دانیم که [۴۰] سری رشد حاصلضرب آزاد $G_۱ \times G_۲$ نسبت به مولد $S_۱ \cup S_۲$ در رابطه

$$\frac{۱}{F_{S_۱\cup S_۲}(z)} = \frac{۱}{F_{S_۱}(z)} + \frac{۱}{F_{S_۲}(z)} - ۱$$

صدق می‌کند. بنابراین سری رشد گروه $G_۱\times G_۲$ نسبت به مولد $S_۱\cup S_۲$ عبارت است از

$$F_{S_۱\cup S_۲}(z) = \frac{۱+۳z+۴z^۲-۲z^۳}{(۱+z)(۱-۶z+۲z^۲)}$$

حال اگر در (۳)، m را مساوی با ۲ بگیریم، خواهیم داشت

$$F_{T_۲}(x) = \frac{۱+۲۴x-۴x^۲}{۱-۳۲x+۴x^۲}$$

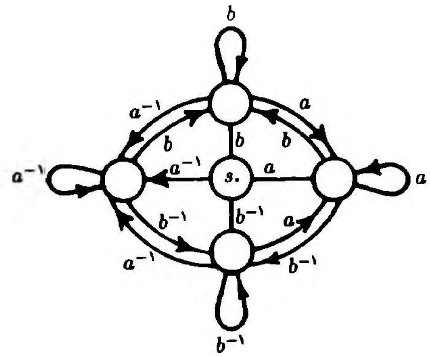
و لذا

$$F_{T_۲}(۱) = -\frac{۷}{۹} \neq -۱ = \frac{۱}{\chi(G_۱\times G_۲)}$$

در زمینهٔ محاسبهٔ سریها و لذا تابع رشد از روشهای گوناگونی استفاده شده است. وگرایک [۳۸]، دولاهارپ [۲۱]، فلوید و پلانتیک [۸، ۹] با استفاده از یک ناحیهٔ بنیادی، سری رشد برخی گروههای فوخسی و کاکستر را به‌دست آورده‌اند. روش آنها هندسی و مبتنی است بر چگونگی عمل گروه روی ناحیهٔ بنیادی.

روش دیگری برای محاسبهٔ تابع و سری رشد، استفاده از اتوماتونهای متناهی است. استول [۳۴] و نگارنده [۴۰] با استفاده از این روش، تابع و سری رشد گروههای بسیاری را به دست آورده‌اند.

یک اتوماتون متناهی حالت، عبارت است از یک پنج‌تایی مرتب $M = (S, A, \mu, Y, s_\circ)$ که در آن S و A مجموعه‌های متناهی و مجزا هستند و به ترتیب مجموعهٔ حالتها و الفبای M نامیده می‌شوند. بنا به تعریف، $\mu : S\times A \to S$ تابع انتقال، $Y\subset S$ مجموعهٔ حالتهای مجاز و $s_\circ \in S$ حالت آغازی و حالتهای $S - Y$ حالتهای مردود نام دارند. هر اتوماتون متناهی حالت M را می‌توان با یک گراف جهتدار و برچسب‌دار متناهی نشان داد. رأسهای این گراف اعضای Sاند، و رأس $s_۱$ به رأس $s_۲$ با برچسب $a\in A$ وصل می‌شود اگر $\mu(s_۱, a) = s_۲$ [۳۵]. زبان اتوماتون



شکل۵ اتوماتون متناهی حالت

M مجموعهٔ کلماتی چون $a_{i_۱}a_{i_۲}\cdots a_{i_k} \in A^*$ است اگر و تنها اگر با شروع از حالت آغازی و طی مسیر با برچسبهای به ترتیب $a_{i_۱}, \cdots, a_{i_k}$ به عضوی از Y برسیم. مثلاً زبان اتومان متناهی حالت شکل ۵ در تناظر ۱ـ۱ با اعضای گروه آزاد با دو مولد است. توجه کنید که در این اتوماتون، حالت آغازی با $s_\circ$ مشخص شده و هیچ حالت مردودی رسم نشده است.

اکنون اگر به گروه داده‌شدهٔ G با مجموعهٔ مولد متناهی S با $e \notin S$ و $S = S^{-۱}$، اتوماتون M را چنان نسبت دهیم که زبان پذیرفته‌شده توسط M، $L(M)$، با G در تناظر یک به یک باشد و طولهای اعضای متناظر در $L(M)$ و G مساوی باشند، آنگاه سریهای رشد $L(M)$ و G یکسان خواهند بود. سری رشد $L(M)$ را به‌صورت

$$L(z) = ۱ + \sum_{n=۱}^{\infty} c_n z^n$$

که در آن c_n تعداد زنجیرهای به طول n است که توسط M پذیرفته می‌شوند، تعریف می‌کنیم.

