مقالهٔ کلاسیک

آیا می‌توان شکل طبل را شنید؟*

مارک کاتس
ترجمهٔ مجید حسینی

«فیزیک فقط فرصت حل مسأله‌ها را به ما نمی‌دهد ... .
فیزیک [همچنین] خود حلّ را به ما عرضه می‌دارد.»
هـ. پوانکاره

پیش از آنکه به شرح عنوان سخنرانی بپردازم و موضوع آن را بیان کنم باید بگویم شیوهٔ ارائهٔ مطالب بیشتر شبیه به گردشی تفریحی خواهد بود تا مسافرتی منظم. قصد ندارم که در زمانی معین به مقصدی خاص برسم، بلکه در بسیاری از مکانها خواهم ایستاد و به نظارهٔ اطراف خواهم پرداخت. امروزه آنچنان کوششی صرف شسته رفته کردن ریاضیات و کاراتر ارائه کردن آن می‌شود که شاید سرپیچی تکروانه‌ای از این روند کلی قابل بخشش باشد.

۱. حالا باز می‌گردیم به موضوع و عنوان سخنرانی.

بیش از یک سده است که می‌دانیم اگر پوستهٔ Ωیی را، با مرز ثابت نگاه داشته‌شدهٔ Γ (شکل ۱)، به ارتعاش در آوریم جابجایی آن (در جهت عمود بر صفحه‌ای که در ابتدا در آن قرار داشت) یعنی

$$F(x,y;t) \equiv F(\vec{\rho};t)$$

در معادلهٔ موج

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 F$$

صدق می‌کند. c ثابت ویژه‌ای است وابسته به خاصیتهای فیزیکی پوسته و کششی که پوسته را نگاه داشته است.

واحدها را طوری انتخاب می‌کنم که $c^2 = \frac{1}{2}$. به‌ویژه جوابهایِ به شکل

$$F(\vec{\rho};t) = U(\vec{\rho})e^{i\omega t}$$

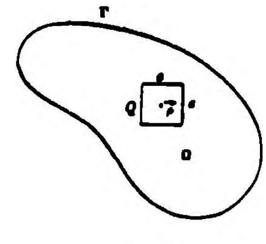
مورد توجه‌اند (هم درنظر ریاضیدانان و هم درنظر موسیقیدانان) زیرا که نسبت به زمان همسازند و در نتیجه نشان‌دهندهٔ تُنهای خالصی هستند که پوسته می‌تواند ایجاد کند. این جوابهای ویژه مُدهای طبیعی نیز نامیده می‌شوند.

برای یافتن این مدهای طبیعی، $U(\vec{\rho})e^{i\omega t}$ را در معادلهٔ موج قرار می‌دهیم و می‌بینیم که U باید در معادلهٔ $\frac{1}{2}\nabla^2 U + \omega^2 U = 0$ با شرط مرزی $U = 0$ روی Γ (مرز Ω) صدق کند و این متناظر است با اینکه مرز پوسته ثابت باشد.

باید معنای «$U = 0$ روی Γ» را روشن کنیم؛ برای مرزهایِ به‌اندازهٔ کافی هموار این بدین معناست که وقتی $\vec{\rho}$ به نقطه‌ای از Γ نزدیک می‌شود (از درون Ω)، $U(\vec{\rho}) \to 0$. یکی از مسائل بزرگ فیزیک ریاضیِ سدهٔ نوزدهم این بود که نشان دهند پوسته می‌تواند طیف گسسته‌ای از تُنهای

مارک کاتس (Mark Kac) در لهستان متولد شد و تحقیقات دورهٔ دکتری خود را در آن کشور زیر نظر اشتاینهاوس در ۱۹۳۶ به پایان رساند. در سالهای ۱۹۳۹ تا ۱۹۶۱ در دانشگاه کرنل آمریکا تدریس و تحقیق می‌کرد و در سالهای ۱۹۶۱ تا ۱۹۸۲ استاد دانشگاه راکفلر بود و از سال ۱۹۸۲ تا پایان عمرش (۱۹۸۴) را در دانشگاه کالیفرنیای جنوبی گذراند.

کاتس تحقیقاتی بنیادی در زمینه‌های احتمال و معادلات دیفرانسیل جزئی انجام داده است. وی علاوه بر آثار تحقیقی، چند کتاب درسی و تعدادی مقالهٔ توصیفی نیز نوشته است. دو تا از مقاله‌های او به‌عنوان اثر توصیفی برندهٔ جایزهٔ معروف شوونه (Chauvenet) شده است که مقالهٔ حاضر یکی از آنهاست.



شکل۱

خالص را ایجاد کند، و یا به عبارت دیگر دنبالهٔ گسسته‌ای از ωها چون $\omega_1 \leqslant \omega_2 \leqslant \omega_3 \ldots$ موجود است که معادلهٔ

$$\frac{1}{2}\nabla^2 U + \omega^2 U = 0$$
$$U = 0 \ ، \ \text{روی}\ \Gamma$$

جواب نابدیهی دارد. پوانکاره و بسیاری دیگر برای حل آن تلاش فراوانی کردند.

پاسخ مسأله سرانجام در اوایل قرن حاضر با استفاده از نظریهٔ معادلات انتگرال به‌دست آمد.

هم‌اکنون می‌دانیم، و اگر شما نمی‌دانید فعلاً قبول کنید، که برای ناحیه‌های Ω که توسط خم هموار Γ احاطه شده‌اند دنباله‌ای از اعداد چون $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots$ موجود است که ویژه‌مقدار نامیده می‌شوند و به هر کدام تابعی چون $\psi(\vec{\rho})$ متناظر می‌شود، که ویژه‌تابع نام دارد، به‌طوری که

$$\frac{1}{2}\nabla^2\psi_n + \lambda_n\psi_n = 0$$

و $\psi_n(\vec{\rho}) \to 0$ وقتی (نقطه‌ای از Γ) $\vec{\rho} \to$. متداول است که ψها را طوری انتخاب کنند که

$$\iint_\Omega \psi_n^2(\vec{\rho})\, d\vec{\rho} = 1$$

توجه کنید که $d\vec{\rho}$ را به مفهوم جزء انتگرالگیری به کار می‌برم (مثلاً در مختصات دکارتی، $d\vec{\rho} \equiv dx\,dy$).

