مقالهٔ کلاسیک

توپولوژی جبری و عملگرهای بیضوی

مایکل اتیا

ترجمهٔ رضا رضازادگان

مایکل اتیا

در این مقالهٔ کاملاً توصیفی من قصد دارم ارتباط عمیق بین آنالیز عملگرهای بیضوی و توپولوژی گروههای خطی عام را — با حداقل ریزه‌کاریهای فنی — شرح دهم.

اجازه دهید با چند نکتهٔ تاریخی کوتاه آغاز کنم. نظریهٔ معادلات بیضوی با معادلات کلاسیک لاپلاس و کُشی-ریمان شروع می‌شود و می‌تواند در دو جهت متفاوت تعمیم یابد.

الف) می‌توانیم عملگرهای بیضوی کلیتری را در نظر بگیریم.

ب) می‌توانیم همان عملگرهای کلاسیک را بررسی کنیم ولی روی خمینه‌های کلیتر.

در (ب) می‌توان تمام روشهای توپولوژیک-غیرجبریِ بررسیِ چندگوناهای جبری را در نظر گرفت؛ این روشها توسط هاج ابداع شدند و به دست کُدایِرا[1]-اسپنسر و کارتان-سِر، هیرتسبروخ و دیگران توسعهٔ بسیار یافتند. در این برنامه، یکی از هدفهای اصلیْ مطالعهٔ ناورداهای توپولوژیک سراسری خمینه‌ها بود. چون هر خمینه‌ای «در بینهایت کوچک خطی است»، این مطالعات اصولاً با گروههای خطی $GL(n,\mathbf{R})$ و $GL(n,\mathbf{C})$ سر و کار دارند. در واقع قسمت بزرگی از کارهای صورت‌گرفته در توپولوژی جبری و

1. Kodaira

مایکل اتیا از تأثیرگذارترین ریاضیدانان معاصر است. پدرش لبنانی و مادرش اسکاتلندی‌تبار بود. او در سال ۱۹۲۹ به دنیا آمد، تحصیل دانشگاهی خود را در دانشگاه کیمبریج گذراند و سپس در دانشگاه آکسفرد به تدریس پرداخت. پس از یک دورهٔ سه ساله (۱۹۶۹_۱۹۷۲) عضویت رسمی در مؤسسهٔ مطالعات عالی پرینستن، مجدداً به آکسفرد بازگشت و تا سال ۱۹۹۰ استادی آن دانشگاه و ریاست مؤسسهٔ نیوتن در کیمبریج را به عهده داشت. اتیا با همکاری ریاضیدانانی چون هیرتسبروخ، بات، و سینگر در دهه‌های ۶۰ و ۷۰ در پدیدآوردن یک سلسله آثار مهم ریاضی در زمینه‌هایی مشترک بین رشته‌های هندسهٔ جبری، توپولوژی و آنالیز نقش مهمی داشت. از جملهٔ این آثار، نظریهٔ K و قضیهٔ معروف اتیا-سینگر است که این مقالهٔ توصیفی در دوران شکل‌گیری آن به تحریر در آمده است. اتیا پس از این دوران نقش مهمی در پیوند دادن ریاضیات و فیزیک در نظریهٔ پیمانه‌ای و نظریه‌های میدانهای کوانتومی ایفا کرده است.

متن اصلی مقالهٔ حاضر، با اندکی تغییر، متن سخنرانی اتیا در مؤسسهٔ علوم ریاضی کورانت در ماه مارس ۱۹۶۶ است که در

Communications on Pure and Applied Mathematics, Vol. xx (1967) 237-249

به چاپ رسیده است.

دیفرانسیل در ۲۰ سال گذشته اساساً در ارتباط با توپولوژی گروههای خطی بوده است.

اکثر کارهای اولیه در زمینهٔ (الف) در ارتباط با جنبهٔ کیفی بوده است، یعنی تعمیم دادن نتایج تحلیلی پایه به عملگرهای عمومی؛ ولیکن اخیراً ارتباط مشخصی بین (الف) و (ب) به وجود آمده است که از تلاشهای انجام‌شده برای به دست آوردن بعضی نتایج کمی ــ که برای سیستمهای کلاسیک در دسترس هستند ــ در مورد سیستمهای بیضوی عمومی نشأت می‌گیرد. علت آنکه این تلاشها موفقیت‌آمیز بوده است به این واقعیت برمی‌گردد که خواص توپولوژیک گروههای خطی که به تفصیل در (ب) مورد مطالعه قرار گرفته‌اند، دقیقاً ابزارهای مناسب برای (الف) هستند، و من قصد دارم این موضوع را توضیح دهم.

۱. توپولوژی گروههای خطی

اکنون برخی مطالب اساسی را دربارهٔ توپولوژی گروههای خطی $GL(n,\mathbf{C})$ توضیح می‌دهم. من بیشتر به حالت مختلط می‌پردازم ولی در پایان چند نکته هم در مورد حالت حقیقی بیان خواهم کرد. بحث را با مطالبی از توپولوژی جبری شروع می‌کنم که هر ریاضیدانی بی‌شک از آن اطلاع دارد.

فرض کنید $f : S^1 \to C^*$ یک نگاشت پیوسته از دایرهٔ S^1 به اعداد مختلط ناصفر C^* باشد. به بیان دیگر یک خم بسته در صفحه داریم که از مبدأ نمی‌گذرد. واقعیتهای زیر را همه می‌دانند:

۱. f یک «عدد چرخش» یا درجه دارد (تعداد دفعاتی که خم، مبدأ را «دور می‌زند»).

۲. این درجه (که به صورت $\deg f$ نوشته می‌شود) تحت تغییر شکل پیوسته [هوموتوپی] ناورداست.

۳. $\deg f$ تنها ناوردا در این تغییر شکل است، یعنی f می‌تواند با تغییر شکل به g تبدیل یابد اگر و فقط اگر $\deg f = \deg g$.

۴. برای هر مقدار [صحیح] درجه، نگاشت fای با آن درجه وجود دارد.

راههای مختلفی برای تعریف یا محاسبهٔ $\deg f$، بسته به موقعیت و تکنیکهایی که قصد استفاده از آنها را داریم، وجود دارد. این روشها را می‌توان به طور خلاصه به شکل زیر بیان کرد.