$L(z)$ را سری رشد M نیز می‌نامند، از آنجا که سری رشد M تابعی گویاست [۴۰] از این روش نتیجه می‌شود که سری رشد گروه G تابعی گویاست.

یکی دیگر از روشهای محاسبهٔ سریهای رشد، استفاده از دستگاههای بازنویسی است. فرض کنید مجموعهٔ متناهی $S = S^{-۱}$ مولد گروه G باشد. S^* را مجموعهٔ تمام کلمات با الفبای S همراه با کلمهٔ تهی می‌گیریم.

یک دستگاه بازنویسی روی S زیرمجموعه‌ای نامتناهی چون R از $S^*\times S^*$ است. اگر $(u,v)\in R$، هدف این است که در هر کلمهٔ $w \in S^*$ به‌جای هر کلمهٔ u کلمهٔ v را قرار دهیم، بنابراین فرض می‌کنیم R شامل اعضایی به‌صورت (u,v) نباشد. و نیز از این به بعد اعضای R را به‌صورت $u \to v$ نشان می‌دهیم و آن را یک قانون بازنویسی و کلمهٔ u را یک کلمهٔ ممنوع می‌نامیم. با استفاده از این قانون کلمهٔ $w = w_۱uw_۲$ به کلمهٔ $w' = w_۱vw_۲$ باز نوشته می‌شود. در این حالت می‌نویسیم $w \to w'$؛ و این کار را ساده‌سازی w می‌نامیم. حال فرض کنید $w \to^* w'$ به معنای کاربرد تعداد متناهی از قوانین باشد.

(الف) R یا مجموعهٔ قوانین $u \to v$ که در آن $(u,v)\in R$ نوتری نامیده می‌شود اگر دنباله‌ای نامتناهی به‌صورت $w\to w' \to w'' \to \cdots$ وجود نداشته باشد.

ب) R را همشار[1] می‌نامیم اگر از $w \to^* w_1$ و $w \to^* w_2$ وجود کلمه‌ای چون w_3 نتیجه شود که

$$\begin{tikzcd} & w_2 \arrow[dr, "*"] & \\ w \arrow[ur, "*"] \arrow[dr, "*"'] & & w_3 \\ & w_1 \arrow[ur, "*"'] & \end{tikzcd}$$

پ) R را همشار موضعی می‌نامیم اگر به‌ازای هر دو ساده سازی $w \to w_1$ و $w \to w_2$ کلمه‌ای چون w_3 وجود داشته باشد که

$$\begin{tikzcd} & w_1 \arrow[dr, "*"] & \\ w \arrow[ur] \arrow[dr] & & w_3 \\ & w_2 \arrow[ur, "*"'] & \end{tikzcd}$$

ت) دستگاه R روی S را که نوتری و همشار باشد، کامل می‌نامیم. کلمهٔ w را تحویل‌ناپذیر تحت R می‌نامیم اگر نتوان w را توسط قوانین R ساده کرد.

فرض کنید طول $w \in S^*$ مساوی باشد با تعداد حرفهای تشکیل‌دهندهٔ w، و آن‌را با $|w|$ نشان دهید.

ث) R را طول کوتاه‌کن می‌نامیم، اگر از $w \to^* w'$ نتیجه شود که $|w'| \le |w|$.

روشن است که هر ترتیب روی S ترتیبی روی S^* القا می‌کند. بنابراین اگر S از ابتدا مرتب باشد و به‌ازای هر $(u, v) \in R$ داشته باشیم $|u| \le |v|$، آنگاه R طول کوتاه‌کن خواهد بود. به‌آسانی می‌توان دید که هر دستگاه طول کوتاه‌کن، نوتری است.

لم ۳. برای دستگاههای نوتری، مفاهیم همشاری و همشاری موضعی معادل‌اند [۳۳].

به‌آسانی می‌توان دید که اگر R دستگاهی طول کوتاه‌کن و کامل روی S، و P مجموعهٔ مؤلفه‌های چپ اعضای R، یعنی مجموعهٔ کلمه‌های ممنوع، با ویژگیهای زیر باشد

الف) $r \notin P$ به‌ازای هر $r \in S$،

ب) از هر دو عضو P هیچ‌یک زیرکلمهٔ دیگری نباشد،

و اگر

$$G = \langle S | u_i = v_i, (u_i, v_i) \in R \rangle$$

نمایش نیمگروهی G باشد، آنگاه کلمات تحویل‌ناپذیر تحت قوانین R صورت نرمال اعضای G هستند.