۲. محور بحث من مسألهٔ زیر است: فرض کنید Ω_1 و Ω_2 دو ناحیهٔ مسطح باشند که به‌ترتیب توسط خمهای Γ_1 و Γ_2 احاطه شده‌اند و مسائل ویژه‌مقدار زیر را در نظر بگیرید

$$\frac{1}{2}\nabla^2 U + \lambda U = 0 \ ، \ \text{روی}\ \Omega_1$$
با ضابطهٔ
$$U = 0 \ ، \ \text{روی}\ \Gamma_1$$

$$\frac{1}{2}\nabla^2 V + \mu V = 0 \ ، \ \text{روی}\ \Omega_2$$
با ضابطهٔ
$$V = 0 \ ، \ \text{روی}\ \Gamma_2$$

فرض کنید به ازای هر n، ویژه‌مقدار λ_n برای Ω_1 برابر است با ویژه‌مقدار μ_n برای Ω_2. سؤال: آیا ناحیه‌های Ω_1 و Ω_2 به مفهوم هندسهٔ اقلیدسی قابل انطباق‌اند؟

این روایت از مسأله را برای نخستین بار حدود ده‌سال پیش از پروفسور بوخنر شنیدم. اخیراً وقتی آن را برای پروفسور برس بیان کردم او فوراً گفت:

«یعنی منظورت این است که اگر گوشِ مطلق داشته باشی می‌توانی شکلِ طبل را پیدا کنی؟»

حال می‌بینید که «طبل» عنوان سخنرانی بیشتر شبیه داربه‌زنگی است (که واقعاً پوسته است) و اگر مسأله را از این تعبیرات عاری کنیم بدین صورت درمی‌آید که اگر تمامی ویژه‌مقدارهای مسألهٔ ویژه‌مقدار

$$\frac{1}{2}\nabla^2 U + \lambda U = 0 \ ، \ \text{در}\ \Omega$$
$$U = 0 \ ، \ \text{روی}\ \Gamma$$

را بدانیم آیا می‌توانیم Ω را مشخص کنیم؟

۳. پیش از آنکه پیشتر روم باید خاطرنشان کنم تا جایی که من اطلاع دارم مسأله هنوز حل نشده است. من فکر می‌کنم نمی‌توان شکل داربه‌زنگی را «شنید» ولی ممکن است اشتباه کنم و حاضر نیستم روی درستی و یا نادرستی آن مبلغ هنگفتی شرط بندی کنم.

هدفم این است که نشان دهم با دانستن تمامی ویژه‌مقدارها چه مقدار می‌توان راجع به شکل طبل استنباط کرد، و ارتباط فراوانی را که مسألهٔ ما با بخشهای گوناگون ریاضیات وفیزیک دارد روشن کنم.

خاطرنشان می‌کنم که در طول این مقاله فقط از خواص مجانبی ویژه‌مقدارهای بزرگ استفاده می‌شود. ممکن است به نظر آید که بدین صورت مقدار زیادی اطلاعات از بین می‌رود و برخی استدلال کنند که ممکن است بتوان با داشتن اطلاع دقیق از تمامی ویژه‌مقدارها شکلِ پوسته را مشخص کرد. ولی اخیراً جان میلنر دو چنبرهٔ غیر قابل انطباق شانزده بعدی ساخته است که عملگرهای لاپلاس-بلترامی آنها دقیقاً ویژه‌مقدارهای یکسان دارند. (به یادداشت یک صفحه‌ای او [1] مراجعه کنید).

۴. اولین نتیجهٔ به‌دست آمده دربارهٔ این موضوع، این است که می‌توان مساحت Ω را «شنید». این نتیجه‌ای است قدیمی با تاریخچه‌ای هیجان‌انگیز که به اختصار آن را نقل می‌کنم.

در روزهای پایانی اکتبر ۱۹۱۰ از فیزیکدان بزرگ هلندی لورنتس دعوت شد تا رشته سخنرانیهای «ولفسکل» را در گوتینگن ایراد کند. ولفسکل جایزه‌ای برای اثبات و یا رد قضیهٔ آخر فرما تعیین کرده بود و قید کرده بود مادامی که جایزه به کسی اهدا نشده با سود حاصل از این سرمایه از دانشمندان برجسته دعوت شود تا در گوتینگن سخنرانی کنند.

لورنتس پنج سخنرانی تحت عنوان کلی "Alte und neue Fragen der Physik" ـــ مسائل کهنه و نو در فیزیک ـــ ایراد کرد و در پایان سخنرانی چهارم چنین گفت (با ترجمهٔ آزاد از متن آلمانی اصلی[2]): «در پایان، مسأله‌ای ریاضی هست که شاید مورد توجه ریاضیدانان حاضر در جلسه قرار گیرد. ریشهٔ آن در نظریهٔ تابش جینز[3] است.»

«درون محفظه‌ای که سطحی کاملاً منعکس کننده دارد امواج الکترومغناطیسی ایستایی می‌توانند به‌وجود آیند که مشابه‌اند با صداهایی که در لولهٔ ارگ ایجاد می‌شود؛ ما توجه خود را فقط به هارمونیکهای خیلی بالا محدود می‌کنیم. جینز به دنبال یافتن انرژی موجود در بازهٔ فرکانس

1. "Eigenvalues of the Laplace operator on certain manifolds" Proc. Nat.Acad.Sc. ,51 (1964) 542.

۲. منظور در متن انگلیسی است.ـم.

3. Jeans

$d\nu$ است. بدین منظور تعداد هارمونیکهای بین فرکانسهای ν و $\nu + d\nu$ را محاسبه می‌کند و این تعداد را در انرژیِ مربوط به فرکانس ν ضرب می‌کند، که بنابر قضیه‌ای در مکانیک آماری برای تمام فرکانسها یکسان است.»

«در اینجاست که مسألهٔ ریاضی مورد نظر پیش می‌آید یعنی اثبات این مطلب که تعداد هارمونیکهای به اندازهٔ کافی بالا که بین ν و $\nu + d\nu$ قرار دارند از شکل محفظه مستقل است و فقط متناسب است با حجم آن. در یکی از پایان‌نامه‌های دانشگاه لیدن این قضیه برای بسیاری از شکلهای سادهٔ قابل محاسبه اثبات شده است. شکی نیست که حکم در حالت کلی حتی برای ناحیه‌های چندگانه‌ـهمبند نیز برقرار است. قضیه‌های مشابهی نیز برای دیگر ساختارهای مرتعش نظیر پوسته و تودهٔ هوا و غیره باید برقرار باشد.»