هندسی. f را با $g = f/|f|$ که نگاشتی از S^1 به S^1 است، جایگزین می‌کنیم. سپس آن را با یک نگاشت مشتق‌پذیر تقریب زده تعداد نقاط در تصویر وارون یک نقطهٔ عمومی را (به طور جبری) می‌شماریم.

ترکیبیاتی. با یک خم قطعه به قطعه خطی تقریب می‌زنیم و سپس روشهای ترکیبیاتی را به کار می‌گیریم.

دیفرانسیلی. با یک خم مشتق‌پذیر f تقریب‌زده قرار می‌دهیم $\deg f = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{df}{f}$.

جبری. با یک سری فوریهٔ متناهی $f = \sum_{n=-k}^{k} a_n z^n$ تقریب‌زده قرار می‌دهیم $\deg f = N(f) - P(f)$ که N و P تعداد صفرها و قطبهای f در $|z| < 1$ هستند.

ممکن است بپرسید در ابعاد بالاتر وضعیت چگونه است؟ البته بسته به دیدگاه فرد، تعمیمهای مختلفی از این مسأله امکان‌پذیر است ولی یک تعمیم بسیار زیبا وجود دارد که توسط بات [۱۰] به دست آمده و من اکنون می‌خواهم آن را توضیح دهم.

نگاشتهای پیوستهٔ

$$f : S^{n-1} \to GL(N,\mathbf{C}) \qquad 2N \geqslant n$$

را در نظر می‌گیریم که S^{n-1} کرهٔ واحد در $\mathbf{R}^n$ است. حالت مورد بحث در بالا به $n = 2$ و $N = 1$ مربوط است. قضیهٔ بات از این قرار است.

قضیه. اگر n فرد باشد هر نگاشت f را می‌توان به نگاشتی ثابت تغییر شکل داد. اگر n زوج باشد می‌توانیم یک عدد صحیح به نام $\deg f$ تعریف کنیم و f می‌تواند به نگاشت دیگر g تغییر شکل یابد اگر و فقط اگر $\deg g = \deg f$؛ به علاوه نگاشتهایی با هر درجهٔ دلخواه وجود دارد.

باز مانند حالت $N = 1$ تعریفهای مختلفی از $\deg f$ امکان‌پذیر است. اول یک تعریف هندسی داریم. این تعریف در حالت $n = 2N$ به ساده‌ترین شکل قابل توضیح است. در این حالت ستون اول ماتریس f یک نگاشت

$$f_1 = S^{n-1} \to \mathbf{C}^N - \{0\}$$

تعریف می‌کند و لذا $g = f_1/|f_1|$ نگاشتی از S^{n-1} به S^{n-1} است. این نگاشت یک درجه دارد یعنی تعداد نقاط $h^{-1}(P)$، که h یک تقریب مشتق‌پذیر g و P یک نقطهٔ عمومی است. حال تعریف می‌کنیم

$$\deg f = \frac{(-1)^{N-1}\deg g}{(N-1)!}$$

علت وجود جملهٔ نامنتظرهٔ $(N-1)!$ این است که معلوم شده است که $\deg g$ همیشه بر $(N-1)!$ بخش‌پذیر است. وقتی که $\deg f$ بدین‌گونه بهنجار شود، هر مقدار صحیح را می‌تواند اخذ کند. علامت $(-1)^{N-1}$ به خاطر اندکی سهولت در امور تکنیکی قرار داده شده است. وقتی $2N > n$، همیشه می‌توان f را به یک نگاشت g به صورت

$$g(x) = \begin{pmatrix} h(x) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

تغییر شکل داد که $h(x) \in GL(\frac{n}{2},\mathbf{C})$. پس تعریف می‌کنیم $\deg f = \deg h$ و معلوم می‌شود که این مستقل از انتخاب g است.

یک تعریف دیفرانسیلی هم از $\deg f$ وجود دارد. قرار می‌دهیم

$$\deg f = \int_{S^{n-1}} f^*\omega$$

که ω یک فرم دیفرانسیل ناوردایِ به طور صریح تعریف‌شده روی $GL(N,\mathbf{C})$ است و $f^*\omega$ فرم القاشده روی S^{n-1}.

تعریف جبری با شمردن صفرها و قطبها، که در حالت $N = 1$ به آن اشاره شد، به هیچ شیوهٔ واضحی تعمیم نمی‌یابد. لیکن به یک معنای بسیار عمیق که بعداً توضیح خواهم داد، تعمیمی دارد، تعمیمی که عمق مسأله را برملا می‌کند.

در اینجا درنگ می‌کنیم تا وضعیف را به دقت بنگریم. فکر می‌کنم درست باشد که بگوییم این قضیهٔ بات را باید یکی از دستاوردهای واقعی توپولوژی تلقی کرد، و این چیزی است که هر کسی باید از آن مطلع باشد. البته وجود درجه موضوع نسبتاً ساده‌ای است ــ این هومولوژی است. اما این واقعیت که نگاشتهای با درجهٔ معادل می‌توانند با تغییر شکل به هم تبدیل شوند کاملاً نابدیهی است ــ این هوموتوپی است. این موضوع قطعاً غیرشهودی است و کافی است فقط چند مورد دیگر از هوموتوپی را در نظر بگیریم تا ببینیم که چقدر در این مورد خوش‌اقبال بوده‌ایم، مثلاً رده‌های هوموتوپی نگاشتهای بین کره‌ها فوق‌العاده پیچیده و هنوز، در حالت کلی، نامعلوم است. برای نگاشتهای $S^{n-1} \to GL(N, \mathbf{C})$ وقتی $2N < n$ هم همین وضعیت برقرار است.

