مجموعهٔ کانتور و ترسیم هندسی*

مارکوپاون*

ترجمهٔ علی عمیدی

مقدمه

C: مجموعهٔ سه سه‌ای کانتور، متشکل از تمام آن اعداد حقیقی x در [۰،۱] است که در بسط سه سه‌ای آنها، $x=\sum_{n=1}^{\infty} a_n/3^n$، a_n هرگز ۱ نیست. C را همچنین می‌توان به‌روشی صرفاً هندسی به‌دست آورد، بدین‌طریق که ابتدا از [۰،۱]، یک‌سوم میانی (۱/۳، ۲/۳) را برمی‌داریم، سپس یک‌سومهای میانی (۱/۹، ۲/۹) و (۷/۹، ۸/۹) ازبازه‌های باقیمانده را برمی‌داریم، و این عمل را ادامه می‌دهیم (C، دقیقاً متمم اجتماع شمارای بازه‌هایی است که برداشته‌می‌شوند). اگر $x=\sum_{n=1}^{\infty} a_n/3^n$ در C باشد، تعبیر هندسی بسط سه‌سه‌ای آن این است که x نقطه‌ای یکتا در [۰،۱] است که اول با توقف درچپ یا در راست (۱/۳، ۲/۳)، به‌ترتیب اگر $a_1=0$ یا $a_1=2$، سپس با توقف درچپ یا راست بازهٔ برداشته شدهٔ بعدی، به‌ترتیب اگر $a_2=0$ یا $a_2=2$، و قس‌علی‌هذا، به آن می‌رسیم. از این شیوهٔ ساختن C نتیجه می‌شود که C زیرمجموعهٔ بستهٔ هیچ‌جا چگال [۰،۱] است.

ویژگی معروف C آن است که هرعدد حقیقی در [۰،۲] را می‌توان به‌صورت مجموع دوعدد در C نوشت. هدف این نوشته ارائه برهانی مقدماتی از $C+C=[0,2]$ است که در آن فقط ازتعریف هندسی C استفاده می‌شود. با اصلاحاتی دراین برهان می‌توان نشان داد‌که درواقع به ازای هر k در [۰،۲]، تعدادی متناهی یا ناشمارا از جفتهای x و y متعلق به C وجود دارند که $x+y=k$. دربارهٔ تشابه بین این حکم تجزیه‌ای و برخی ویژگیهای کسرهای مسلسل نیز بحث خواهیم‌کرد.

ترسیم هندسی

طبق معمول قرارمی‌دهیم: $C\times C=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 : x,y\in C\}$. دراین صورت $C+C=[0,2]$ را می‌توان به‌طریق هندسی به‌صورت زیر ازنو بیان کرد.

(*) به ازای هر k در [۰،۲]، خط $x+y=k$، $C\times C$ را درحداقل یک نقطه قطع می‌کند.

قرارداد می‌کنیم پاره‌خطی‌را در $\mathbf{R}^2$ «افقی» یا «قائم» بنامیم که به‌ترتیب موازی با خط $x=y$ یا عمود برآن باشد. دنبالهٔ $L_0, L_1, L_2, \ldots$ از خمهای چندضلعی پیوستهٔ واقع در $\mathbf{R}^2$ با ویژگیهای زیر را درنظربگیرید (شکلهای ۱ تا ۳ را ببینید):

الف) L_n، به‌ازای‌تمام مقادیر n، مشمول‌در [۰،۱]×[۰،۱] است، و فقط مرکب از پاره‌خطهای افقی و قائم است.