اگر این حدس لورنتس را برحسب پوستهٔ خودمان بیان کنیم به این‌صورت درمی‌آید

$$N(\lambda) = \sum_{\lambda_n < \lambda} 1 \sim \frac{|\Omega|}{2\pi}\lambda$$

$N(\lambda)$ تعداد ویژه‌ـمقدارهای کوچکتر از λ و $|\Omega|$ مساحت Ω است و $\sim$ یعنی

$$\lim_{\lambda \to \infty} \frac{N(\lambda)}{\lambda} = \frac{|\Omega|}{2\pi}$$

داستانی مشکوک حکایت از آن دارد که هیلبرت پیش‌بینی کرد این قضیه در دوران حیات وی اثبات نخواهد شد. او به اندازهٔ چندین سال اشتباه کرده بود. چون درکمتر از دو سال بعد هرمان وایل، که در سخنرانی لورنتس حضور داشت و به مسأله علاقه‌مند شده بود، آن را حل کرد یعنی ثابت کرد که وقتی $\lambda \to \infty$

$$N(\lambda) \sim \frac{|\Omega|}{2\pi}\lambda$$

وایل نظریهٔ معادلات انتگرال را ــ که استادش هیلبرت فقط چند سال پیش به‌وجود آورده بود ــ استادانه به‌کار برد و اثباتش چون تاجی است درخشان بر سر این نظریهٔ زیبا. بسیاری از پیشرفتهای آتی نظریهٔ معادلات دیفرانسیل و انتگرال (به‌ویژه آثار کورانت و مکتب او) متأثر از گزارش وایل دربارهٔ حدس لورنتس است.

۵. حال به اختصار به مسألهٔ فیزیکی دیگری می‌پردازم که آن‌هم ارتباط نزدیکی با مسألهٔ توزیع ویژه‌ـمقدارهای عملگر لاپلاسی دارد.

می‌توانیم این امر را به‌عنوان اصلی ابتدایی در مکانیک آماری قبول کنیم که اگر دستگاهی از M ذره که به حجمی چون Ω محدود شده توسط دمایابی در دمای T در تعادل باشد آنگاه احتمال یافتن ذراتی معین در $\vec r_1, \vec r_2, \ldots, \vec r_M$ (با اجزای حجم $d\vec r_1, d\vec r_2, \ldots, d\vec r_M$) برابر است با

$$\frac{\exp\left[-\frac{1}{kT}V(\vec r_1, \vec r_2, \ldots, \vec r_M)\right] d\vec r_1\, d\vec r_2 \ldots d\vec r_M}{\int_\Omega \cdots \int_\Omega \exp\left[-\frac{1}{kT}V(\vec r_1, \vec r_2, \ldots, \vec r_M)\right] d\vec r_1\, d\vec r_2 \ldots d\vec r_M}$$

که $V(\vec r_1, \vec r_2, \ldots, \vec r_M)$ پتانسیل اندرکنش ذرات است و $k = R/N$ که R «ثابت گاز» و N عدد آووگادرو است. فرض متناظر با این در مکانیک آماری کوانتمی برای ذرات یکسان با جرم m که از آمار بولتسمن پیروی می‌کنند بسیار پیچیده‌تر است. نقطهٔ شروع، معادلهٔ شرودینگر است

$$\frac{h^2}{2m}\nabla^2\psi - V(\vec r_1, \vec r_2, \ldots, \vec r_M)\psi = -E\psi$$

($h = \frac{\hbar}{2\pi}$ که h ثابت پلانک است)

با شرطِ مرزیِ $\lim \psi(\vec r_1, \vec r_2, \ldots, \vec r_M) = 0$ وقتی حداقل یکی از $\vec r_k$ها به مرز Ω نزدیک می‌شود (این شرط مرزی باعث می‌شود که ذرات به Ω محدود شوند.) فرض کنید $E_1 \leqslant E_2 \leqslant E_3 \leqslant \ldots$ ویژه‌ـمقدارها و $\psi_1, \psi_2, \ldots$ ویژه‌ـتابعهای یکهٔ متناظر به آنها باشند. در این‌صورت فرض بنیادی حکم می‌کند که احتمال یافتن ذراتی معین در $\vec r_1, \vec r_2, \ldots, \vec r_M$ (با اجزای حجم $d\vec r_1, d\vec r_2, \ldots, d\vec r_M$) برابر است با

$$\sum_{s=1}^{\infty} \frac{e^{-E_s/kT}\psi_s^2(\vec r_1, \vec r_2, \ldots, \vec r_M)d\vec r_1\, d\vec r_2 \ldots d\vec r_M}{\sum_{s=1}^{\infty} e^{-E_s/kT}}$$

هیچ ذره‌ای نمی‌شناسیم که از آمار بولتسمن پیروی کند. ولی نگران نباشید، این واقعیت تأسف‌آور برای ما اهمیتی ندارد.

حال بحث خود را به حالت گاز ایده‌آل محدود می‌کنم که بنابر تعریف به معنی $V(\vec r_1, \vec r_2, \ldots, \vec r_M) \equiv 0$ است.

از دیدگاه کلاسیک، احتمال یافتن ذراتی معین در $\vec r_1, \vec r_2, \ldots, \vec r_M$ به وضوح برابر است با

$$\frac{d\vec r_1\, d\vec r_2 \ldots d\vec r_M}{|\Omega|^M}$$

که $|\Omega|$ حجم Ω است.

از دیدگاه مکانیک کوانتمی پاسخ آن‌چنان صریح نیست. معادلهٔ شرودینگر برای گاز ایده‌آل عبارت است از

$$\frac{h^2}{2m}\nabla^2\psi = -E\psi$$

که به‌وضوح معادله‌ای تفکیک‌پذیر است.

حال اگر مسألهٔ ویژه‌ـمقدار ۳ بعدی (به‌جای $3M$ بعدی)

$$\frac{1}{2}\nabla^2\psi(\vec r) = -\lambda\psi(\vec r) \qquad \vec r \in \Omega$$
$$\psi(\vec r) \to 0 \quad \text{،} \quad \vec r \to \text{مرز}\ \Omega \qquad \text{وقتی}$$

را در نظر بگیریم روشن است که E_s و $\psi_s(\vec r_1, \vec r_2, \ldots, \vec r_M)$ به‌سادگی برحسب λها و $\psi(r)$های متناظر قابل بیان است.