برای بهتر فهمیدن قضیهٔ بات مفید است که رابطهٔ بین بعدهای مختلف را بررسی کنیم. پس فرض کنید نگاشتهای

$$f : S^{n-1} \to GL(N, \mathbf{C}), \qquad g : S^{m-1} \to GL(M, \mathbf{C})$$

داده شده باشند. f را با قرار دادن

$$f(\lambda x) = \lambda f(x) \qquad x \in S^{n-1}, \lambda \geqslant 0$$

به کل $\mathbf{R}^n$ گسترش می‌دهیم، و همین‌طور g را. اکنون f و g توابع پیوسته‌ای با مقدار ماتریسی هستند که به ترتیب روی $\mathbf{R}^n$ و $\mathbf{R}^m$ تعریف شده‌اند. حال یک تابع h با مقدار ماتریسی روی $\mathbf{R}^{n+m}$ تعریف می‌کنیم

$$h(x,y) = \begin{pmatrix} f(x) \otimes 1_N & -1_M \otimes g^*(y) \\ 1_M \otimes g(y) & f^*(x) \otimes 1_N \end{pmatrix}$$

که 1_M تبدیل همانی $\mathbf{C}^M$ را نشان می‌دهد و $f^*(x)$، مزدوج ترانهادهٔ ماتریس $f(x)$ است. پس $h(x,y)$ یک ماتریس $2MN \times 2MN$ می‌باشد. به سادگی می‌توان نشان داد که به ازای $(x,y) \neq (0,0)$، $h(x,y)$ ناتکین است و لذا یک نگاشت پیوستهٔ

$$S^{m+n-1} \to GL(2MN, \mathbf{C})$$

تعریف می‌کند که آن را با $f * g$ نشان می‌دهیم تا مشخص شود که یک نوع «حاصلضرب»(۱) f و g است. اگر m و n هر دو زوج باشند فرمول ضربی سادهٔ زیر را داریم

$$\deg(f * g) = (\deg f)(\deg g)$$

پس اگر $a : S^1 \to GL(1, \mathbf{C})$ نگاشت استاندارد از درجهٔ ۱ با معادلهٔ

$$a(z) = z \qquad z \in \mathbf{C}, |z| = 1$$

باشد آنگاه نگاشت $a_n : S^{2n-1} \to GL(2^{n-1}, \mathbf{C})$ که با

$$a_n = a * a * \cdots * a \qquad (n \text{ بار})$$

تعریف می‌شود درجهٔ ۱ دارد. بنابراین نگاشت مولد در این بعد است، یعنی مولدی برای گروه (دوری نامتناهی) رده‌های هوموتوپی نگاشتهای $S^{2n-1} \to GL(2^{n-1}, \mathbf{C})$ تعریف می‌کند.

در حال حاضر اثباتهای متفاوت زیادی برای قضیهٔ بات وجود دارد. من بعداً در مورد یکی از آنها اظهار نظر خواهم کرد اما اجازه دهید اکنون فقط بگویم که همهٔ این اثباتها با استقرا روی n یا با یک گام استقرایی از n به $n+2$ انجام می‌شوند. چیزی که در این گام باید اثبات کرد این است که $f \to (f * a)$ یکریختی از گروه هوموتوپی در بعد $2n-1$ به بعد $2n+1$ می‌دهد.

تذکر. اگر $N < n$، درجهٔ نگاشت $S^{2n-1} \to GL(n, \mathbf{C})$ باید صفر تعریف شود، زیرا به سادگی دیده می‌شود که درجهٔ نگاشت ترکیبی

$$S^{2n-1} \to GL(N, \mathbf{C}) \to GL(n, \mathbf{C})$$

برابر صفر است.

۲. عملگرهای بیضوی

در نظریهٔ عملگرهای دیفرانسیل بیضوی، به طور طبیعی به ردهٔ وسیعتر عملگرهای انتگرال‌ـدیفرانسیلی[1] (از جمله، عملگر وارون یا گرین) رهنمون می‌شویم که امروز عملگرهای شبه‌دیفرانسیلی[2] نامیده می‌شوند و از طریق تبدیل فوریه به بهترین وجه قابل مطالعه‌اند. این عملگرها دارای نمایش موضعی انتگرال به شکل زیر هستند.

$$P\phi(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{i(x,\xi)} p(x,\xi) \hat{\phi}(\xi) d\xi$$

که $p(x,\xi)$ تابعی است هموار که وقتی ξ (به طور یکنواخت و به ازای x کراندار) به ∞ میل کند، دارای خواص مجانبی مناسبی(۲) است، و $\hat{\phi}$ تبدیل فوریهٔ ϕ است. برای یک عملگر دیفرانسیل، p فقط یک چندجمله‌ای برحسب ξ است که ضرایبش توابع هموار از x هستند. اگر ϕ برداری‌ـمقدار باشد، p باید ماتریسی‌ـمقدار باشد.

فرض کنیم p_r جملات با بیشترین مرتبه را در بسط مجانبی p نشان دهد. پس گوییم P بیضوی از مرتبهٔ r است اگر $p_r(x,\xi) \in GL(N, \mathbf{C})$ به ازای هر x و $\xi \neq 0$. بنابراین برای x ثابت، نگاشت پیوستهٔ $S^{n-1} \to GL(N, \mathbf{C})$ با معادلهٔ $\xi \to p_r(x,\xi)$ را داریم. پس اگر n زوج باشد این نگاشت دارای درجه است. این درجه مستقل از x است (اگر خمینهٔ ما همبند باشد) و می‌توان آن را درجهٔ موضعی P نامید. به عنوان مثال درجهٔ موضعی عملگر کشی‌ـریمان $\frac{d}{d\bar{z}}$ به وضوح برابر ۱ است در حالی که عملگر لاپلاس درجهٔ موضعی صفر دارد.

برای به دست آوردن یک مسألهٔ سراسری جالب معمولاً مجبوریم که شرایط مرزی مناسبی بر P تحمیل کنیم. البته اگر روی یک خمینهٔ فشردهٔ بدون مرز باشیم دیگر سؤالی در مورد شرایط مرزی وجود ندارد. همچنین است در مورد عملگرهای مرتبهٔ صفر روی $\mathbf{R}^N$ که «در بینهایت برابر همانی هستند» به این معنی که:

1. integro-differential operators 2. psuedo-differential operators

(۱) مجموعهٔ فشردهٔ $K \subset \mathbf{R}^N$ وجود دارد که $\phi P\psi = \phi\psi$ هرگاه محمل ϕ یا ψ در $\mathbf{R}^N - K$ باشد. اگر $P = p(x, D)$، آنگاه شرط (۱) نتیجه می‌دهد که

$$p(x,\xi) = 1 \qquad \text{به ازای } x \notin K \qquad (۲)$$

در واقع (۱) با (۲) و $(۲)^t$ معادل است که $(۲)^t$ شرط متناظر برای عملگر ترانهاده (یا الحاقی) P یعنی P^t است. چون فضای اقلیدسی ساده‌تر از یک خمینهٔ کلی است، من فعلاً بحث را به این حالت محدود می‌کنم.