برای پیدا کردن سری رشد این گروه، مفهوم زنجیر دقیق کلمات ممنوع را به‌صورت زیر توصیف می‌کنیم.

(i) هر عضو $u \in P$ را یک زنجیر دقیق[2] با رتبهٔ ۱ می‌نامیم

(ii) اگر زنجیر دقیق به‌ازای $l \le k$ تعریف شده باشد، زنجیر $(u_1, u_2, \cdots, u_k, u)$ را دقیق از رتبهٔ $(k + 1)$ می‌نامیم اگر $(u_1, u_2, \cdots, u_k)$ دقیق باشد و کلمهٔ ممنوع u' یافت نشود که بین u_k و u بتوان قرار داد.

1. confluent 2. rigorous chain

روشن است که به هر زنجیر دقیق فقط یک کلمهٔ متعلق به S^* می‌توان نسبت داد. اکنون می‌توانیم سری رشد گروه G با نمایش (نیمگروهی فوق) را به دست آوریم.

قضیهٔ ۱۳. فرض کنید G توسط نمایش فوق داده شده باشد. اگر دستگاه بازنویسی R کامل و طول کوتاه‌کن باشد و در شرایط (۱) و (۲) فوق صدق کند، آنگاه

$$F_S(z) = \frac{1}{1 - dz + \sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{i+1}\sum b_n^i z^n}$$

که در آن b_n^i تعداد کلمه‌های به طول n است که از زنجیرهای دقیق رتبهٔ i حاصل می‌شوند.

خوانندهٔ علاقه‌مند می‌تواند برای اثبات به یکی از مرجعهای [۱۴] و [۴۰] مراجعه کند.

نگارنده با استفاده از این فرمول، سری رشد گروههای بسیار، از جمله سری رشد گروههای رویه را محاسبه کرده است.

تاکنون سری رشد خانواده‌های بسیاری ازگروههای متناهی-مولد محاسبه شده‌اند ولی بررسی تحلیلی خاصی روی آنها صورت نگرفته است. مثلاً کانن در [۴] ثابت می‌کند که این سری برای گروههای هم‌فشردهٔ[1] هذلولوی، یعنی هرگروه از طولپاییهای هذلولوی با ناحیهٔ بنیادی فشرده تابعی گویاست. همچنین با استفاده از اتوماتون متناهی حالتی با الفبای S، مولد متناهی گروه هذلولوی G، که زبان پذیرفته شده توسط آن در یک تناظر یک‌به‌یک با G است، ثابت شده است که سری رشد G گویاست [۵ و ۷]. اجویت و همکارانش سری رشد گروههای باومسلاگ-سالیتر[2]

$$G(m, n) = \langle x, y \subset | y^{-1}x^m y = x^n \rangle$$

را به‌ازای $m = n$ و $n \ge 2$، و نیز $m = 1$، $n = 2, 3, \cdots$ محاسبه کرده و توابع گویا به‌دست آورده‌اند. آنان این کار را با استفاده از یک دستگاه بازنویسی غیر همشار روی الفبای $\{x, x^{-1}, y, y^{-1}\}$ و با استفاده از نرم افزار میپل انجام داده‌اند. با این حال بسیاری حدس می‌زنند که سری رشد گروه $G(2, 3)$ تابعی اصم باشد. علی‌رغم گویا بودن توابع رشد بسیاری از گروهها، پاریکات و شارپ [۳۱] ثابت کرده‌اند که زیرگروه جابه‌جاگر گروه رویهٔ G_g با $g \ge 2$، نسبت به مولد معرفی شده در صفحهٔ ۸، سری رشد اصم دارد.

اخیراً بارتولدی مفهوم سری رشد را به نحو چشمگیری تعمیم داده و مفاهیم سری رشد کامل و سری رشد عملگری را معرفی کرده است [۱۵]. گریگورچوک و یکی از شاگردانش با استفاده از روشهای [۱۴ و ۴۰] سری رشد کامل گروههای رویه را محاسبه کرده‌اند.

