

ساختار موج شوک در دینامیک سیالات

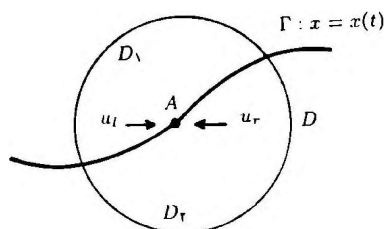
مجید محمودزاده نیکنام

تعریف (جواب ضعیف). فرض کنیم در معادله (۱)، تابع $u_0(x)$ انتگرالپذیر (لگ) باشد. در این صورت تابع انتگرالپذیر $u(x, t)$ را یک جواب ضعیف معادله (۱) گوئیم هرگاه برای هر تابع $\phi: \mathbb{R}^T \rightarrow \mathbb{R}$ با محمل^۱ فشرده داشته باشیم

$$\int \int_{t \geq 0} (\phi_t u + \phi_x f(u)) dx dt + \int_{\mathbb{R}} u_0(x) \phi(x, 0) dx = 0$$

اولین سؤالی که مطرح می‌شود، ارتباط بین جواب ضعیف و جواب کلاسیک معادله (۱) است. در واقع اگر معادله (۱) دارای جوابی کلاسیک باشد، آن جواب یک جواب ضعیف نیز خواهد بود. برعکس اگر تابع $u_0(x)$ یک تابع C^1 باشد و تابع C^1 مانند $u(x, t)$ یک جواب ضعیف معادله (۱) باشد، آنگاه $u(x, t)$ یک جواب کلاسیک آن معادله نیز هست. برای ملاحظه اثبات به [۲۴۶-۲۴۷] رجوع کنید. بر این اساس، می‌توان جواب ضعیف را تعمیم طبیعی جواب کلاسیک تصور کرد. (به تابلو صفحه بعد نگاه کنید).

دومین سؤالی که می‌توان مطرح کرد، این است که جوابهای ضعیف چگونه‌اند و یا چه خصوصیتی دارند؟ در پاسخ به این سؤال، در مورد برخی جوابهای ضعیف که روی خمهای هموار ناپیوستگی جهشی دارند مطالب زیر را می‌توان ذکر کرد. فرض کنیم $u(x, t)$ یک جواب ضعیف معادله (۱) باشد که در یک گوی D حول نقطه $A = (x_0, t_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ تعریف شده است. همچنین فرض کنیم خم هموار Γ در صفحه xt به معادله $x = x(t)$ که از نقطه A می‌گذرد، این گوی را به دو ناحیه ساده‌همبند مانند D_1 و D_2 تقسیم کند و تابع $u(x, t)$ در هریک از دو ناحیه D_1 و D_2 جواب کلاسیک معادله (۱) بوده روی خم Γ دارای ناپیوستگی جهشی باشد (شکل ۱).



شکل ۱

بین فیزیک و ریاضیات از دیرباز پیوندهای مختلفی وجود داشته است و این دو علم تأثیرات بسیار در یکدیگر گذاشته‌اند. مثلاً سریهای فوریه، نظریه توزیع برای حل معادلات دیفرانسیل جزئی، و ... ابتدا در قالب فیزیکی مطرح شده‌اند و سپس به صورت دقیق ریاضی بیان گشته‌اند.

بررسی پدیده شوک نیز از همین موارد است. این پدیده در فیزیک به وجود کمپانی که تغییرات ناگهانی دارند وابسته است. مثلاً وقوع انفجار یک نوع شوک است. بررسی شوک و یا به عبارت دیگر بررسی کمیات ناپیوسته در فیزیک در مباحث مختلفی مطرح می‌شود. یکی از این مباحث دینامیک گازهاست. بررسی گازها در میدانهای مغناطیسی در حضور میدان الکتریکی خارجی، به اختصار MHD یا MFD^۲ نامیده می‌شود.

در این مقاله می‌خواهیم به طور کلی درباره جنبه ریاضی «وجود ساختار برای موج شوک» و به طور اخص درباره «وجود ساختار برای موج شوک در محیط MFD» بحث کنیم.

۱. مفهوم شرط «وجود ساختار برای موج شوک»

معادله دیفرانسیل جزئی زیر را در نظر می‌گیریم

$$\begin{cases} u_t + (f(u))_x = 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{cases} \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \quad (1)$$

که در آن $u(x, t)$ تابع مجهول معادله است، یعنی u_t و $\frac{\partial u}{\partial t}$ و $u(x, t) \in \mathbb{R}^n$ شرط آغازی است. در معادله (۱) داریم $u(x, 0) = u_0(x)$ و به ازای زیرمجموعه باز Ω از $\mathbb{R}^n$ ، $\mathbb{R}^n \rightarrow \Omega$ یک تابع C^1 است و از قوانین بقا نتیجه می‌شوند و عموماً توابع فیزیکی جواب آنها دارای ناپیوستگیهای ذاتی هستند. این امر باعث می‌شود که در حالت کلی، معادله (۱) جواب کلاسیک (مشتقپذیر) نداشته باشد. به همین دلیل برای آن، جواب ضعیف تعریف می‌شود.