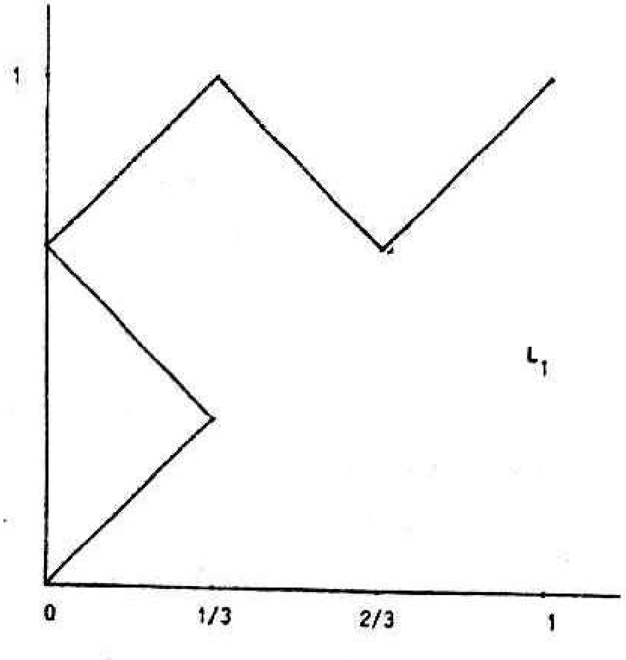
ب) رأسهای L_n به ازای تمام مقادیر n، به $C\times C$ تعلق دارند.

پ) دوسر L_n، به‌ازای تمام مقادیر n، (۰،۰) و (۱،۱) هستند.

ت) هر L_n شامل 3^n پاره‌خط افقی است، که طول هریک برابر $2^{1/2}/3^n$ است.

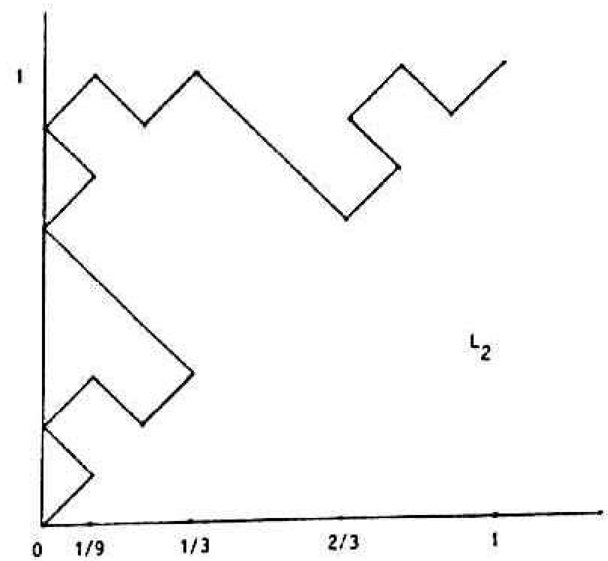
ث) به‌ازای تمام مقادیر n، و به ازای هر k در $\{0, 2/3^n, 4/3^n, \ldots, 2\}$، خط $x+y=k$ شامل یک‌پاره‌خط قائم L_n است.

ج) به‌ازای تمام مقادیر n، و به ازای هر k که در $\{0, 2/3^n, 4/3^n, \ldots, 2\}$ نباشد، خط $x+y=k$ حداکثر با یک پاره خط افقی L_n برخورد می‌کند.



شکل ۱

ابتدا فرض کنید که چنین دنباله‌ای وجود دارد. دراین‌صورت ویژگی (*) برقراراست. k را در $[0, 2]$ تثبیت کنید و فرض کنید r معرف خط $x+y=k$ است. اگر برای n ی، k در $\{0, 2/3^n, 4/3^n, \ldots, 2\}$ باشد، آنگاه r بنابر (ت) و (ب) با $C\times C$ تلاقی می‌کند؛ درغیراین‌صورت، به‌ازای هرعدد صحیح مثبت n، بنابر (ج)، پاره‌خط افقی یکتای L_n وجود داردکه با r تلاقی می‌کند. نتیجه‌آنکه، بنابر (ت) و (ب)، به‌ازای تمام اعداد صحیح مثبت n، $\mathrm{dist}\,(r, C\times C) < 2^{1/2}/3^n$، یعنی $\mathrm{dist}\,(r, C\times C)=0$ [منظور از dist فاصله است]. پس r، بنابر استدلالی متعارف مبتنی برفشردگی، $C\times C$ را تلاقی می‌کند (یادآور می‌شوم که C، زیرمجموعهٔ بستهٔ $[0, 1]$ است).