پایان سخن

مفاهیم بسیار دیگری نیز در ارتباط با تابع و سری‌رشد گروههای متناهی-مولد معرفی شده و مورد مطالعه‌اند [۱۵]. از جملهٔ این مفاهیم نرخ رشد مینیمال

1. co-compact 2. Baumslag-Soliter

است. بنا به تعریف اگر $\gamma_S(n)$ تابع رشد گروه G نسبت به مجموعهٔ مولد S باشد، آنگاه

$$\gamma(G) = \inf_S \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\gamma_s(n)}$$

را که در آن بزرگترین کران پایین روی مجموعهٔ تمام مولدهای متناهی G محاسبه می‌شود، نرخ رشد مینیمال G می‌نامیم. تقریباً تمام آنچه دربارهٔ γ معلوم است در قضیهٔ ۱۴ آمده است [۱۵].

قضیهٔ ۱۴. (i) اگر F_m گروه آزاد تولید شده توسط m عضو باشد آنگاه $\gamma(F_m) = 2m-1$؛

(ii) فرض کنید H یک زیر گروهِ با شاخص متناهی از گروه داده شدهٔ G، و K یک گروه خارج‌قسمت H باشد. داریم

الف) اگر $\gamma(K) > 1$، آنگاه $\gamma(H) > 1$،

ب) اگر $\gamma(H) > 1$، آنگاه $\gamma(G) > 1$،

پ) اگر G دارای نمایشی با n مولد و $m \le n-2$ رابطه باشد آنگاه $\gamma(G) > 1$،

ت) اگر G دارای نمایشی با n مولد و $n-1$ رابطهٔ $r_1, \cdots, r_{n-1}$ باشد که در آن $r_k = (r_0)^k$ به‌ازای کلمهٔ ناتهی‌ای مانند r_0 و $k \ge 1$، آنگاه $\gamma(G) > 1$.

و اکنون چند مسأله حل نشده:

۱. سری رشد گروههای باومسلاگ‌ـسالیتر

$$G = \langle a, b | a^{-1} b^{2} a = b^{3} \rangle$$

و ریچارد تامسن

$$\Gamma = \langle a, b | [ab^{-1}, b^{-1}ab] = [ba^{-1}, b^{-2}ab^{2}] = 1 \rangle$$

را محاسبه کنید.

۲. سری رشد گروههای برنساید

$$B(m,n) = < a_1, \cdots, a_m | X^n = 1 >$$

را محاسبه کنید.

۳. مقدار دقیق γ، نرخ رشد مینیمال، برای گروههای کاکستر و رویه چیست؟

۴. آیا گروهی چون G وجود دارد که به‌ازای هر مجموعهٔ متناهی‌ـمولد S، $\gamma_S(n) > 1$ ولی $\gamma(G) = 1$؟

۵. حدود γ را برای گروههای هذلولوی تعیین کنید.

۶. مقدار دقیق γ را در مورد گروههای رویه و گروههای کاکستر تعیین کنید.

سپاسگزاری از استادان بزرگوار آقای سیاوش شهشهانی که پیشنهاد تهیهٔ این نوشته را مطرح کردند و دستنوشته را با دقت مطالعه، و پیشنهادهای ارزنده‌ای دادند و نیز آقای رستیسلاو ایوانویچ گریگورچوک که از گفتگو با ایشان در نوشتن این مقاله سود بردم، بسیار سپاسگزارم.