۱. مخفف magnetohydrodynamics

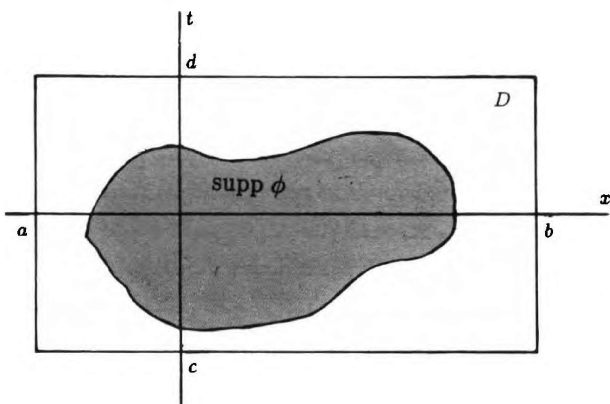
۲. مخفف magnetofluid dynamics

رابطه جوابهای کلاسیک و جواب ضعیف

فرض کنیم در معادله (۱) تابع $u(x, t)$ یک جواب کلاسیک (یا مشتقپذیر) باشد. در این صورت داریم

$$\begin{cases} u_t + (f(u))_x = 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{cases}$$

همچنین تصور کنیم که $\phi: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی با محمل مشمول در مستطیل $D = \{(x, t) : a < x < b, c < t < d\}$ باشد. محمل ϕ (supp ϕ) در شکل دیده می شود. داریم



$$\phi u_t + \phi \cdot (f(u))_x = 0$$

پس

$$\int \int_{t \geq 0} (\phi u_t + \phi \cdot (f(u))_x) dA = 0$$

$$\int_a^b \int_c^d (\phi u_t) dt dx + \int_c^d \int_a^b \phi \cdot (f(u))_x dx dt = 0 \quad (*)$$

اکنون با به کارگیری انتگرالگیری جزء به جزء خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \int_a^b \int_c^d (\phi u_t) dt dx &= \int_a^b \left\{ (\phi u)_t^d - \int_c^d \phi_t u dt \right\} dx = - \int_a^b \int_c^d \phi_t u dt dx \\ &\quad - \int_a^b \phi(x, 0) u(x, 0) dx = - \int \int_{t \geq 0} (\phi_t u) dt dx - \int_{\mathbb{R}} u_0(x) \phi(x, 0) dx \end{aligned}$$

و نیز

$$\begin{aligned} \int_c^d \int_a^b \phi \cdot (f(u))_x dx dt &= \int_c^d \left\{ (\phi f(u))_x^b - \int_a^b \phi_x f(u) dx \right\} dt \\ &= - \int_c^d \int_a^b \phi_x f(u) dx dt = - \int \int_{t \geq 0} \phi_x f(u) dx dt \end{aligned}$$

با استفاده از (*) و دو رابطه فوق نتیجه می شود که

$$- \int \int_{t \geq 0} (\phi_t u) dt dx - \int_{\mathbb{R}} \phi(x, 0) u_0(x) dx - \int \int_{t \geq 0} (\phi_x f(u)) dx dt = 0$$

که از آن به سادگی نتیجه می گیریم

$$\int \int_{t \geq 0} (u_t \phi + \phi_x f(u)) dx dt + \int_{\mathbb{R}} \phi(x, 0) u_0(x) dx = 0$$

در واقع هر جواب کلاسیک معادله (۱)، در رابطه مطرح شده در تعریف جواب ضعیف، برای هر ϕ با محمل فشرده، صدق می کند.

اکنون در صورت وجود مدار متصل‌کننده فوق‌گویییم موج شوک دارای ساختار است و در غیر این صورت گویییم موج شوک ساختار نمی‌پذیرد. برای بررسی بیشتر دلایل فیزیکی وقوع موج شوک در صورت وجود ساختار برای آن، به [۲۰، فصل ۱۵، بخش c] رجوع نمایید.

پس از مطرح شدن شرط «وجود ساختار برای موج شوک» شناسایی وجود یا عدم وجود مدارهای متصل‌کننده برای دستگاه معادلات دیفرانسیل عادی ضروری شد. کانلی در دهه ۱۹۷۰ نظریه «مجموعه‌های ناوردای منزوی»^۱ و شاخص تعمیم‌یافته مرس^۲ برای آنها را مطرح ساخت. این شاخص که تعمیم طبیعی شاخص مرس بود به نام خود او یعنی شاخص کانلی نامگذاری شده است. پس از طرح شاخص کانلی، یکی از روشهای رایج و قوی برای اثبات وجود مدارهای متصل‌کننده به دست آمد. در زیر خلاصه‌ای از مطالب مربوط به شاخص کانلی را بیان می‌کنیم.