شکل ۲

اکنون به‌اصل استدلال، یعنی‌ترسیم دنبالهٔ $\{L_n\}_n$ می‌پردازیم. آنچه نیاز داریم در واقع اولین مرحلهٔ یك فرایند استقراست. فرض کنید L_0 پاره‌خطی با دوسر $(0, 0)$ و $(1, 1)$، و L_1 چندضلعیی با رأسهای $(0, 0)$، $(1/3, 1/3)$، $(0, 2/3)$، $(1/3, 1)$، $(2/3, 2/3)$ و $(1, 1)$ باشد (شکل ۱ را ببینید). به‌طورکلی، فرض‌کنید بر هرپاره‌خط افقی L_n همان فرایندی را اجرا کنیم که با انجام‌آن بر L_0، L_1 را نتیجه‌گرفتیم وبدین‌طریق خم L_{n+1} را به‌دست‌آوریم. به‌بیان دیگر، به‌جای پاره‌خط افقی نوعی L_n با دوسر (x, y) و $(x+1/3^n, y+1/3^n)$، چندضلعیی را قرار می‌دهیم که از نقاط

$$(x, y),\ (x+1/3^{n+1}, y+1/3^{n+1}),\ (x, y+2/3^{n+1})$$

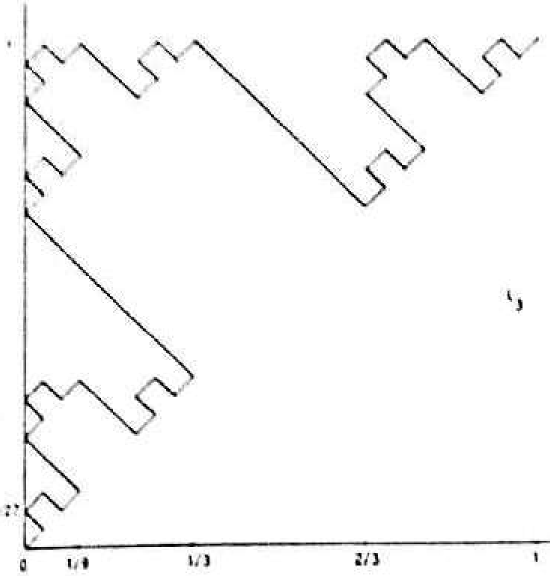
$$(x+1/3^{n+1}, y+1/3^n),\ (x+2/3^{n+1}, y+2/3^{n+1})$$

و

$$(x+1/3^n, y+1/3^n)$$

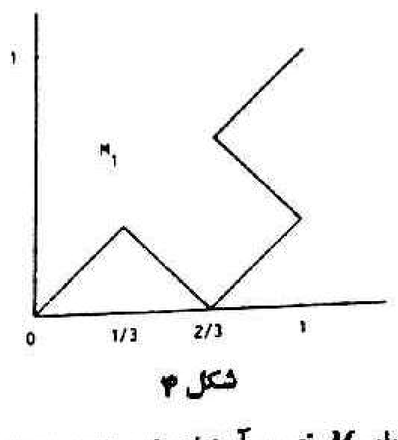
می‌گذرد (شکلهای ۲ و ۳ را ببینید). لذا، واضح است که $\{L_n\}_n$، فرضهای (الف)، ...، (ج) را که در بالا بیان کردیم برمی‌آورد.

با اصلاحات ساده‌ای درترسیم قبلی، دربارهٔ راهی که عددی از $[0, 2]$ را می‌توان به‌صورت مجموع دوعدد در C نوشت،