فرض کنید P بیضوی از مرتبهٔ صفر است و در (۱) صدق می‌کند. پس اگر k ثابتی باشد به گونه‌ای که

$$|x| \geqq k \Rightarrow x \notin K$$

جملهٔ پیشرو $p_0(x,\xi)$ از $p(x,\xi)$ به ازای هر (x,ξ) با ضابطهٔ $|x|+|\xi| \geqslant k$ یک ماتریس ناتکین خواهد بود. درواقع به ازای $\xi \neq 0$ این نتیجهٔ بیضوی‌بودن است و به ازای $\xi = 0$ داریم $|x| \geqslant k$ پس $x \notin K$ و لذا طبق (۲)، $p_0(x,\xi) = 1$. بنابراین p_0 یک نگاشت پیوستهٔ

$$p_0 : S^{2n-1} \to GL(N, \mathbf{C})$$

تعریف می‌کند که S^{2n-1} کرهٔ واحد در $\mathbf{R}^{2n}$ (فضای x و ξ) است. این درجهٔ p_0 مستقل از k است و می‌توان آن را درجهٔ سراسری عملگر P نامید. این درجه کاملاً با درجهٔ موضعی که قبلاً تعریف شد متفاوت است. اولاً درجهٔ سراسری به ازای هر مقدار n تعریف می‌شود در حالی که درجهٔ موضعی فقط برای n زوج تعریف می‌شود. ثانیاً اگر P از نوعی باشد که هم‌اکنون بررسی می‌کنیم و n زوج باشد، درجهٔ موضعی لزوماً صفر است (زیرا مستقل از x است و به ازای $|x| > k$، $p_0 = 1$). در حقیقت می‌توان گفت که درجهٔ سراسری فقط به دلیل اینکه درجهٔ موضعی صفر است، تعریف می‌شود.

معلوم می‌شود که این مطالب ساده دربارهٔ درجه‌های موضعی و سراسری در فضای اقلیدسی نمونهٔ بارز احکامی است که در حالت کاملاً عام شرایط مرزی از نوع شاپیرو-لوپاتینسکی[1] (یا به اصطلاح «قهری[2]»)(۳) در خمینه‌های کلی برقرار است. در واقع برای اینکه یک عملگر بیضوی P در شرطی مرزی از این نوع، حتی به طور موضعی، صدق کند باید درجهٔ موضعی P صفر باشد. به بیان دیگر شرایطی توپولوژیک وجود دارد که P باید در آنها صدق کند تا شرایط مرزی شاپیرو-لوپاتینسکی را بپذیرد. این موضوع برای $n = 2$ دانسته و نسبتاً واضح است: مثلاً $\frac{d}{dz}$ درجهٔ موضعی ۱ دارد و در این شرایط مرزی صدق نمی‌کند. به نظر می‌آید که در متون این مبحث، $n = 2$ یک حالت نسبتاً خاص تلقی می‌شود در حالی که عکس آن درست است: این حالت، عادی است.

یک نکتهٔ جالب در این مورد اینکه، من و بات هنگام تلاش در فهم معنی توپولوژیک شرایط مرزی، قهراً به یک اثبات مقدماتی جدید از قضیهٔ بات رهنمون شدیم [۴]. به عقیدهٔ من این اثبات جدید کلید درک واقعی ارتباط بین عملگرهای بیضوی و گروههای خطی است. به علاوه اهمیت شگرفی در توپولوژی جبری محض دارد و امکان پروراندن قسمتهای بزرگی از توپولوژی جبری را بر پایهٔ جبر خطی — به جای نظریهٔ سنتی مجتمعهای سادکی و هومولوژی — فراروی ما می‌نهد(۴).

از بحث منحرف شدیم. بیایید به حالت خاص عملگرهای بیضوی P در فضای اقلیدسی که در شرط (۱) صدق می‌کنند برگردیم. یکی از نتایج اولیهٔ نظریه کلاسیک عملگرهای بیضوی که در اینجا هم معتبر می‌ماند این است که فضای جوابهای معادلات $P\phi = 0$ متناهی‌بعد است و چون الحاقی P یعنی P^* از همان نوع P است پس فضای جوابهای $P^*\psi = 0$ هم متناهی‌بعد است. تفاضل بعد این دو، اندیس P نامیده می‌شود. یعنی

$$\text{index}P = \dim \text{Ker}P - \dim \text{Ker}P^*$$

اهمیت خاص اندیس در این است که تحت تغییر شکل پیوستهٔ P تغییر نمی‌کند. بنابراین معقول است که بپرسیم چه ارتباطی با ناوردای توپولوژیکمان، درجهٔ سراسری، دارد.

فضای همهٔ عملگرهای بیضوی Pی عمل‌کننده روی فضای توابع $\mathbf{R}^n \to \mathbf{C}^N$ را که در شرط (۱) صدق می‌کنند(۵) با $\text{Ell}(\mathbf{R}^n, \mathbf{C}^N)$ نشان می‌دهیم. پس فرایند نسبت‌دادن تابع $p_0(x,\xi)$ به هر چنین Pای، تابعی پیوسته چون

$$\sigma : \text{Ell}(\mathbf{R}^n, \mathbf{C}^N) \to \text{Map}(S^{2n-1}, GL(N, \mathbf{C}))$$