۲. شاخص کانلی

(دستگاه) معادله (های) دیفرانسیل زیر را در نظر می‌گیریم

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (۴)$$

$$f: \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, f \in C^1(\Omega)$$

که در اینجا Ω زیرمجموعه‌ای باز از $\mathbb{R}^n$ است.

طبق قضایای بنیادی معادلات دیفرانسیل، برای $x \in \Omega$ داده شده، بازه (باز) ماکسیمال D_x در $\mathbb{R}$ وجود دارد که بر آن بازه، جوابی چون $\phi: D_x \rightarrow \Omega$ با شرط آغازی $\phi(0) = x$ تعریف شده است. در این نوشته، $\phi(t)$ را به x, t نمایش می‌دهیم و نیز به ازای $J \subset D_x$ ، از نماد x, J برای نمایش مجموعه $\{x, t | t \in J\}$ استفاده می‌کنیم. منظور از مدار x ، که به $O(x)$ نمایش داده می‌شود، مجموعه D_x است. این مدار را کامل می‌نامیم در صورتی که $D_x = \mathbb{R}$.

تعریف (همسایگی منزوی ساز)^۳: فرض کنیم N بستار یک مجموعه باز در $\mathbb{R}^n$ است و برای هر $P \in \partial N$ ، t, P متعلق به $\mathbb{R}$ یافت می‌شود که $P, t \notin N$ ، آنگاه N را یک همسایگی منزوی ساز برای (۴) می‌نامیم.

تعریف (بلوک منزوی ساز)^۴: فرض کنیم B بستار یک مجموعه باز در $\mathbb{R}^n$ باشد و برای هر $P \in \partial B$ ، ε مثبتی یافت شود که داشته باشیم $P, (\varepsilon, 0) \cap B = \phi$ یا $P, (0, -\varepsilon) \cap B = \phi$. در این صورت B را یک بلوک منزوی ساز برای معادله (۴) می‌نامیم اگر B یک بلوک منزوی ساز باشد منظور از مجموعه خروجی آن مجموعه زیر است که آن را با b^+ نمایش می‌دهیم

$$b^+ = \{P \in \partial B | \exists \varepsilon > 0 : P, (\varepsilon, 0) \cap B = \phi\}$$

مثال: فرض کنیم در شکل (۲)، خمها نمایانگر مدارهای یک دستگاه معادلات

آیا خم Γ تحت شرایط فوق می‌تواند هر خم همواری باشد؟ پاسخ منفی است. در واقع اگر قرار دهیم $\frac{dx}{dt} = s$ و $u_l = \lim_{x \rightarrow x(t)^-} u(x, t)$ و $u_r = \lim_{x \rightarrow x(t)^+} u(x, t)$ آنگاه باید داشته باشیم

$$s(u_l - u_r) = f(u_l) - f(u_r) \quad (۲)$$

در اثبات لزوم برقراری تساوی (۲) که به «شرط پرش»^۱ معروف است، از قضیه گرین در صفحه استفاده شده است. این اثبات را می‌توانید در [۲۰، ص ۲۴۷] ببینید. تساوی (۲) در دینامیک گازها یک شرط کلاسیک است و شرط زنکین-دهوگونیو^۲ نامیده می‌شود.

سؤال دیگری نیز در اینجا مطرح می‌شود: «آیا جوابهای ضعیف در حالت کلی یکتا هستند؟» پاسخ این سؤال منفی است. بنابراین تشخیص جواب فیزیکی در حالت کلی با یافتن جوابهای ضعیف امکان‌پذیر نیست. لذا لازم است ضابطه‌ای برای یافتن جواب فیزیکی در میان جوابهای ضعیف ارائه شود. برگر^۳ در سال ۱۹۴۰ معادله $u_t + uu_x = 0$ را در $u(x, t) \in \mathbb{R}$ مرتبط با مسأله تلاطم^۴ به دست آورد. بعدها این معادله به نام خود او معروف شد. برای بررسی معادله برگر، هویف برای اولین بار در سال ۱۹۵۰ در [۱۳] معادله $u_t + uu_x = \mu u_{xx}$ را در نظر گرفت. μ در اینجا ضریب چسبندگی نامیده می‌شود. او سعی کرد جوابهای معادله برگر را به عنوان حد جوابهای معادله فوق هنگامی که $\mu \rightarrow 0$ بررسی کند. این روش بعدها به «روش چسبندگی» معروف گشت. در سال ۱۹۵۹ گلفاند در مقاله مهم خود [۱۰] این روش را به طور کامل مورد بحث قرار داد و پایه‌های ریاضی آن را محکم ساخت. در سالهای ۱۹۷۰-۱۹۷۳ کانلی و اسموار در پنج مقاله مشترک خود [۷-۳] درباره استفاده از این روش و توسعه آن به محیطهای مختلف فیزیکی مطالبی بیان کردند. در نهایت، روش چسبندگی با به کارگیری برخی تقریبهای فیزیکی به پیدایش شرط «وجود ساختار برای موج شوک» منجر شد. برقراری این شرط، تضمین‌کننده وقوع فیزیکی شوک خواهد بود. در محیط فیزیکی خاصی که معادله (۱) مدل آن است، اثر پارامترهای چسبندگی یا لزجی در قالب ماتریسی مانند B در معادله دیفرانسیل عادی زیر ظاهر می‌شود

$$B \frac{dv}{dt} = f(v) - f(u_r) - s(v - u_r) \quad v \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \quad (۳)$$