مراجع

1. H. Bass, "The degree of polynomial growth of finitely generated nilpotent groups", *Proc. Lond. Math. Soc.*, (25)**3** (1972) 603-614.
2. N. Bourbaki, *Groupes et Algegres de Lie*, Hermann (1968).
3. J. W. Cannon, "The growth of the closed surface groups and compact hyperbolic groups", preprint (1979).
4. ———, "The combinatorial structure of cocompact discrete hyperbolic groups", *Geom. Dedicata.*, **16** (1984) 123-148.
5. D. J. Collins, M. Edjvet and C.P. Gill, "Growth series for the group $< x, y | x^{-1}yx = y^l >$", *Arch. Math.*, **62** (1994) 1-11.
6. T. G. Ceccherini-Silberstein, R.I. Grigorchuk, "Amenability and growth of one-relator groups", preprint (1996).
7. M. Edjvet, D. L. Johnson, "The growth of certain amalgamated free products and HNN-extensions", *J. Austral. Math. Soc. (Series A)* , **52** (1992) 285-298.
8. W. J. Floyd, S.P. Plotnick, "Growth functions on Fuchsian groups and the Euler characteristic", *Invent. Math.*, **88** (1987) 1-29.
9. ———, "Symmetries of planar growth functions", *Invent. Math.*, **93** (1988) 501-543.
10. E. Ghys and P. de la Harpe (eds.), *Sur les Groupes Hyperboliques d'apre's Mikhael Gromov*, Birkhäuser (1990).
11. M. A. Grayson, *Geometry and Growth in Three Dimensions*, Ph. D. Thesis, Princeton University (1983).
12. R. I. Grigorchuk, "On the Burnside problem about periodic groups", *Functional Analysis and its Applications*, (1)**14** (1980) 41-43.
13. ———, "On the Milnor's problem on group growth", *Dokl. AN SSSR*, (1)**271** (1983) 31-33.
14. ———, "Growth functions, rewriting systems, and the Euler characteristic", *Math. Zametki*, (5)**58** (1995).
15. R. I. Grigorchuk, P. de la Harpe, Preprint (1997)
16. R. I. Grigorchuk, P.F. Kurchanov, *Some Questions of Group Theory Related to Geometry* (پیش‌نویس یک کتاب چاپ نشده).
17. R. I. Grigorchuk, A. Machi, "An intermediate growth automorphism group of the real line", preprint, Dept. of Math. University of Rome Italy (1992).
18. R. I. Grigorchuk, M.J. Mamaghani, "On use of endomorphisms for constructing groups with specific properties", preprint, (IPM) (1996).

19. R. I. Grigorchuk, T. Nagnibeda, "Operator growth function of discrete groups", preprint (1996).

20. M. Gromov, "Groups of polynomial growth and expanding maps", *Publ. Math. IHES*, **13** (1981) 53-73.

21. ———, "Hyperbolic groups", *Easays in Group Theory*, S. M. Gersten (ed.), Springer-verlag (1987) 75-263.

22. P. de la Harpe, "An invitation to Coxeter", *Group Theory from Geometrical Viewpoint*, E. Ghys, A. Haelfliger, and A. Verjovsky (eds.), World Scientific (1991).

23. A. Machi, preprint (1994).

24. M. J. Mamaghani, "Growth functions of surface groups", *Math., Zametki*, (5)**58** (1995) 681-693.

25. J. W. Milnor, "A note on curvature and fundamental groups", *J. Differ. Geom.*, (1)**2** (1968) 1-7.

26. ———, "Growth of finitely generated solvable groups", *J. Differ. Geom.*, (1)**2** (1968) 447-449.

27. A. Yu. Ol'shanskii, "On a geometric method in the combinatorial group theory", *Proceedings of the Internationl Congress of Mathematicians, Warsaw* (1983) 415-424.

28. L. Paris, "Growth series of Coxeter groups", *Group Theory from Geometrical Viewpoint*, E. Ghys, A. Haelfliger, and A. Verjovsky (eds.), World Scientific (1991).

29. W. Parry, "Counterexamples involving growth series and Euler characteristics", *Proceedings of the Amer. Math. Soc.* (1)**102** (1988) 49-51.

30. M. Pollicot, R. Sharp, "Growth series for the commutator subgroup", preprint., IHES (1994).

31. G. Polya, G. Szego, *Problems and Theorems in Analysis* 1, Springer-Verlag (1972).

32. J.- P. Serre, "Cohomologie des groupes discrets", *Prospect in Mathematics*, Ann. of Math. Studies 70 (1971) 77-169.

33. C. C. Squier, "Word problems and a homological finiteness condition for monoids", *J. Pure Appl. Algebra*, **49** (1987) 201-217.

34. M. Stoll, "Some group presentations with rational growth", preprint (1994).

35. J.D. Ullman and J.E. Hopcroft, *Introduction to Automata theory, Languages and Computation*, Addison-Wesley, Reading (1979).

36. J. Tits, "Free Subgroups of linear groups", *J. Algebra* (2)**20** (1972) 250-270.

37. J. Tits, "Groupes a' croissance polynomiale [d'apres M. Gromov *et al.*]", *Seminaire Bourbaki*, No.572 (1980/81)

38. P. Wagreich, "The growth function of a discrete group", *Lecture notes in math.* 956, Springer-Verlag, (1982) 125-144.

39. J. Wolf, "Growth of finitely generated solvable groups and curvature of Riemannian manifolds", *J. Differ. Geom.*, (1)**2** (1968) 421-446.

۴۰ . جاورداری مقانی، محمد. رسالهٔ دکتری. دانشگاه صنعتی شریف

******

* محمد جاورداری مقانی، دانشگاه علامه طباطبایی