احتمال یافتن ذراتی معین در $\vec r_1, \vec r_2, \ldots, \vec r_M$ عبارت است از

$$\prod_{k=1}^{M} \frac{\sum_{n=1}^{\infty}\exp\left[-\frac{\lambda_n \hbar^2}{mkT}\right]\psi_n^2(r_k)}{\sum_{n=1}^{\infty}\exp\left[-\frac{\lambda_n \hbar^2}{mkT}\right]} d\vec r_k$$

حال وقتی $\hbar \to 0$ (یا وقتی $T \to \infty$) باید پاسخ مکانیک کوانتمی

مبدل به پاسخ کلاسیک شود و این حدس القا می‌شود که

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n \tau}\psi_n^2(\vec{r}) \sim \frac{1}{|\Omega|}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n \tau}$$

$$\left[\tau = \frac{\hbar^2}{mkT}\right] \quad \text{،}\ \tau \to 0 \quad \text{وقتی}$$

اگر به‌جای محفظهٔ سه‌بعدی واقعی Ω محفظه‌ای دوبعدی در نظر بگیریم، نتیجه تغییری نمی‌کند

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n \tau}\psi_n^2(\vec{r}) \sim \frac{1}{|\Omega|}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n \tau}, \qquad \tau \to 0$$

منتها با این تفاوت که $|\Omega|$ به مفهوم مساحت است و نه حجم.

واضح است که انتظار داریم نتیجه فقط برای $\vec{r}$ در درون Ω برقرار باشد.

اگر نتیجهٔ وایل را قبول کنیم که (در حالت دو بعدی)

$$N(\lambda) \sim \frac{|\Omega|}{2\pi}\lambda \ , \quad \lambda \to \infty$$

بنابر قضیه‌ای آبلی فوراً نتیجه می‌شود که

$$\frac{1}{|\Omega|}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n \tau} \sim \frac{1}{2\pi\tau} \ , \quad \tau \to 0$$

و بنابراین

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n \tau}\psi_n^2(\vec{r}) \sim \frac{1}{2\pi\tau} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-\lambda\tau}\, d\lambda$$

با قرار دادن $A(\lambda) = \sum_{\lambda_n < \lambda} \psi_n^2(\vec{r})$ نتیجه را به صورت زیر بیان می‌کنیم:

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda\tau}\, dA(\lambda) \sim \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-\lambda\tau}\, d\lambda \ , \quad \tau \to 0$$

چون $A(\lambda)$ نانزولی است می‌توانیم قضیهٔ تاوبری‌ـهاردی‌ـلیتلوودـکاراماتا را به‌کار بریم و همگی وسوسه می‌شویم که نتیجه بگیریم به ازای هر $\vec{r}$ درون Ω

$$A(\lambda) = \sum_{\lambda_n < \lambda} \psi_n^2(\vec{r}) \sim \frac{\lambda}{2\pi} \ , \quad \lambda \to \infty$$

با وجود اینکه این فرمول مجانبی براساس «دلایل فیزیکی» تقریباً «واضح» است تا سال ۱۹۳۴ اثبات نشده بود. در این سال کارلمان موفق به اثبات دقیق آن شد.

در پایان این بخش خوب است مختصری هم در بارهٔ «استراتژی» رهیافتمان بگوییم.

روشن است که خواص مجانبی λ_nها به‌ازای nهای بزرگ بیشتر مورد توجه ما هستند. برای یافتن این خواص می‌توانیم سری دیریکلهٔ

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t}$$

را به‌ازای tهای کوچک بررسی کنیم. بهترین روش این کار نیز بررسی سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t}\psi_n^2(\vec{\rho}) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t}\, dA(\lambda)$$

است و بنابراین به ارتباط متقابل قضیه‌های آبلی و تاوبری که در بالا توصیف شد رهنمون می‌شویم.

۶. به‌نظر می‌رسد شهودفیزیکی علاوه بر ارائهٔ حدسهای جالب توجه و مبارزطلب برای ریاضیدانان، باید راهی نیز به‌سوی اثبات و تعمیمهای ممکن آن نشان دهد.

ولی نظریهٔ تابشِ جسمِ سیاه و یا مکانیکِ آماریِ کوانتمی چنان دور از شهودِ ساده و آکنده از استقراءهایِ فیزیکیِ جسورانه و پیچیده است که حتی فهم آن برای ریاضیدانان دشوار است تا چه رسد به آنکه به اثباتی دقیق رهنمونشان کند.

خوشبختانه در شرایط [فیزیکی] بسیار مقدماتی‌تر، مسألهٔ توزیع ویژه‌ـمقدارهای عملگر لاپلاسی بسیار ساده‌تر می‌شود. برهانها به مثابهٔ تعمیم طبیعیِ شهودِ فیزیکی پدیدار می‌شوند و تعمیمهایی جالب توجه در دسترس قرار می‌گیرند.

۷. شرایط فیزیکی مورد نظر از آنِ نظریهٔ پخش است که شاخه‌ای دیگر از فیزیک ریاضی سدهٔ نوزدهم است.

«چیز»ی را در نظر بگیرید که در ابتدا در $\vec{\rho}\ (\equiv (x_0, y_0))$ متراکم شده و از طریق ناحیهٔ مسطح Ω، محصور در Γ، پخش می‌شود. همچنین فرض کنید این چیز در مرزْ جذب («خورده») می‌شود.

$P_\Omega(\vec{\rho} \mid \vec{r}; t)$، تراکم ماده در $\vec{r}\ (\equiv (x, y))$ در زمان t، در معادلهٔ دیفرانسیل پخش

$$\frac{\partial P_\Omega}{\partial t} = \frac{1}{2}\nabla^2 P_\Omega \qquad \text{(الف)}$$

با شرط مرزی

$$P_\Omega(\vec{\rho} \mid \vec{r}; t) \to 0 \quad \text{وقتی } \vec{r} \text{ به نقطه‌ای از مرز نزدیک می‌شود}$$
(ب)

و شرط اولیهٔ

$$P_\Omega(\vec{\rho} \mid \vec{r}; t) \to \delta(\vec{r} - \vec{\rho}) \quad \text{وقتی } t \to 0 \qquad \text{(پ)}$$

صدق می‌کند. در اینجا $\delta(\vec{r}, \vec{\rho})$ «تابع دلتا»ی دیراک است که «مقدار» آن ∞ است اگر $\vec{r} = \vec{\rho}$، و 0 است اگر $\vec{r} \neq \vec{\rho}$.

شرط مرزی (ب) بیانگر این واقعیت است که مرز جاذب است و شرط اولیهٔ (پ) حاکی است از اینکه در ابتدا تمامیِ «چیز» در $\vec{\rho}$ تراکم یافته است.

باز هم واحدها را طوری انتخاب کرده‌ام که ثابت پخش برابر $\frac{1}{2}$ شود.