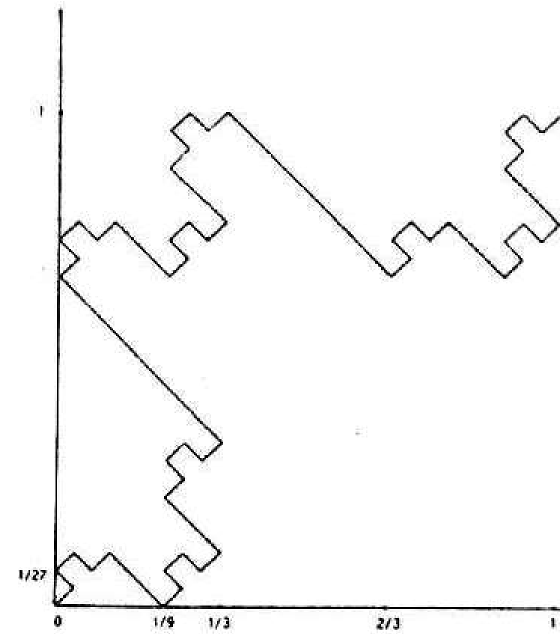
شکل ۳

اطلاع بیشتری به‌دست می‌آوریم. برای هرنگاشت μ از $\mathbf{N}\backslash\{0\}$ به‌توی $\{0, 2\}$، دنبالهٔ $\{L_n^{(\mu)}\}_n$ ازخمهای چندضلعی با ویژگیهای (الف)، ...، و (ج) را رسم می‌کنیم. ایده صرفاً این است که انتخاب‌بین «چپ» و «راست» را درهرمرحلهٔ استقرا، به‌ترسیم‌قبلی اضافه کنیم. آنچه در پایان به دست می‌آید دقیقاً صورت دوبعدی ترسیم هندسی مجموعهٔ سه‌سه‌ای‌کانتور است. نحوهٔعمل به‌شرح زیر است:



شکل ۴

فرض‌کنید M_1 تصویرآیینه‌ای خم L_1 نسبت به‌خط $y=x$ باشد (شکل ۴ را ببینید). اگر μ نگاشتی از $\mathbf{N}\backslash\{0\}$ به‌توی $\{0, 2\}$ باشد، $L_0^{(\mu)}=L_0$ را تعریف می‌کنیم، و به‌ازای هرعدد صحیح نامنفی n فرض می‌کنیم $L_{n+1}^{(\mu)}$ چندضلعیی باشد که از $L_n^{(\mu)}$ بدین‌طریق به‌دست می‌آید که به‌جای هر پاره‌خط افقی L_n، یك کپی (نرمالشدهٔ) L_1 یا M_1 را برحسب اینکه به‌ترتیب $\mu(n+1)=0$ یا $\mu(n+2)=2$، قرار دهیم. مثلاً، اگر $\mu=\{0, 0, 0, \ldots\}$، دنبالهٔ اصلی $\{L_n\}_n$ را به‌دست می‌آوریم (شکلهای ۱ تا ۳)، و برای $\mu=\{2, 2, 2, \ldots\}$ تصویرآیینه‌ای آن را نسبت به خط $y=x$ به‌دست می‌آوریم. برای $\mu=\{0, 2, 0, 2, \ldots\}$، چندضلعیهای قلعه مانندی نظیرشکل ۵ به‌دست می‌آوریم.



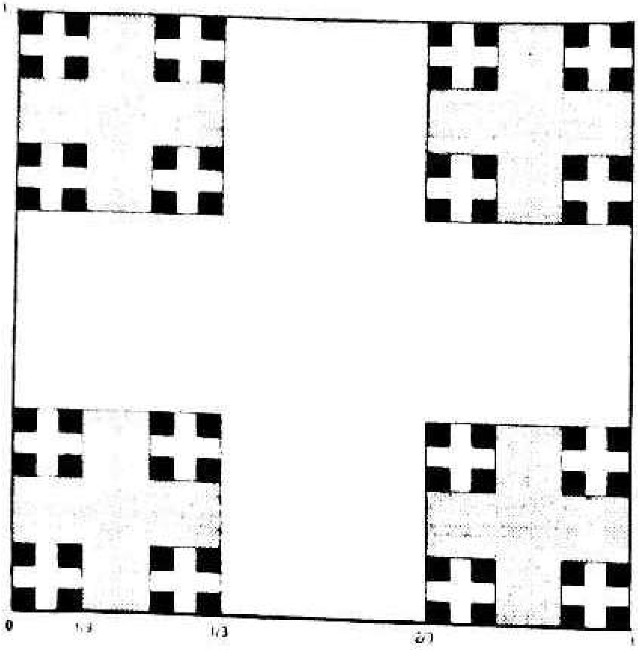
شکل ۵

فرض کنید $L^{(\mu)}$ به ازای تمام μها حد یکنواخت خمهای $L_n^{(\mu)}$ به‌ازای $n=0, 1, \ldots$ را نشان دهد. دراین‌صورت $L^{(\mu)}$ خمی پیوسته در $[0, 1]\times[0, 1]$ با دوسر $(0, 0)$ و $(1, 1)$ و با این ویژگی‌است که به‌ازای هر k در $[0, 2]$، خط $x+y=k$ درنقطه‌ای از $C\times C$ خم $L^{(\mu)}$ را قطع می‌کند. برعکس، به‌ازای هر نقطهٔ مفروض (x, y) در $C\times C$، یک‌دنبالهٔ μ وجود داردکه (x, y) بر $L^{(\mu)}$ قراردارد.