تعریف می‌کند که $\text{Map}(A, B)$ فضای تمام توابع پیوستهٔ $A \to B$ را نشان می‌دهد. با عملیات مقدماتی می‌توان نشان داد که σ تناظر یک به یکی بین مؤلفه‌های همبند این دو فضا القا می‌کند. به بیان دیگر، رده‌های هموتوپی عملگرها دقیقاً با اعضای گروه هموتوپی $(2n-1)$ام $GL(n, \mathbf{C})$ متناظرند. چون

$$\text{index}P = \text{index}(P \oplus I)$$

که I عملگر همانی است، همیشه می‌توانیم N را افزایش دهیم بدون اینکه اندیس (یا درجهٔ سراسری) تغییر کند. بنابراین بدون کاسته‌شدن از کلیت می‌توان فرض کرد $N \geqslant n$. اکنون در موقعیتی هستیم که می‌توانیم قضیهٔ بات را که می‌گوید $\deg f$ اساساً تنها ناوردای هموتوپی نگاشت

$$f : S^{2n-1} \to GL(N, \mathbf{C})$$

است به کار بریم. این نتیجه می‌دهد که $\text{index}P$ باید تابعی از $\sigma(P)$، درجهٔ سراسری P، باشد. چون «اندیس» و «درجه» هر دو به طور بدیهی نسبت به جمع مستقیم، جمعی هستند پس به ازای یک عدد صحیح C_n مستقل از P

$$\text{index}P = C_n \,\text{degree}\, \sigma(P)$$

برای محاسبهٔ این ثابت C_n کافی است اندیس P را برای یک عملگر P که نماد $\sigma(P)$ آن برابر مولد بات، a_n، است محاسبه کنیم. این کار را می‌توان به صورت زیر انجام داد. ابتدا این خاصیت ضربی اندیس را بیان می‌کنیم(۶):

1. Shapiro-Lopatinskii 2. coercive

اگر $\sigma(R)=\sigma(P)*\sigma(Q)$ آنگاه $\operatorname{index}R=\operatorname{index}P.\operatorname{index}Q$.
در اینجا $*$ عملگری است که در بخش ۱ تعریف شد. بنابراین اگر

$$P\in \mathrm{Ell}(\mathbf{R}^n,\mathbf{C}^N),\ Q\in \mathrm{Ell}(\mathbf{R}^n,\mathbf{C}^M)$$

آنگاه $R\in \mathrm{Ell}(\mathbf{R}^n,\mathbf{C}^{۲NM})$. چون درجهٔ $\sigma(P)$ هم به همان معنی ضربی است و چون

$$a_n=a*a*\cdots*a \qquad (n \text{ بار})$$

نتیجه می‌شود $C_n=(C_۱)^n$. پس می‌ماند محاسبهٔ $C_۱$. برای این کار کافی است اندیس یک عملگر P روی $\mathbf{R}^۱$ با $\sigma(P)=a_۱$ را محاسبه کنیم. در واقع این یک مثال کلاسیک است و مشخص می‌شود که[۲] $C_۱=۱$. بنابراین:

قضیه. برای هر عملگر شبه‌دیفرانسیلی بیضوی روی $\mathbf{R}^n$ که در شرط (۱) صدق کند اندیس برابر درجهٔ سراسری است.

با استفاده از هر یک از دو تعریف صریحی که برای درجه داده شد، این قضیه یک فرمول صریح برای اندیس به ما می‌دهد. از طرف دیگر (با در نظر گرفتن قضیهٔ بالا) می‌توانیم اندیس را فراهم‌کنندهٔ یک تعریف تحلیلی برای درجه تلقی کنیم! این موضوع آنقدر که به نظر می‌آید عجیب نیست. اولاً این تنها تعریفی است که طبق آن درجه از پیش عددی صحیح است: در تعریف هندسی [درجه] تقسیم بر $(n-۱)!$ داشتیم و در تعریف دیفرانسیلی، فرمول با یک انتگرال داده شد (و لذا از پیش یک عدد حقیقی بود) ثانیاً این تعریف تحلیلی، به یک معنی تعمیم مناسب تعریف جبری درجه (که فقط به ازای $n=۲$ وجود دارد) می‌باشد. شباهتهای سطحی صوری، مشخص‌اند؛ هر دو درجه تفاضل دو عدد صحیح مثبت هستند. در واقع شباهت خیلی عمیقتر از این است زیرا تعداد صفرها و قطبهای یک تابع مرومورف [برخه ریخت] در $|z|<۱$ را می‌توان به شکلی کاملاً طبیعی به عنوان بعد فضای جوابهای یک معادلهٔ دیفرانسیل مناسب بیان کرد. بالاخره برای برخی تعمیمهای طبیعی که در بخش ۳ آنها را بررسی خواهیم کرد، این تعریف تحلیلی به گونه‌ای توسعه می‌یابد که دیگر تعریفها نمی‌یابند.

از طرف دیگر باید قبول کرد که محاسبهٔ اندیس یک عملگر معمولاً از محاسبهٔ مثلاً یک انتگرال دشوارتر است اما برای بسیاری مقاصد نظری، محاسبات عملی اهمیت چندانی ندارند و تعریف تحلیلی مزیتهای نظری بسیاری دارد.

شاید اکنون موقعیت مناسبی باشد تا دربارهٔ موارد مختلفی که در متون این مبحث اثباتی از قضیهٔ بالا داده شده توضیح دهم. اولین اثبات برای n کلی در [۷] داده شده است[۸] که جزئیات آن در [۱۴] شرح و بسط داده شده. ولی چون این مقاله‌ها با حالت خمینه‌های کلی سر و کار داشته‌اند، نمادگذاری و ابزارهای پیچیده‌تری نسبت به حالت فضای اقلیدسی (یا یک کره) لازم داشته‌اند. اگر توجه خود را به یک کره محدود کنیم اثباتهای [۷] و [۱۴] اساساً با اثباتی که در بالا شرح دادم یکی **می‌شود**. فقط در مورد دو تفاوت، توضیح ویژه لازم است. اول آنکه قسمت دشوار [۷]، که به ناوردای کوبوردیسم می‌پردازد، برای کره‌ها مورد نیاز نیست. دوم اینکه بین فضای اقلیدسی و کره تفاوت کمی وجود دارد. ایدهٔ مطالعهٔ عملگرهایی در فضای اقلیدسی که «در بینهایت، همانی هستند». از سیلی [۱۵] است.