می‌دانیم که تراکم $P_\Omega(\vec{\rho} \mid \vec{r}; t)$ برحسب ویژه‌ـمقدارهای λ_n و ویژه‌ـتابعهای یکهٔ $\psi_n(\vec{r})$ در مسألهٔ

$$\frac{1}{2}\nabla^2\psi + \lambda\psi = 0 \ , \quad \text{در } \Omega$$

$$\psi = 0 \ , \quad \text{روی } \Gamma$$

قابل بیان است. در واقع

$$P_\Omega(\vec{\rho} \mid \vec{r}; t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t}\psi_n(\vec{\rho})\psi_n(\vec{r})$$

از دیدگاه شهودی روشن است که، به‌ازای tهای کوچک، ذراتِ چیزِ پخش شونده زمانِ کافی برای «احساس کردنِ» تأثیر مرز Γ ندارند. در آغازِ پخش، گویی از فاجعه‌ای که در مرز در انتظارشان است بی‌خبرند.

پس انتظار داریم که به مفهومی تقریبی

$$P_\Omega(\vec{\rho} \mid \vec{r}; t) \to P_0(\vec{\rho} \mid \vec{r}; t) \quad \text{وقتی} \quad t \to 0$$

که $P_0(\vec{\rho} \mid \vec{r}; t)$ نیز در معادلهٔ پخش

(الف ۱) $$\frac{\partial P_0}{\partial t} = \frac{1}{2}\nabla^2 P_0$$

و شرط اولیهٔ

(ب ۱) $$P_0(\vec{\rho} \mid \vec{r}; t) = \delta(\vec{r} - \vec{\rho}) \quad \text{وقتی} \quad t \to 0$$

صدق می‌کند ولی محدودیت دیگری ندارد.

در واقع محدودیت جزئی دیگری نیز وجود دارد که بدون آن جواب یکتا نیست (واقعیتی در خور توجه که چند سال پیش ویدر[1] آن را کشف کرد). محدودیت این است که $P_0 \geqslant 0$ (یا به‌طور کلی‌تر اینکه P_0 از پایین کراندار باشد).

شرط مشابهی برای P_Ω لازم نیست چون‌که برای پخش در ناحیه‌ای کراندار این نتیجه خودبه‌خود به‌دست می‌آید.

فرمول صریح معروفی برای P_0 داریم

$$P_0(\vec{\rho} \mid \vec{r}; t) = \frac{1}{2\pi t}\exp\left[-\frac{\| \vec{r} - \vec{\rho} \|^2}{2t}\right]$$

که $\| \vec{r} - \vec{\rho} \|$ نشان‌دهندهٔ فاصلهٔ اقلیدسی بین $\vec{\rho}$ و $\vec{r}$ است.

حال می‌توانم با دقت بیشتری اصلِ «احساس نکردن مرز» را بیان کنم که لحظه‌ای پیش توضیح دادم.

ادعا این است که وقتی $t \to 0$

$$P_\Omega(\vec{\rho} \mid \vec{r}; t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t}\psi_n(\vec{\rho})\psi_n(\vec{r}) \sim \frac{1}{2\pi t}\exp\left[-\frac{\| \vec{r} - \vec{\rho} \|}{2t}\right] = P_0(\vec{\rho} \mid \vec{r}; t)$$

که در اینجا $\sim$ به معنای «تقریباً مساوی است با» است. این حرف کمی مبهم است ولی فعلاً آن را به همین صورت باقی می‌گذاریم.

اگر بتوانیم حتی برای $\vec{\rho} = \vec{r}$ نیز به این فرمول اعتماد کنیم نتیجه می‌گیریم

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t}\psi_n^2(\vec{r}) \sim \frac{1}{2\pi t}$$

و اگر از این هم خوشبین‌تر باشیم می‌توانیم از رابطهٔ بالا انتگرال بگیریم و با استفاده از شرط

$$\int_\Omega \psi_n^2(\vec{r})\, d\vec{r} = 1$$

1. D. V. Widder

نتیجه بگیریم

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t} \sim \frac{|\Omega|}{2\pi t}$$

فوراً می‌توانیم فرمولهایی را تشخیص دهیم که چند سطر پیش در بررسی گاز ایده‌آل از دید مکانیک آماری کوانتومی در بارهٔ آنها بحث کردیم. اگر قضیهٔ هاردی‌ـلیتلوود‌ـکاراماتا را، که پیشتر به‌آن اشاره کردیم به‌کار بریم، قضیه‌های کارلمان و وایل را نتیجه می‌گیریم.

ولی برای این کار باید مجاز باشیم $\sim$ را به معنای «مجانب است با» به کار بریم.

۸. حال کمی هم به ندای وجدانِ ریاضیمان گوش فرا دهیم. آیا بحث ما همانند گذشته به‌دور از دقت ریاضی نیست؟ درست است که پدیدهٔ پخش بسیار شناخته‌شده‌تر از تابشِ جسمِ سیاه و یا آمارکوانتمی است، ولی شناخت، حداکثر آسایش خاطر فراهم می‌کند و آسایش خاطر ممکن است فرسنگها به‌دور از دقتی باشد که ریاضیات می‌طلبد (و معمولاً چنین است).

ببینیم برای اعتبار بخشیدن به این سخنان سست چه می‌توانیم بکنیم. ابتدا خود را از دست چند نکتهٔ فرعی که ممکن است مایهٔ نگرانی شما شوند خلاص کنیم.

عبارتهایی نظیر «$\psi = 0$ روی Γ» یا «$P(\vec{\rho} \mid \vec{r}; t) \to 0$ وقتی $\vec{r}$ به مرز Ω نزدیک می‌شود» تعبیرهای گوناگون دارند.