برای درك این‌مطلب، توجه‌کنید که زیرتقسیم‌سه‌سه‌ای $[0, 1]$ که C را تولیدمی‌کند، یك‌زیرتقسیم متناظر از $[0, 1]\times[0, 1]$ به‌وجود می‌آورد که $C\times C$ را تولید می‌کند. در nامین مرحله، زیرمجموعهٔ G_n از $[0, 1]\times[0, 1]$، که شامل نقاط $C\times C$ است، اجتماع 4^n مربع (مربعهای سیاه شکل ۶ به‌ازای $n=3$) است. واضح است که G_n شامل رئوس خمهای $L_n^{(\mu)}$ به‌ازای تمام μهاست (شکلهای ۳ و ۶ را مقایسه کنید). اینك، نتیجه بی‌درنگ حاصل می‌شود.

توجه‌کنید که اگر $\hat{\mu}$، دنبالهٔ حاصل از μ با تبدیل تمام ۰ها به ۲ و برعکس باشد، آنگاه خط $x+y=k$ درنقطهٔ (x, y)، $L^{(\mu)}$ را قطع می کند اگروتنها اگر درنقطهٔ (y, x)، $L^{(\hat{\mu})}$ را قطع کند؛ به‌عبارت دیگر، $\hat{\mu}$ دربارهٔ تجزیهٔ k به‌صورت‌مجموع اعدادی در C، هیچ اطلاع تازه‌ای به‌ما نمی‌دهد. بنابراین، توجهمان را به‌دنباله‌های μ با $\mu(1)=0$ (یعنی، به‌خمهای $L^{(\mu)}$ی بالای خط $y=x$) محدود می کنیم.

$k=2h$ را، با شرط $h>0$، در $[0, 2]$ تثبیت، و فرض می‌کنیم $h=\sum_{n=1}^{\infty} a_n/3^n$ بسط سه‌سه‌ای نامتناهی‌یکتای h باشد. ادعا می کنیم معادلهٔ $x+y=k$ در $C\times C$ دارای $S(k)$ جواب است که $S(k)$ برحسب اینکه $c(k)$ یعنی عدد اصلی مجموعهٔ $\{n\in \mathbb{N}\setminus\{0\}; a_n=1\}$ متناهی یا نامتناهی‌باشد، به‌ترتیب عددی متناهی یا ناشمارا‌است. در واقع فرمول دقیق آن عبارت است از



شکل ۶

$$S(k)=1 \quad \text{،} c(k)=1 \text{ یا } c(k)=0 \text{ اگر}$$

$$S(k)=2(2^{c(k)-2}) \text{.} \qquad \text{درغیراین‌صورت،}$$

فرض‌کنید r، خط $x+y=k$ و n، عدد صحیح مثبتی‌باشد. با مجموعهٔ نمادهای بالا، و به‌کمك شکل ۶، به‌آسانی می‌بینیم که $a_n=1$، اگر وتنها اگر تعداد مربعهای حاصل از تقاطع G_n با r دوبرابر تعداد مربعهای حاصل از تلاقی G_{n-1} با r باشد. هم‌ارز آن، $a_n=1$، اگر و تنها اگر، به‌ازای تمام μها، r دریك‌سوم میانی پاره‌خطهای افقی، $L_{n-1}^{(\mu)}$ را قطع نماید؛ به‌عبارت دیگر، $a_n=1$، اگروتنها اگر، در nامین مرحلهٔ ترسیم، تعدادنقاط تلاقی خمهای $L_n^{(\mu)}$ با r دوبرابر تعداد نقاط تلاقی خمهای $L_{n-1}^{(\mu)}$ با r باشد. اگر $a_n\neq 1$، انتخاب بین $\mu(n)=0$ و $\mu(n)=2$ در nامین مرحله، هیچ نقطهٔ تقاطع جدیدی را به‌وجود نمی‌آورد. این، نشان می‌دهد $c(k)$، بسته به‌اینکه r خمهای $L^{(\mu)}$ را درتعداد متناهی یا تعدادی ناشمارا نقطه قطع کند، متناهی یا نامتناهی است، و ادعای ما ثابت می‌شود.