چون اثبات مذکور در [۷] پیچیده به نظر می‌آمد، مؤلفان مختلفی، [۱۵]، [۹]، [۱۱]، سعی کرده‌اند که اثباتهایی ساده‌تر یا مقدماتیتر برای حالت فضای اقلیدسی ارائه دهند. این اثباتهای مختلف فقط از لحاظ کاربرد و عرضهٔ توپولوژی جبری متفاوت‌اند و آنالیز در آنها اساساً یکسان است. توپولوژیی که این مؤلفان از آن استفاده کرده‌اند، کلاسیک‌تر است ـــ هومولوژی، قضیهٔ هورویچ، قضیهٔ سر در مورد هوموتوپی کره‌ها و غیره ـــ گاهی همراه با قضیهٔ بات و نتایج هومولوژیک آن. به نظر من اگر چه این قسمتهای توپولوژی قدیمیترند اما مقدماتیتر از قضیهٔ بات نیستند. خواننده می‌تواند طول [۴] را که یک شرح خودکفا از همهٔ چیزهایی است که من در اینجا به کار برده‌ام با رساله‌های پیشرفتهٔ استاندارد توپولوژی جبری مقایسه کند. و باز هم مهمتر اینکه، من جداً معتقدم که قضیهٔ بات نه تنها مقدماتیتر است بلکه همچنین بیشتر به مسألهٔ اندیس ربط دارد. تأکید کل سخنرانی من بر این نکته بوده است.

۳. پیامدهای گسترده‌تر

بحث من تا اینجا معطوف به عملگرهای بیضوی روی فضای اقلیدسی بوده است زیرا تشریح این حالت ساده‌تر است و نیز به نظر من عمق موضوع را نشان می‌دهد. برای توجیه این گفته، باید نشان داد که مسائلی بسیار کلیتر با روش مشابه حل می‌شوند. این البته درست است و من می‌خواهم چند تا از این مسائل را بررسی کنم.

در ابتدا باید گفت که مسألهٔ عام اندیس برای عملگرهای بیضوی دلخواه روی خمینه‌های بسته[۹] حل شده است. علاوه بر اثبات مذکور در [۷] و [۱۴]، اثبات دیگری وجود دارد که در [۸] خواهد آمد و از جنبه‌های مختلفی که مهم هم هستند برتر از این اثبات است. ایدهٔ اساسی آن را خیلی ساده می‌توان توضیح داد. اگر یک عملگر بیضوی P روی یک خمینهٔ بستهٔ X داده شده باشد، X را در فضای اقلیدسی E می‌نشانیم و یک عملگر Q روی E می‌سازیم که «در بینهایت برابر ۱ باشد» و $\operatorname{index}P=\operatorname{index}Q$؛ در نتیجه مسأله به حالت بررسی‌شده در بخش ۲ تقلیل می‌یابد. ساختن Q را می‌توان، به گونهٔ نادقیق، به شکل زیر توصیف کرد. یک عملگر Aی تعریف‌شده در یک همسایگی لوله‌ای[۱] N از X در E در نظر می‌گیریم که نماد مولد در هر صفحهٔ قائم N_x، $x\in X$، را می‌دهد. سپس قرار می‌دهیم $Q=P*A$ که $*$ نشان‌دهندهٔ عملی است مشابه با آنچه در بخش ۱ توصیف شد. با بازبینی دقیقتر خاصیت ضربی اندیس به‌دست می‌آوریم:

$$\operatorname{index}Q=\operatorname{index}P\cdot \operatorname{index}A_x=\operatorname{index}P$$

در مورد خمینه‌های لبه‌دار، مسألهٔ اندیس می‌تواند، آن طور که در [۳] نشان داده شده، به مسأله‌ای در مورد خمینه‌های بسته تحویل یابد.

فرمولهای اندیس را که بدین شیوه به دست می‌آیند، همانند درجهٔ سراسری در بخش ۲، می‌توان به شکل انتگرال نوشت یا به شکل هومولوژیک، مشخص کرد. جالب است که بعضی از مهمترین ناورداهای خمینه‌های دیفرانسیل‌پذیر

۱. tubular

که توسط توپولوژیدانان کشف شده‌اند، در واقع اندیسهای عملگرهای بیضوی هستند. این امر به توضیح بعضی از خواص آنها کمک می‌کند اما خیلی مسائل در این زمینه باقی مانده است.

حل مسألهٔ عام اندیس را که در بالا توصیف شد می‌توان کاربردی از توپولوژی جبری در یک مسألهٔ آنالیز تلقی کرد. به عکس، همان طور که مثال زیر نشان می‌دهد، می‌توان از آنالیز برای کمک به توپولوژی استفاده کرد.

فرض کنید G یک گروه لی فشرده باشد (مثلاً یک گروه نامتناهی) و V و W دو فضای نمایش مختلط (متناهی بعد) G باشند. پس کرهٔ واحد $S(V)$، در یک متریک ناوردا، و $GL(W)$ هر دو به یک معنای طبیعی Gـفضا هستند: عمل روی $GL(W)$، مزدوج‌سازی است یعنی $T \to gTg^{-1}$ در مورد Gـنگاشتهای پیوستهٔ

$$f : S(V) \to GL(W)$$

چه می‌توانیم بگوییم؟ یعنی نگاشتهایی که در شرط

$$f(gx) = gf(x)g^{-1} \qquad x \in V ,\ g \in G \qquad (۳)$$

صدق می‌کنند؟ رده‌های Gـهوموتوپی[۱۰] چنین نگاشتهایی چیست؟ این مسأله تعمیم طبیعی مسألهٔ حل شده توسط قضیهٔ بات است، حداقل اگر W «بزرگ» باشد. پس «گروه پایدار»

$$A(V) = \lim_{\vec{W}}[S(V), GL(W)]$$

را تعریف می‌کنیم که W روی کلیهٔ فضاهای نمایش تغییر می‌کند. این دستگاه با جزئیت [شمول] جهت داده شده و [,] رده‌های Gـهوموتوپی نگاشتها را نشان می‌دهد. اگر $G = ۱$ آنگاه قضیهٔ بات حاکی است که $A(V) \cong \mathbf{Z}$، که $\mathbf{Z}$ گروه اعداد صحیح است. حال قضیهٔ سراسری زیر برقرار است[۱۱]:

قضیه. هر عضو $A(V)$ به ازای هر سرشت تحویل‌ناپذیر χ از G دارای درجه‌ای است که با $\deg_\chi$ نشان داده می‌شود، دو عضو ϕ و ψ برابرند اگر و فقط اگر

$$\mathrm{dex}_\chi \phi = \deg_\chi \psi \qquad \text{به ازای هر } \chi،$$

و بالاخره، خانواده‌ای مرکب از اعداد صحیح n_χ درجات یک $\phi \in A(V)$ را تشکیل می‌دهد اگر و فقط اگر

(i) به ازای هر χ جز تعدادی متناهی از آنها، $n_\chi = ۰$.