فرض می‌کنم Γ آن‌قدر هموار هست که ابهامی پیش نیاید یعنی

$$P(\vec{\rho} \mid \vec{r}; t) \to 0 \quad \text{وقتی} \quad \vec{r} \to (\text{نقطه‌ای در مرز } \Omega)$$

هیچ معنایی جز آنچه می‌گوید ندارد و $\psi = 0$ روی Γ یعنی

$$\psi \to 0 \quad \text{وقتی} \quad \vec{r} \to (\text{نقطه‌ای در مرز } \Omega)$$

به‌طور مشابه $P(\vec{\rho} \mid \vec{r}; t) \to \delta(\vec{r} - \vec{\rho})$ وقتی $t \to 0$، تعبیر واضحی دارد، یعنی به‌ازای هر مجموعهٔ باز A شامل $\vec{\rho}$

$$\lim_{t \to 0} \iint_A P(\vec{\rho} \mid \vec{r}; t)\, d\vec{r} = 1$$

حال به نکاتی که مناسبت بیشتری دارند می‌پردازم. اگر نظریهٔ ریاضی پخش به هر طریقی متناظر با واقعیت فیزیکی باشد باید نابرابری

$$P_\Omega(\vec{\rho} \mid \vec{r}; t) \leqslant P_0(\vec{\rho} \mid \vec{r}; t) = \frac{\exp\left[-\frac{\| \vec{\rho} - \vec{r} \|^2}{2t}\right]}{2\pi t}$$

برقرار باشد. زیرا اگر امکان نابودی ماده (در Γ مرز Ω) وجود داشته باشد، به یقین چیزی که در زمان t در نقطهٔ $\vec{r}$ خواهد بود کمتر از حالتی است که نابودی ماده ممکن نباشد.

حال فرض کنید Q مربعی است که مرکزش $\vec{\rho}$ است و کاملاً در درون Ω است. همچنین فرض کنید مرزش همانند مانعی جاذب عمل می‌کند و $P_Q(\vec{\rho} \mid \vec{r}; t)$، $\vec{r} \in Q$، تراکم متناظر در $\vec{r}$ در زمان t است.

به عبارت دیگر P_Q در معادلهٔ دیفرانسیل

(الف ۲) $$\frac{\partial P_Q}{\partial t} = \frac{1}{2}\nabla^2 P_Q$$

و شرط اولیهٔ

$$P_Q(\vec{\rho} \mid \vec{r}; t) \to \delta(\vec{r} - \vec{\rho}) \quad \text{وقتی} \quad t \to 0 \qquad (\text{ب } 2)$$

صدق می‌کند. همچنین در شرط مرزی

$$P_Q(\vec{\rho} \mid \vec{r}; t) \to 0 \quad \text{وقتی (نقطه‌ای در مرز } Q) \to \vec{r} \qquad (\text{پ } 2)$$

صادق است

باز هم ظاهراً واضح است که

$$P_Q(\vec{\rho} \mid \vec{r}; t) \leqslant P_\Omega(\vec{\rho} \mid \vec{r}; t), \quad \vec{r} \in Q$$

زیرا وقتی‌که چیزِ پخش شونده به مرز Q می‌رسد، تا جایی که به P_Q مربوط است، از بین می‌رود ولی ممکن است سهمی که در P_Ω دارد از بین نرود.

به این دلیل توانسته‌ایم Q را این‌قدر ساده بگیریم که $P_Q(\vec{\rho} \mid \vec{r}; t)$ به صراحت مشخص است. به‌ویژه

$$P_Q(\vec{\rho} \mid \vec{\rho}; t) = \frac{4}{a^2} \sum_{\substack{m,n \\ \text{اعداد صحیح فرد}}} \exp\left[-\frac{(m^2+n^2)\pi^2}{2a^2} t\right]$$

که a طول ضلع مربع است.

نابرابریهای

$$P_Q(\vec{\rho} \mid \vec{r}; t) \leqslant P_\Omega(\vec{\rho} \mid \vec{r}; t) \leqslant \frac{\exp\left[-\frac{\|\vec{r}-\vec{\rho}\|^2}{2t}\right]}{2\pi t}$$

به‌ازای هر $\vec{r} \in Q$ برقرارند و از جمله به‌ازای $\vec{r} = \vec{\rho}$. در این حالت نتیجه می‌گیریم

$$\frac{4}{a^2} \sum_{\substack{m,n \\ \text{اعداد صحیح فرد}}} \exp\left[-\frac{(m^2+n^2)\pi^2}{2a^2} t\right] \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t} \psi_n^2(\vec{\rho}) \frac{1}{2\pi t}$$

و به سادگی می‌توان ثابت کرد وقتی $t \to 0$، به‌طور مجانبی داریم

$$\frac{4}{a^2} \sum_{\substack{m,n \\ \text{اعداد صحیح فرد}}} \exp\left[-\frac{(m^2+n^2)\pi^2}{2a^2} t\right] \sim \frac{1}{2\pi t}$$

بنابراین به‌طور مجانبی برای $t \to 0$، $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t} \psi_n^2(\vec{\rho}) \sim \frac{1}{2\pi t}$ و قضیهٔ کارلمان نتیجه می‌شود. اثبات قضیهٔ وایل، فقط کمی مشکلتر است.

اگر روی Q از نابرابری

$$\frac{4}{a^2} \sum_{\substack{m,n \\ \text{اعداد صحیح فرد}}} \exp\left[-\frac{(m^2+n^2)\pi^2}{2a^2} t\right] \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t} \psi_n^2(\vec{\rho})$$

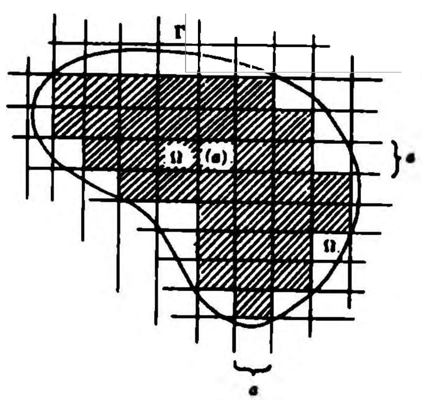
انتگرال بگیریم نتیجه می‌گیریم که

$$4 \sum_{\substack{m,n \\ \text{اعداد صحیح فرد}}} \exp\left[-\frac{(m^2+n^2)\pi^2}{2a^2} t\right] \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t} \iint_Q \psi_n^2(\vec{\rho})\, d\vec{\rho}$$

اکنون Q را همان‌طورکه در شکل ۲ نشان داده شده، با شبکه‌ای متشکل از مربعهای به ضلع a می‌پوشانیم، و فقط آنهایی را نگه می‌داریم که درون Ω هستند. فرض کنید $N(a)$ تعداد این مربعها و $\Omega(a)$ اجتماع تمامی آنها باشد. داریم

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t} = \sum_{n=1}^{\infty} \iint_\Omega \psi^2(\vec{\rho})\, d\vec{\rho} \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t} \iint_{\Omega(a)} \psi_n^2(\vec{\rho})\, d\vec{\rho} \geqslant 4N(a) \sum_{\substack{m,n \\ \text{اعداد صحیح فرد}}} \exp\left[-\frac{(m^2+n^2)\pi^2}{2a^2} t\right]$$

و با انتگرالگیری از رابطهٔ $P_\Omega(\vec{\rho} \mid \vec{\rho}; t) \leqslant 1/2\pi t$ روی Ω نتیجه می‌گیریم $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t} \leqslant |\Omega|/2\pi t$.