مثال. اگر $k=2h=28/27$ (به‌صورت سه‌سه‌ای و با رقم ۲ که بینهایت‌بار تکرار می‌شود، $h=0.11122\ldots$)، آنگاه $S(k)=6$ و تجزیه‌های ممکن (به‌صورت سه‌سه‌ای) عبارت‌اند از

$$k=0.222+0.002, \qquad k=1+0.001,$$

$$k=0.21+0.021, \qquad k=0.221+0.01,$$

$$k=0.201+0.1. \qquad k=0.202+0.022,$$

درحالتی که $c(k)$ نامتناهی است، دیدیم که هرظهور تازهٔ ۱ در دنبالهٔ $\langle a_n\rangle_n$، انتخابی جدید بین $\mu(n)=0$ و $\mu(n)=2$ را سبب می‌شود. برحسب تجزیهٔ $k=x+y$، با ضوابط $x=\sum_{n=1}^{\infty} b_n/3^n$ و $y=\sum_{n=1}^{\infty} c_n/3^n$، این دقیقاً متناظر

با انتخاب $b_n = c_n = 0$ است اگر $a_n = 0$ و متناظر با $b_n = c_n = 2$ است اگر $a_n = 2$، و سرانجام متناظر با $b_n = 0$ و $c_n = 2$ (یا $b_n = 2$ و $c_n = 0$) است اگر $a_n = 1$ و $\mu(n) = 0$ (یا $\mu(n) = 2$). حالتی جالب، حالت $k = 1$، یعنی $h = 0.1111\ldots$ است. دراین حالت، اگر $x + y = 1$، تجزیه‌ای باشد که با انتخاب یك دنبالهٔ μ تعیین می‌شود، آنگاه دقیقاً داریم $x = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(n)/3^n$.

تبصره. ترسیم دنبالهٔ $\langle L_n \rangle_n$ (شکلهای ۱ تا ۳)، مشابه با ترسیمهایی است که تابع پیوستهٔ هیچ‌جا مشتق‌ناپذیر روی $[0, 1]$ یا درخت همگن نامتناهی با درجهٔ متناهی را به‌وسیلهٔ استقرا تعریف می‌کنند. اینها مثالهایی از اشیایی هندسی فراهم می‌کنند که این روزها آنها را فرکتال می‌نامند. یك فرکتال دارای این ویژگی است که هریك از بخشهایش دقیقاً کپی کوچکی از کل آن است. این ویژگی «همگن بودن» غالباً دارای نظیری جبری است: درحالت مجموعهٔ سه‌سه‌ای کانتور، Nامین مرحلهٔ ترسیم هندسیش با این واقعیت متناظر است که هرعدد به‌صورت $\sum_{n=1}^{N+1} a_n/3^n$، $a_n \in \{0, 1, 2\}$، از عدد $\sum_1^N a_n/3^n$، با انتخابی بین $a_{n+1} = 0$، $a_{n+1} = 1$ و $a_{n+1} = 2$، به‌دست می‌آید. نکتهٔ اساسی آن است که ماهیت این انتخاب به‌عدد و به N بستگی ندارد. در $\mathbf{F}_n$، آزاد‌گروه با n مولد، انتخابی که برای تشکیل واژه‌ای به‌طول $N + 1$ از واژه‌ای به‌طول N انجام می‌شود مستقل از واژه و N است. بنابراین، نمودار $\mathbf{F}_n$، درختی همگن (از درجهٔ $2n$) است.