حال برای وقوع فیزیکی شوک در نقطه A در شکل (۱) کافی است که معادله (۳) دارای یک مدار متصل‌کننده از نقطه ساکن u_l به نقطه ساکن u_r باشد [۲۰]. توجه می‌کنیم که u_l و u_r نقاط ساکن معادله (۳) هستند یعنی طرف راست معادله به ازای این مقادیر v صفر می‌شود. این مطلب برای $v = u_r$ واضح است و برای $v = u_l$ از این فرض که جواب $u(x, t)$ در شرط پرش (۲) صدق می‌کند، نتیجه می‌گردد. از طرفی مدار متصل‌کننده برای معادله (۳) از نقطه u_l به u_r به معنی تابعی مانند $x(t)$ است که در معادله (۳) صدق کند و حدود زیر نیز برقرار باشند

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} v(t) = u_l \quad \& \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = u_r$$

1. isolated invariant sets 2. Morse index
3. isolating neighbourhood 4. isolating block

1. jump condition 2. Rankine-Hugoniot 3. J. Burgers
4. turbulence

تعریف (مجموعه ناورداى منزوی). مجموعه ناورداى I را منزوی می‌نامیم هرگاه در یک همسایگی منزوی‌ساز خود، ماکسیمال باشد. به بیان دیگر، باید همسایگی منزوی‌ساز N از I وجود داشته باشد چنانکه در N هیچ زیرمجموعه شامل I و بزرگتر از آن ناوردا نباشد.

مثال. در شکل (۳)، در قسمت (الف)، $\{0\}$ یک مجموعه ناورداى منزوی است. در قسمت (ب)، مجموعه $\{0\}$ ناوردا هست ولی ناورداى منزوی نیست.

تعریف (شاخص کانلی). فرض کنیم I یک مجموعه ناورداى منزوی و B یک بلوک منزوی‌ساز آن برای معادله (۴) باشد. آنگاه اگر b^+ مجموعه خروجی B باشد، رده هوموتوبی فضای خارج قسمت $\frac{B}{b^+}$ را که به $[\frac{B}{b^+}]$ نشان می‌دهیم، شاخص کانلی I می‌نامیم و آن را به $h(I)$ نمایش می‌دهیم.

برای مطالعه بیشتر در زمینه فضای خارج قسمت و رده هوموتوبی فضاهای توپولوژیک به ترتیب به [۱۷، بخش ۱۱.۲] و به [۲۵، بخش ۳.۱۲] رجوع کنید. در ضمن اگر X یک فضای توپولوژیک باشد رده هوموتوبی فضای خارج قسمت $\frac{X}{\sim}$ را به $\bar{0}$ نمایش می‌دهیم. در اینجا باید توجه کنیم که هرچند شاخص کانلی به مجموعه ناورداى منزوی I نسبت داده می‌شود، ولی محاسبه آن از طریق یک بلوک منزوی‌ساز حول I صورت می‌گیرد. از طرفی هر مجموعه ناورداى منزوی دارای بینهایت بلوک منزوی‌ساز است، در نتیجه باید عدم وابستگی شاخص کانلی به انتخاب بلوک منزوی‌ساز اثبات گردد. برای ملاحظه اثبات این مطلب به [۲۵، ص ۴۷۵، قضیه ۲۹.۲۲] رجوع کنید. همچنین می‌توان نشان داد برای هر مجموعه ناورداى منزوی و هر همسایگی منزوی‌ساز آن، یک بلوک منزوی‌ساز حول مجموعه ناوردا و در واقع در همسایگی منزوی‌ساز داده شده وجود دارد [۲۵].

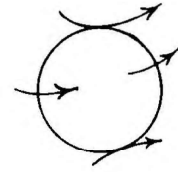
مثال. معادله $\dot{x} = 2x$ در $\mathbb{R}$ در نظر می‌گیریم. در اینجا می‌توان مجموعه ناورداى منزوی $I = \{0\}$ ، بلوک منزوی‌ساز $B = [-1, 1]$ و مجموعه خروجی آن $b^+ = \{1\}$ را در نظر گرفت. شاخص کانلی I یعنی $h(I)$ در اینجا همان رده هوموتوبی فضای خارج قسمت S^1 بر یک نقطه آن است که آن را به Σ^1 نمایش می‌دهند. همچنین اگر معادله $\dot{x} = x^2$ را در نظر بگیریم آنگاه برای $I = \{0\}$ و $B = [-1, 1]$ و $b^+ = \{1\}$ خواهیم داشت $h(I) = \bar{0}$.