(ii) به ازای هر $g \in G$، $(\sum n_\chi \chi(g))\det(۱ - \rho(g)) = ۰$ که در آن $\rho(g) \in GL(V)$ عمل G روی V را تعریف می‌کند.

تذکر. توجه کنید که اگر G یک بردار ثابت در V داشته باشد،

$$\det(۱ - \rho(g)) = ۰$$

و لذا شرط (ii) در هر حال برقرار است، بنابراین n_χها همانند حالتی که گروهی وجود نداشت، اختیاری هستند.

اثبات قضیهٔ بات را نمی‌توان بلافاصله تعمیم داد چون این اثبات با استقرا روی بعد V پیش می‌رود و برای گروه ناجابه‌جایی عمومی G، نمایش V لزوماً به زیر فضاهای یک بعدی تجزیه نمی‌شود. ولی با استفاده از اندیس عملگرهای بیضوی می‌توان این مشکل را حل کرد. من نمی‌توانم وارد جزئیات شوم و اجازه دهید فقط بگویم که بین تعریفهای گوناگون درجه که قبلاً خاطرنشان شد، تنها موردی که به صورت کاملاً رضایت‌بخش تعمیم می‌یابد، تعریف تحلیلی است. برای سادگی فرض کنید $V = U \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$ مختلط‌سازی یک فضای نمایش حقیقی U باشد و $\mathrm{Ell}_G(U, W)$ فضای عملگرهای بیضوی را ـــ همانند بخش ۲ ـــ نشان دهد که به‌علاوه، Gـناوردا (به مفهومی واضح) هم هستند. پس نماد $\sigma(P)$ی چنین عملگری، Gـنگاشتی از $S(V)$ به $GL(W)$ است. فضاهای $\mathrm{Ker}P$ و $\mathrm{Ker}P^*$ فضاهای نمایش G خواهند بود. پس می‌توان چنین تعریف کرد

$$\mathrm{index}_\chi P = d_\chi(\mathrm{Ker}P) - d_\chi(\mathrm{Ker}P^*)$$

که d_χ تعداد دفعاتی را که نمایش χ روی می‌دهد، نشان می‌دهد. پس می‌توانیم تعریف کنیم

$$\deg_\chi \sigma(P) = \mathrm{index}_\chi P$$

من جداً عقیده دارم که رابطهٔ بین آنالیز و توپولوژی در همهٔ این مسائل کاملاً زیر بنایی است. یکی از دلایل من برای این اعتقاد آن است که بارها و بارها دیده‌ایم که آنالیز، به طرزی اجتناب‌ناپذیر، به ملاحظاتی توپولوژیک انجامیده است که در پایان مشخص‌شده که دقیقاً درست می‌باشند. اجازه دهید بحث را با مثال دیگری که جدیدتر و بسیار آموزنده است خاتمه دهم.

تاکنون من فقط از اعداد مختلط استفاده کرده‌ام ولی ما می‌توانیم عملگرهای حقیقی (یعنی عملگرهای دیفرانسیل با ضرایب حقیقی) و گروههای خطی حقیقی $GL(N, \mathbf{R})$ را در نظر بگیریم. طبیعی است دنبال روابطی بین اینها بگردیم که نتایجی را که در حالت مختلط به دست آورده‌ایم ظریفتر کند. بات [۱۵] گروههای هوموتوپی π_{n-1} از نگاشتهای $S^{n-1} \to GL(N, \mathbf{R})$ به ازای N بزرگ را هم مشخص کرده است. اینها نسبت به n تناوبی، با دورهٔ تناوب ۸، هستند و مقادیر زیر را می‌گیرند:

$$\begin{array}{rcccccccc} n = & ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ & ۶ & ۷ & ۸ \\ \pi_{n-1} = & Z_۲ & Z_۲ & ۰ & \mathbf{Z} & ۰ & ۰ & ۰ & \mathbf{Z} \end{array}$$

که در آن $\mathbf{Z}_۲$ گروه مرتبهٔ ۲ است. از اینجا به نظر می‌آید که باید ناورداهای تحلیلی به پیمانهٔ ۲ را جستجو کنیم. پیدا کردن برخی از آنها سخت نیست. فرض کنیم P یک عملگر حقیقی بیضوی و پادالحاقی باشد. در این صورت، $\mathrm{index}P$ برابر ۰ است و لذا جالب نیست اما $\dim(\mathrm{Ker\,P})\bmod ۲$ تحت تغییر شکل پیوسته ناورداست. زیرا ویژه مقدارهای غیرصفر P به صورت جفتهای مزدوج مختلط ظاهر می‌شوند: پس اگر ویژه مقدار λ به ۰ میل کند، مزدوجش $\bar{\lambda}$ نیز به ۰ میل می‌کند و $\dim \mathrm{Ker}P$ به اندازهٔ ۲ واحد جهش می‌کند.