شکل ۲

با توجه به اینکه $N(a)a^2 = |\Omega(a)|$، حاصل عملیات اخیر را به‌صورت نابرابری

$$|\Omega| \frac{4}{a^2} \sum_{\substack{m,n \\ \text{اعداد صحیح فرد}}} \exp\left[-\frac{(m^2+n^2)\pi^2}{2a^2} t\right] \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t} \leqslant \frac{|\Omega|}{2\pi t}$$

بیان می‌کنیم.

از آنجا که (قبلاً اشاره کردیم که)

$$\lim_{t \to 0} 2\pi t \frac{4}{a^2} \sum_{\substack{m,n \\ \text{اعداد صحیح فرد}}} \exp\left[-\frac{(m^2+n^2)\pi^2}{2a^2} t\right] = 1$$

به سادگی نتیجه می‌گیریم

$$|\Omega(a)| \leqslant \liminf_{t\to \circ} \text{۲}\pi t \sum_{n=\text{۱}}^{\infty} e^{-\lambda_n t} \leqslant \limsup_{t\to\circ} \text{۲}\pi t \sum_{n=\text{۱}}^{\infty} e^{-\lambda_n t} \leqslant |\Omega|$$

چون با انتخاب aی به‌دلخواه کوچک، می‌توان $|\Omega(a)|$ را به‌دلخواه به $|\Omega|$ نزدیک کرد، باید $\lim_{t\to\circ} \text{۲}\pi t \sum_{n=\text{۱}}^{\infty} e^{-\lambda_n t} = |\Omega|$. یا به عبارت دیگر

$$\sum_{n=\text{۱}}^{\infty} e^{-\lambda_n t} \sim \frac{|\Omega|}{\text{۲}\pi t} \ , \quad t \to \circ$$

۹. آیا اکنون دقت را به کمال رسانده‌ایم؟ کاملاً نه. چون با اینکه نابرابریهای

$$P_\Omega(\vec{\rho} \mid \vec{r}; t) \leqslant \frac{\exp\left[-\frac{\|\vec{r}-\vec{\rho}\|^\text{۲}}{\text{۲}t}\right]}{\text{۲}\pi t}$$

و

$$P_\Omega(\vec{\rho} \mid \vec{r}; t) \geqslant P_Q(\vec{\rho} \mid \vec{r}; t) \ , \quad \vec{r} \in Q$$

بر مبنای شهود کاملاً واضح‌اند ولی باید ثابت شوند. روشی که من برای این کار برگزیده‌ام شاید ساده‌ترین روش نباشد و به این علت آن را انتخاب کرده‌ام که موضوع فیزیکی دیگری را نیز نشان دهم.

از اوایل سالهای این سده، از رهگذار آثار اینشتین و اسمولوخوفسکی[1]، می‌دانیم که پخش چیزی نیست جز تجلیِ درشت‌نمودِ حرکت براونیِ میکروسکوپی. تحت فرضهای فیزیکی مناسب، می‌توان $P_\Omega(\vec{\rho} \mid \vec{r}; t)$ را بدین صورت تعبیر کرد که برابر است با چگالیِ احتمالِ یافتن ذرهٔ براونیِ آزادی، در $\vec{r}$ در زمان t به شرط آنکه سفر نامنظمش را در $t = \circ$ از $\vec{\rho}$ آغاز کرده باشد و هنگامی‌که به مرز Ω می‌رسد جذب شود.

اگر تعداد زیادی (مثلاً N) ذرهٔ براونی آزاد و مستقل مسیر حرکت خود را از $\vec{\rho}$ آغازکنند آنگاه

$$N \iint_A P(\vec{\rho} \mid \vec{r}; t)\, d\vec{r}$$

متوسطِ تعدادِ این ذرات است که در لحظهٔ t در A یافت می‌شود. چون درصد خطای آماری از مرتبهٔ $\text{۱}/\sqrt{N}$ است، نظریهٔ پخشِ پیوسته، هنگامی‌که N بزرگ است تقریبی عالی است.

در اوایل دههٔ ۱۹۲۰ نوربرت وینر این دیدگاه را بسیار عمیقتر کرد. او به‌جای اینکه مسأله را به‌صورت مسأله‌ای در آمار ذرات در نظر بگیرد آن را به‌صورت مسأله‌ای در آمار مسیرها در نظر گرفت. در اینجا بدون اینکه وارد جزئیات شوم به‌اختصار آنچه را که برای فهمیدن این مطلب لازم است مرور می‌کنم.

مجموعهٔ تمامی خمهای پیوستهٔ $\vec{r}\,(\tau)$، $\circ \leqslant \tau < \infty$، را که از مبدأ دلخواه O آغاز می‌گردند در نظر بگیرید. فرض کنید $\Omega_\text{۱}, \Omega_\text{۲}, \ldots, \Omega_n$ مجموعه‌های باز و $t_\text{۱} < t_\text{۲} < \ldots < t_n$ لحظه‌های مرتب زمان باشند. طبق نظریهٔ اینشتین‌ـاسمولوخوفسکی لازم بود که (با واحدهای مناسب):

$$\text{Prob}\,\{\vec{\rho} + \vec{r}\,(t_\text{۱}) \in \Omega_\text{۱}, \vec{\rho} + \vec{r}\,(t_\text{۲}) \in \Omega_\text{۲}, \ldots, \vec{\rho} + \vec{r}\,(t_n) \in \Omega_n\} = \int_{\Omega_\text{۱}} \cdots \int_{\Omega_n} P_\circ(\vec{\rho} \mid \vec{r}; t_\text{۱}) P_\circ(\vec{r}_\text{۱} \mid \vec{r}_\text{۲}; t_\text{۲} - t_\text{۱}) \ldots P_\circ(\vec{r}_{n-\text{۱}} \mid \vec{r}_n; t_n - t_{n-\text{۱}})\, d\vec{r}_\text{۱} \ldots d\vec{r}_n$$

1. Smoluchowski

که مانند گذشته

$$P_\circ(\vec{\rho} \mid \vec{r}; t) = \frac{\text{۱}}{\text{۲}\pi t} \exp\left[-\frac{\|\vec{r} - \vec{\rho}\|^\text{۲}}{\text{۲}t}\right]$$

وینر نشان داده است که می‌توان روی فضای تمامی خمهای پیوستهٔ $\vec{r}\,(\tau)$ که از مبدأ سرچشمه می‌گیرند اندازه‌ای کاملاً جمعی ساخت طوری که مجموعهٔ خمهای $\vec{\rho} + \vec{r}\,(\tau)$ که در زمانهای $t_\text{۱} < t_\text{۲} < \cdots < t_n$ به‌ترتیب در مجموعه‌های باز $\Omega_\text{۱}$، $\Omega_\text{۲}$، ...، Ω_n قرار دارند اندازه‌اش با فرمول اینشتین‌ـاسمولوخوفسکی معین گردد که در بالا آورده شد.