تعریف (معادله شبه‌گرادیان)^۱. معادله (۴) را روی زیرمجموعه باز U از Ω نسبت به تابع پیوسته $g : U \rightarrow \mathbb{R}$ شبه‌گرادیان می‌نامیم هرگاه g روی مدارهای غیر ثابت معادله (۴) واقع در U اکیداً صعودی باشد.

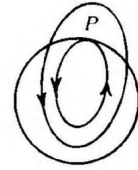
این نامگذاری از رفتار میدان گرادیان سرچشمه می‌گیرد. هرگاه $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی هموار باشد، معادله دیفرانسیل $\dot{x} = \text{grad} f$ را در نظر بگیریم. اگر $x(t)$ یک جواب این معادله باشد، بنا به قاعده زنجیری داریم

$$\frac{d(f(x(t)))}{dt} = |\text{grad} f(x(t))|^2$$

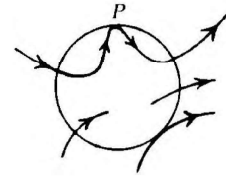
که چنانچه $x(t)$ یک جواب ثابت نباشد، همواره مثبت است یعنی تابع f در طول جوابهای غیر ثابت، اکیداً صعودی است.



(الف) بلوک منزوی‌ساز است



(ب) همسایگی منزوی‌ساز نیست

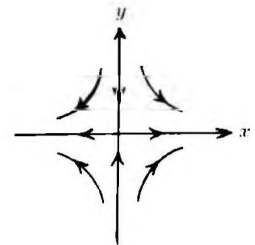


(ب) همسایگی منزوی‌ساز است

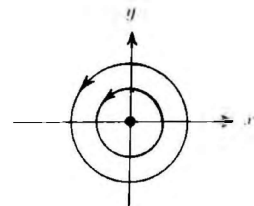
شکل ۲

دیفرانسیل در صفحه باشند. در این صورت، گوی شکل (ب) یک همسایگی منزوی‌ساز است ولی یک بلوک منزوی‌ساز نیست. این امر به جهت وجود نقطه P روی مرز گوی است. گوی شکل (ب) یک همسایگی منزوی‌ساز نیست، و این هم به خاطر وجود نقطه P است. همچنین گوی شکل (الف) یک بلوک منزوی‌ساز و در نتیجه یک همسایگی منزوی‌ساز خواهد بود.

تعریف (مجموعه ناوردا)^۱. $I \subset \Omega$ را برای معادله (۴) ناوردا می‌نامیم هرگاه اجتماعى از مدارهای کامل معادله باشد.



(الف) $\{0\}$ ناورداى منزوی است



(ب) $\{0\}$ ناورداى منزوی نیست

شکل ۳

1. Conley Index

2. gradient-like equation

1. invariant set

است، بیان شده است. در زیر به بررسی وجود مدارهای متصل‌کننده بین نقاط ساکن آن می‌پردازیم.

برای مدل MFD فوق دستگاه مربوط به وجود ساختار موج شوک به صورت زیر است که در [۱۴، بخش ۲] آمده است

$$\begin{aligned} (\alpha V) \dot{B} &= y \\ (\alpha V) \dot{y} &= \varepsilon + (V - \delta^2)B - \frac{\sigma^{-1}}{\alpha V} y \\ \eta \dot{V} &= \frac{1}{\gamma} B^2 + V - J + P(V, T) \\ k \dot{T} &= -\frac{1}{\gamma} (V - \delta^2) B^2 - \frac{1}{\gamma} V^2 - \varepsilon B + JV + \frac{1}{\gamma} y^2 \\ &\quad + e(V, T) - C \end{aligned} \quad (5)$$

در دستگاه فوق، $(\alpha, \eta, k, \sigma^{-1})$ پارامترهای چسبندگی، V حجم ویژه، T درجه حرارت، $P(V, T)$ و $e(V, T)$ به ترتیب توابع فشار و انرژی داخلی در مدل فیزیکی هستند. B نمایانگر شدت میدان مغناطیسی و ε معرف شدت میدان الکتریکی خارجی اند. J و C ثابت هستند. البته توابع $P(V, T)$ و $e(V, T)$ تابع دیگری به نام انرژی $S(V, T)$ باید در شرایط خاصی صدق کنند

وجود مدارهای متصل‌کننده بین نقاط ساکن دستگاه (۵) معادل وجود ساختار برای موجهای شوک در مدل MFD فوق است. لذا ابتدا قضیه‌ای در مورد تعداد نقاط ساکن دستگاه (۵) می‌آوریم. نخست توابع

$$\begin{aligned} V - J + P(V, T_1(V)) &= 0 \\ g(V) &= \frac{1}{\gamma} \varepsilon^2 (V - \delta^2) + V - J \\ \ell(V) &= -\frac{3}{\gamma} V^2 + (2J + \delta^2)V - J\delta^2 \\ \varphi(V) &= -\frac{1}{\gamma} \varepsilon^2 (V - \delta^2)^{-1} + \frac{1}{\gamma} V^2 - VJ - e(V, T_1(V)) \end{aligned}$$

را معرفی می‌کنیم.