مجموعه‌های کانتور کسرهای مسلسل

مجموعه‌های نقطه‌ای کانتور درنظریهٔ اندازه و درنظریهٔ کسرهای مسلسل نقشی مهم دارند. مجموعهٔ سه‌سه‌ای کانتور، C، مثالی پایه‌ای ازمجموعهٔ ناشمارای بورل‌ـ‌اندازه‌پذیری است که اندازهٔ آن صفر است (مثلاً، [۵]، صفحه‌های ۴۲ و ۶۳ را ببینید). مفهومی مهم درنظریهٔ کسرهای مسلسل، مجموعهٔ

$$F(n) = \{x \in [0, 1] : x = [0; a_1, a_2, a_3, \ldots],$$

$$\text{برای تمام مقادیر } i\text{،}\ a_i \leqslant n]\}$$

است؛ یعنی مجموعهٔ کسرهای مسلسل باکران n (n می‌تواند هرعدد صحیح مثبتی باشد). این واقعیت که $F(n)$، یك مجموعهٔ نقطه‌ای کانتور است به‌این ویژگی بستگی دارد که اگر

$$x = [0; a_1, \ldots, a_m, b_{m+1}, b_{m+2}, \ldots]$$

و

$$y = [0; a_1, \ldots, a_m, c_{m+1}, c_{m+2} \ldots]$$

در $F(n)$ باشند، آنگاه $x < y$ ($x > y$) اگر $c_{m+1} < b_{m+1}$، که m فرد است (m زوج است). به‌خصوص،

$$\min F(n) = [0; n, 1, n, 1, \ldots]$$

$$\max F(n) = [0; 1, n, 1, n, \ldots]$$

و $F(n)$ را می‌توان چنین به‌دست آورد که ابتدا بازه‌های باز $([0; 1, n, 1, n, \ldots], 1)$ و $(0, [0; n, 1, n, 1, \ldots])$ را از $(0, 1)$ برداریم، سپس بازه‌های

$$([0; n, n, 1, n, 1, \ldots], [0; n-1, 1, n, 1, n, \ldots])$$

$$([0; n-1, n, 1, n, 1, \ldots], [0; n-2, 1, n, 1, n, \ldots])$$

$$\ldots, ([0; 2, n, 1, n, 1, \ldots], [0; 1, 1, n, 1, n, \ldots])$$

را برداریم، و قس‌علی‌هذا. ([۳]، صفحهٔ ۹۷۱ را ببینید).

یکی ازقضایای هال می گوید که $F(4) + F(4) + \mathbf{Z} = \mathbf{R}$ ([۳]، قضیهٔ ۱۰۳)، که‌شبیه $C + C = [0, 2]$ است. درواقع، هال، قضایای عمومیتری را دربارهٔ ماهیت $L(A) + L(B)$ برای مجموعه‌های نقطه‌ای کانتور دلخواه $L(A)$ و $L(B)$ اثبات می‌کند. یکی از کاربردهای اصلی قضیهٔ هال این نتیجه است که طیف مارکوفی، شامل هرعدد حقیقی بزرگتر از ۶ است ([۱]، صفحهٔ ۴۵۴ را ببینید). با به‌کاربردن صورت اصلاح‌شده‌ای از قضیهٔ اصلی هال ([۲] را ببینید)، به‌جای عدد ۶ متوالیاً مقدار ممکن بهتری به‌نام شعاع هال ($\approx$ ۴٫۵) گذاشته شده است.

درمرجع [۴]، برای اثبات وجود شکافهایی درطیف مارکوفی پایینی، مجموعهٔ $F(2) + F(2)$ به‌کار رفته است. برهانی که در این مرجع وجود دارد، ترسیم هندسی بالارا دربدو امر بهما القا کرده است.

مراجع

1. Cusick, T. W. The largest gaps in the lower Markoff spectrum. *Duke Math. J. 41* (1974), 453-463.
2. Freiman, G. A. Diophantine approximation and the geometry of numbers (Markov's problem). Kalin. Gosud. Univ., Kalinin, 1975.
3. Hall, M. Jr. On the sum and product of continued fractions. *Annals of Mathematics, vol. 48, No.4* (1947), 966-993.
4. Kinney, J. R. and T. S. Pitcher. On the lower range of Perron's modular function. *Canad. J. Math. 21* (1969), 808-816.
5. Royden, H. L. *Real Analysis*. 2nd edition, 1968, Collier Macmillan Publishers.

• Marco Pavone, "The Cantor set and a geometric construction." *L'Enseignement Mathématique*, 35 (1989) 41-49.

* مارکو پاوُن، دانشگاه برکلی آمریکا