حال طبیعی است که سعی کنیم این ناوردای به پیمانهٔ ۲ی P را به گروههای از مرتبهٔ ۲ در قضیهٔ بات ربط دهیم. همهٔ تلاشهای اولیه در این زمینه ناموفق از آب درآمدند: علت آن وقتی مشخص شد که سینگر به من خاطرنشان کرد که اگر P حقیقی باشد، $p(x,\xi)$ حقیقی نیست بلکه در

$$p(x,-\xi)=\overline{p(x,\xi)}$$

صدق می‌کند زیرا با تبدیل فوریه تعریف شده است. از اینجا چنین برمی‌آید که باید نماد یک عملگر حقیقی را به صورت نگاشتی چون

$$f:S^{2n-1}\to GL(N,\mathbf{C})$$

با شرط $f(-\xi)=\overline{f(\xi)}$ تعبیر کنیم. معلوم شده است که این روش خیلی کاراست و ارتباط مورد نظر بین ناورداهای تحلیلی و توپولوژیک به پیمانهٔ ۲ از آن به دست می‌آید. به علاوه، به عنوان یک نتیجهٔ فرعی، به رهیافت توپولوژیک جدید و بسیار ساده‌تری به قضیه‌های حقیقی بات رهنمون شدم [۲]. پس آنالیز در این مورد کمک بزرگی بود برای راهیابی به باراَورترین دیدگاه توپولوژیک.

این ناورداهای به پیمانهٔ ۲ توضیحات قبلی مرا مبنی بر اینکه تعریف تحلیلی درجه برتر از تعریف هندسی یا دیفرانسیلی است، تقویت می‌کنند. در واقع هیچ تعریف هندسی یا دیفرانسیلی برای ناورداهای به پیمانهٔ ۲ی بات شناخته‌شده نیست. به علاوه می‌دانیم که این ناوردا از نوع هومولوژیک (حتی با ضرایب به پیمانهٔ ۲) نیست. چون همهٔ فرمولهای انتگرالی شناخته شده در این زمینه اساساً هومولوژیک هستند، بعید به نظر می‌رسد که بتوان ناوردای بات را با روشهای انتگرالی محاسبه کرد. ولی این مسأله به عنوان یک مسأله جالب حل نشده باقی مانده است.

در پایان اجازه بدهید بگویم که آنالیز و توپولوژی اکنون به گونه‌ای ناگسستنی با هم ترکیب شده‌اند و شاید لازم باشد این قسمت ریاضیات را «توپولوژی بیضوی» بنامیم.

پانوشتها

(۱) خواننده‌ای که ظاهر عجیب این حاصلضرب برایش گیج‌کننده است، [۵] را ببیند که در آن این حاصلضرب به گونه‌ی طبیعی ظاهر می‌شود.

(۲) برای ملاحظهٔ تعریفهای دقیق، [۱۲] یا [۱۳] را ببینید.

(۳) برای ملاحظهٔ تعریفهای دقیق و اثبات حکمهایی که در پی می‌آیند، [۳] را ببینید.

(۴) این برنامه در [۱] پیگیری شده است.

(۵) ما در (۱) یک مجموعهٔ فشردهٔ ثابت K در نظر می‌گیریم و با تغییر مقیاس می‌توانیم فرض کنیم که K درگوی واحد جای دارد.

(۶) برای حالت خمینهٔ بسته، [۱۴] را ببینید. فقط تصحیحاتی جزئی برای حالت فضای اقلیدسی مورد نیاز است.

(۷) در واقع، بسته به قرارداد علامت داریم $C_1=\pm 1$، که در اینجا آن را در نظر نمی‌گیریم.

(۸) مقاله‌ای نیز به قلم ولپرت [Vol'pert] در این باره در منبع زیر به چاپ رسیده است:

(Doklady Akad. Nauk SSSR, Vol. 152, 1963, pp. 1292-1293)

این مقاله متأسفانه اشکال دارد. اول اینکه قضیهٔ بات مفروض گرفته شده، چنانکه گویی بدیهی است (هیچ ارجاعی داده نشده). به علاوه، فرمول ذکر شده غلط است، عامل $(n-1)!$ از قلم افتاده است. اگر تصور کنیم که حالت کلی معادل حالت $n=2$ است، هر دوی این خطاها قابل فهم‌اند.

(۹) یعنی فشرده و بدون لبه.

(۱۰) یعنی هوموتوپیهایی که شرط (۳) را حفظ می‌کنند.

(۱۱) خواننده برای ملاحظه اثبات می‌تواند [۶] را ببیند.

مراجع

1. Atiyah, M. F., *Lectures on K-theory*, mimeographed notes, Harvard University, 1964.
2. Atiyah, M. F., *K-theory and reality*, Oxford Quart. J. Math., Vol. 17, 1966, pp. 367-386.
3. Atiyah, M. F., and Bott, R., *The index problem for manifolds with boundary, Bombay Colloquium on Differential Analysis*, Oxford Univ. Press, Oxford, 1964.
4. Atiyah, M. F., and Bott, R., *On the periodicity theorem for complex vector bundles*, Acta Math., Vol. 112, 1964, pp. 229-247.
5. Atiyah, M. F., Bott, R., and Shapiro, A., *Clifford modules*, Topology, Vol. 3, 1964, Suppl. I, pp. 3-38.
6. Atiyah, M. F., and Segal, G. B., *Seminar on Equivariant K-theory*, mimeographed notes, Oxford University, 1965.
7. Atiyah, M. F., and Singer, I. M., *The index of elliptic operators on compact manifolds*, Bull. Amer. Math. Soc., Vol. 69, 1963, pp. 422-433.
8. Atiyah, M. F., and Singer, I. M., *The index of elliptic operators, I*, to appear.
9. Bojarski, B., *On the index problem for systems of singular integral equations, III*, Bull. Acad. Polon. Sci., Vol. 13, 1963, pp. 633-637.
10. Bott, R., *Stable homotopy of the classical groups*, Ann. of Math., Vol. 70, 1959, pp. 313-337.
11. Calderon, A., *Singular integrals*, Bull. Amer. Math. Soc., Vol. 72, 1966, pp. 427-465.
12. Hörmander, L., *Pseudo-differential operators*, Comm. Pure Appl. Math., Vol. 18, 1965, pp. 501-517.
13. Kohn, J. J., and Nirenberg, L., *An algebra of pseudo-differential operators*, Comm. Pure Appl. Math., Vol. 18, 1965, pp. 269-305.
14. Palais, R., *Seminar on the Atiyah-Singer Index Theorem*, Ann. of Math. Study No. 57, Princeton Univ. Press, Princeton, 1965.
15. Seeley, R. T., *Integro-differential operators on vector bundles*, Trans. Amer. Math. Soc., Vol. 117, 1965, pp. 167-204.