در تساویهای فوق توابع g و ℓ و φ به صورت صریح و تابع $T_1(V)$ به صورت ضمنی تعریف شده‌اند. حال اگر J به اندازه کافی بزرگ باشد، معادله $g(V) = 0$ دارای سه ریشه w_1, w_2, w_3 است که در نابرابری $w_1 < w_2 < \delta^2 < w_3 < w_4$ صدق می‌کنند. حال می‌توان ثابت کرد:

قضیه. به ازای J ی مثبت به اندازه کافی بزرگ، $\delta \neq 0$ ، مثبت ثابت، و شرطی متناسب روی φ ، بازه‌ای وجود دارد که اگر C در آن بازه باشد، آنگاه دستگاه (۵) چهار نقطه ساکن دارد.

اثبات در [۲۱، صص ۴۱ و ۴۸] آمده است.

پس برای $\varepsilon > 0$ تحت شرایط فوق، دستگاه (۵) دارای چهار نقطه ساکن $u_i \equiv (B_i, y_i, V_i, T_i)$ به ازای $3 \leq i \leq 5$ است. اکنون وجود مدارهای متصل‌کننده بین u_i های مختلف به معنی وجود ساختار برای موجهای شوک مختلف در مدل MFD فوق است. این موجهای شوک نامهای متفاوتی دارند که در زیر به آنها اشاره می‌کنیم

- (۱) اگر $u_r = u_1$ و $u_\ell = u_0$ شوک را شوک سریع^۱ می‌نامند.
- (۲) اگر $u_r = u_2$ و $u_\ell = u_1$ شوک را شوک کند^۲ می‌نامند.
- (۳) اگر $u_r = u_j$ و $u_\ell = u_i$ به ازای $i = 1$ یا $i = 2$ و $j = 2$ یا

1. fast shock 2. slow shock

مثال. معادله دیفرانسیل عادی $\dot{x} = x^2$ ، $x \in \mathbb{R}$ نسبت به تابع $x = g(x)$ روی $\mathbb{R}$ شبه‌گرادیان است زیرا اگر $x(t)$ یک جواب غیرثابت معادله فوق باشد (یعنی $x \neq 0$) خواهیم داشت

$$\frac{dg(x(t))}{dt} = \dot{x} = x^2 > 0$$

این معادله نسبت به تابع $g(x) = \frac{x^3}{3}$ حتی گرادیان است زیرا گرادیان (مشتق) g دقیقاً برابر طرف راست معادله است. همچنین دستگاه زیر

$$\begin{cases} \dot{x} = y + x^2 \\ \dot{y} = -x \end{cases} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

(اگرچه یک دستگاه گرادیان نیست) روی $\mathbb{R}^2$ نسبت به تابع $x^2 + y^2 = g(x, y)$ شبه‌گرادیان است زیرا اگر $x(t), y(t)$ یک جواب غیرثابت معادله فوق باشد آنگاه

$$\begin{aligned} \frac{dg(x(t), y(t))}{dt} &= 2x\dot{x} + 2y\dot{y} \\ &= 2x(y + x^2) + 2y(-x) = 2x^3 > 0 \end{aligned}$$

در زیر قضیه مهمی مطرح می‌کنیم که در اثبات وجود مدارهای متصل‌کننده از آن بهره می‌گیرند.

قضیه اصلی (وجود مدار متصل‌کننده). فرض کنیم $N \subset \Omega$ یک همسایگی منزوی ساز برای معادله (۴) باشد و معادله (۴) روی آن نسبت به تابع پیوسته g شبه‌گرادیان باشد. همچنین فرض کنیم N دقیقاً شامل دو نقطه ساکن x_1 و x_0 باشد که حداقل یکی از آنها ناتهیگن است. اگر مجموعه ناوردهای منزوی در N باشد و $\partial I = \emptyset$ آنگاه یک مدار متصل‌کننده بین x_1 و x_0 در N موجود است.

(نقطه ساکن x را ناتهیگن می‌نامیم هرگاه هیچ یک از مقادیر ویژه بخش خطی معادله حول آن صفر نباشند.) برای ملاحظه اثبات این قضیه به [۲۰، قضیه ۳۳.۲۲] یا [۲] رجوع کنید.

۳. مدل‌های فیزیکی

در این قسمت می‌خواهیم به بررسی مدل ریاضی موج شوک در مدل‌های فیزیکی بپردازیم. بررسی رفتار گازها در میدانهای مغناطیسی اولین بار توسط ژرمن ریاضیدان فرانسوی در سال ۱۹۵۹ انجام شد [۱۱]. وی وجود موجهای سریع و کند را تحت شرایطی اثبات نمود. بعد از او به ترتیب در سال ۱۹۶۳ اندرسن در [۱] و در سال ۱۹۶۵ کواپکوفسکی و لیوینوف در [۱۶] و در سال ۱۹۷۴-۵ کانلی و اسمولر در [۸] و [۹] مطالبی را در زمینه MFD مطرح کردند. نهایتاً در سال ۱۹۸۲ حصارکی در تز دکترای خود بحث کاملی در زمینه ساختار برای موجهای شوک در MFD مطرح کرد و مسائل باقیمانده در این زمینه در یک مدل خاص را حل نمود که در سال ۱۹۸۴ در [۱۴] به چاپ رسید.

حال می‌خواهیم یک مدل ریاضی دینامیک سیالات در میدانهای مغناطیسی را بررسی کنیم. در واقع مسئله ریاضی مربوط به وجود ساختار موج شوک در مدلی از دو سیال در یک میدان مغناطیسی، به صورت یک دستگاه معادله دیفرانسیل چهارمجهولی که به چهار پارامتر چسبندگی وابسته

معادلات و نیز از نظر رتبه با دستگاه (۵) متفاوت اند. و لذا اثبات وجود موج شوک در هر مدل فیزیکی موکول به اثبات وجود مدار متصل کننده برای دستگاه معادلات مربوطه خواهد بود. به خصوص مسأله وجود ساختار موج شوک در مدل های MFD هرگاه سیال قبل از وقوع شوک و بعد از وقوع شوک از قوانین ترمودینامیکی متفاوتی پیروی کند حل نشده باقی مانده است.

سپاسگزاری. نویسنده مقاله از راهنمایی های آقای دکتر محمود حصارکی کمال تشکر را دارد.

مراجع

1. J.E. Anderson, *MHD Shock Waves*, MIT Press, Cambridge, Mass (1963).
2. C. Conley, *Isolated Invariant Sets and Morse Index*, Amer. Math. Soc., Providence (1978).
3. C. Conley, and J. Smoller, "Viscosity matrices for two-dimensional nonlinear hyperbolic systems", *Comm. Pure Appl. Math.*, **23** (1970) 867-884.
4. C. Conley, and J. Smoller, "Shock waves as limits of progressive wave solutions of higher-order equations", *Comm. Pure Appl. Math.* **24** (1971) 459-472.
5. C. Conley, and J. Smoller, "Shock waves as limits of progressive wave solution of higher-order equations, II", *Comm. Pure Appl. Math.* **25** (1972), 131-146.
6. C. Conley, and J. Smoller, "Viscosity matrices for two-dimensional nonlinear hyperbolic systems, II", *Amer. J. Math.*, **94** (1972) 631-650.
7. C. Conley, and J. Smoller, "Topological methods in the theory of shock waves", *Proc. Sympos. Pure Math.*, **23** (1973) 293-302, Amer. Math. Soc., Providence, R.I.
8. C. Conley, and J. Smoller, "On the structure of magneto hydrodynamic shock waves", *Comm. Pure Appl. Math.*, **28** (1974) 367-375.
9. C. Conley, and J. Smoller, "On the structure of magnetohydrodynamic shock waves, II", *J. Math. Pures et Appl.*, **54** (1975) 429-444.
10. I. Gelfand, "Some problems in the theory of quasilinear equations", *Usp. Mat. Nauk.*, **14** (1959) 87-158; English transl. in *Amer. Math. Soc. Transl. ser.*, **2** (1963) 295-381.
11. P. Germain, "Contribution à la théorie des ondes de choc en magnéto dynamique des fluides", ONERA publ. No. 97 (1959).
12. P. Germain, "Shock waves, jump relations and structure advances", *Appl. Mechanics*, **12** (1972) 131-194.
13. E. Hopf, "The partial differential equation $u_t + uu_x = \mu u_{xx}$ ", *Comm. Pure Appl. Math.*, **3** (1950) 201-230.
14. M. Hesaraki, "The structure of shock waves in magnetohydrodynamics", *Memoirs of AMS*, (302) **49** (1984).
15. M. Hesaraki, "The structure of MFD shock waves in a model of two fluids", *Nonlinearity* **6** (1993) 1-24.
16. A. Kulikovskiy, and G. Lyubimov, *Magnetohydrodynamics*, Addison-wesley, Reading (1965).
17. J.R. Munkres, *Topology A First Course*, Prentice-Hall (1975).
[ترجمه فارسی: جیمز ر. مانکرز، توپولوژی، نخستین درس، ترجمه یحیی تابش، ابراهیم صالحی، جواد لاکلی، نادر وکیل، تهران، مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۶۶.]
18. R. Peyret, "Sur la structure du choc lent dans un schéma à deux fluides non dissipatif C.R. Acad. Sci. Paris", **258** (1964) 2973-2976.
19. R. Peyret, "Sur la structure du choc lent dans un schéma à deux fluides avec dissipation C.R. Acad. Sci. Paris", **258** (1964) 3178-3181.
20. J.A. Smoller, *Shock Waves and Reaction Diffusion Equations*, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin (1983).
۲۱. م.م. نیکنام، «ساختار موج شوک در یک مدل فیزیکی خاص»، پایان نامه کارشناسی ارشد، تربیت مدرس، تهران (۱۳۷۳).

$3 = \tau$ شوکها را شوکهای میانی^۱ می نامند.

پیرت در ۱۹۶۴ در [۱۸] و [۱۹] مدل MFD فوق را مطرح نمود و ثابت کرد که اگر $\delta > 0$ و $k = \eta = 0$ آنگاه شوکهای سریع و کند دارای ساختار هستند. ژرمن نیز در سال ۱۹۶۷ در [۱۲] همین مدل را هنگامی که $\delta = 0$ و $k = \eta = 0$ بررسی کرد. حصارکی نیز در ۱۹۹۱ در [۱۵] این دستگاه را بررسی کرد و نشان داد که تحت مقادیر مختلف پارامترهای چسبندگی، شوکهای سریع و کند ساختار می پذیرند و به علاوه شوکهای میانی به طور فیزیکی به وقوع نمی پیوندند.

اکنون برای آشنایی خواننده با شیوه به کارگیری نظریه کانلی در اثبات وجود ساختار برای موج شوک در مدل MFD، اشاره ای اجمالی به طرح اثبات وجود مدارهای متصل کننده بین نقاط ساکن u_1 و u_0 (موج سریع) و u_2 (موج کند) می کنیم. این اثبات با استفاده از قضیه اصلی مذکور در فوق انجام می شود. البته برقراری شرایط قضیه در چهار مرحله به صورت زیر اثبات می شود:

(۱) ابتدا ثابت می شود که دستگاه (۵) روی

$$D = \{u \in \mathbb{R}^t : V > 0, T > 0\}$$

شبه گردایان است. برای ملاحظه این اثبات به [۱۵، قضیه ۱.۳] مراجعه کنید.
(۲) سپس ثابت می شود که نقاط ساکن دستگاه (۵) همگی ناپیوسته هستند. برای ملاحظه اثبات به [۱۵، قضیه ۵.۲] رجوع کنید.

(۳) در مرحله بعد ثابت می شود که اعداد $a > 0$ و $M > 0$ موجودند به قسمی که مجموعه $N = \{u \in \mathbb{R}^t : |u| \leq M, V \geq a, T \geq a\}$ یک همسایگی منزوی ساز برای دستگاه (۵) شامل کلیه نقاط ساکن است. همچنین برای c ثابت، عدد $k(c)$ چنان یافت می شود که مجموعه های

$$N_{01} = \{u \in \mathbb{R}^t : V > 0, T > 0, p(u) < k(c)\} \cap N$$

$$N_{22} = \{u \in \mathbb{R}^t : V > 0, T > 0, P(u) > k(c)\} \cap N$$

هر دو، همسایگی های منزوی ساز برای دستگاه (۵) هستند و $\{u_1, u_2\} \subset N_{22}$ ، $\{u_0, u_1\} \subset N_{01}$. برای ملاحظه اثبات به [۱۵، قضیه ۱.۴] رجوع نمایید.

(۴) در مرحله آخر، بانوجه به سه قسمت فوق واضح است که شرایط قضیه اصلی انتهای بخش دوم این مقاله فراهم اند و لذا طبق آن قضیه یک مدار متصل بین u_1 و u_0 (موج سریع) و یک مدار متصل کننده بین u_2 و u_1 (موج کند) موجود است.

شایان ذکر است که: (۱) توابع $P(V, T)$ و $c(V, T)$ توابع خاصی نیستند و ممکن است از یک سیال به سال دیگر تغییر کنند و فقط برخی از خواص آنها در دست است؛ (۲) پارامترهای چسبندگی $(\alpha, \eta, k, \sigma^{-1})$ می توانند مقادیر متفاوتی اختیار کنند و به خصوص بررسی حدی آنها یعنی بررسی وضعیت آنها در صورت میل کردن به صفر مورد نظر است؛ (۳) ثابتهای σ و J و C و شدت میدان الکتریکی، ε ، قابل تغییر هستند. بررسی تفصیلی این عوامل از حوصله این مقاله خارج است.

در حال حاضر تحقیق در زمینه وجود ساختار برای موجهای شوک در مدل های مختلف فیزیکی همچنان ادامه دارد. دلیل این امر آن است که در مدل های فیزیکی مختلف، دستگاه های دیفرانسیل عادی مطروحه از نظر