مجموعهٔ خمهایی با ضابطهٔ $\vec{\rho} + \vec{r}\,(\tau) \in \Omega$، $\circ \leqslant \tau \leqslant t$، و $\vec{\rho} + \vec{r}\,(t) \in A$ (A مجموعه‌ای باز) اندازه‌پذیر است و می‌توان نشان داد که اگر مرز Ω به‌قدرکافی هموار باشد، این اندازه برابر است با

$$\int_A P_\Omega(\vec{\rho} \mid \vec{r}; t)\, d\vec{r}$$

این گزاره‌ای نابدیهی است و نباید متعجب شویم که فوراً نابرابریهایی را که در سطرهای پیش برای دقیق کردنِ اصل «احساس نکردن مرز» لازم داشتیم، نتیجه می‌دهد.

در واقع، خواننده بدون شک درمی‌یابد که نابرابریهای مورد نظر نتیجهٔ این واقعیت‌اند که اگر مجموعه‌های $\mathcal{A}$، $\mathcal{B}$، $\mathcal{C}$ به‌گونه‌ای باشند که

$$\mathcal{A} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{C}$$

آنگاه $\text{meas}.\mathcal{A} \leqslant \text{meas}.\mathcal{B} \leqslant \text{meas}.\mathcal{C}$.

پیش از آنکه جلوتر برویم نکته‌ای را یادآور می‌شوم. مجموعهٔ خمهایِ با ضابطهٔ

$$\vec{\rho} + \vec{r}\,(t) \in A \ , \ \circ \leqslant \tau \leqslant t \ , \ \vec{\rho} + \vec{r}\,(\tau) \in \Omega$$

اندازه‌پذیر است حتی اگر مرز Ω کاملاً نامنظم باشد. اندازه را می‌توان باز هم به‌صورت $\int_A P_\Omega(\vec{\rho} \mid \vec{r}; t)\, d\vec{r}$ نوشت و می‌توان نشان داد که در درون Ω، $P_\Omega(\vec{\rho} \mid \vec{r}; t)$ در معادلهٔ پخش $\partial P_\Omega / \partial t = \frac{\text{۱}}{\text{۲}} \nabla^\text{۲} P_\Omega$ صدق می‌کند و همچنین در شرط اولیهٔ

$$\lim_{t\to\circ} \int_A P_\Omega(\vec{\rho} \mid \vec{r}; t)\, d\vec{r} = \text{۱}$$

به‌ازای تمامی مجموعه‌های باز A که $\vec{\rho} \in A$، صادق است.

ولی دیگر معلوم نیست که چگونه شرط مرزی

$$P_\Omega(\vec{\rho} \mid \vec{r}; t) \to \circ \ , \quad \vec{r} \to \Gamma \ \text{وقتی}$$

را تعبیر کنیم.

این مشکل باعث می‌شود که در نظریهٔ کلاسیکِ پخش مرزهای به اندازهٔ کافی هموار را در نظر بگیرند. تعبیر احتمالیِ $P_\Omega(\vec{\rho} \mid \vec{r}; t)$ تعریفی طبیعی برای جواب تعمیم یافتهٔ مسألهٔ مقدار مرزیِ مورد نظر فراهم می‌کند.

۱۰. حال مطمئنیم که می‌توانیم مساحت طبل را بشنویم و ممکن است چنین به نظر آید که کوشش فراوانی کرده‌ایم برای به‌دست آوردن چیزی اندک.

هم‌اکنون به شما نشان می‌دهم که رهیافتی را که به‌کار بردیم می‌توان تعمیم داد تا نتیجه‌های بیشتری به‌دست آورد ولی برای آنکه پیچیدگیهای کاملاً هندسی خاصی پیش نیایند بحث را به طبلهای محدب محدود می‌کنم.

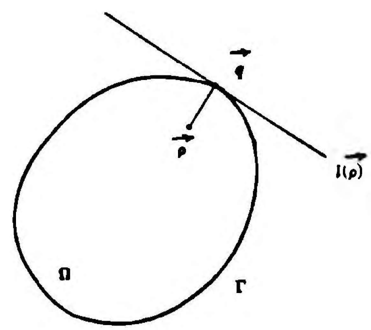
اولین موفقیت ما با معرفی اصل احساس نکردن مرز به‌دست آمد. ولی اگر $\vec{\rho}$ به Γ مرز Ω نزدیک باشد آنگاه ذرات پخش‌شونده که حرکت خود را از $\vec{\rho}$ آغاز می‌کنند تا حدودی تحت تاثیر Γ قرار می‌گیرند.

فرض کنید $\vec{q}$ نزدیکترین نقطهٔ Γ به $\vec{\rho}$ است و $l(\vec{\rho})$ خط راستی است که عمود است بر خط واصل $\vec{\rho}$ و $\vec{q}$ (شکل ۳ را ملاحظه کنید). بنابراین ذرهٔ پخش شونده‌ای که حرکت خود را از ρ آغاز می‌کند برای مدت کوتاهی Γ را به شکل خط راست $l(\vec{\rho})$ می‌بیند.

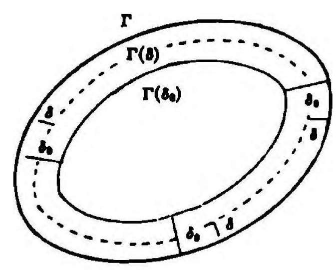
با زبانی تا حدودی خودمانی و تصویری می‌توان گفت که به‌ازای t ی کوچک، ذره فرصتی برای احساس کردن انحنای مرز ندارد.

اگر این اصل معتبر باشد می‌توانم (به‌ازای t ی کوچک) $P_{\Omega}(\vec{\rho} \mid \vec{r};t)$ را با $P_{l(\vec{\rho})}(\vec{\rho} \mid \vec{r};t)$ تقریب بزنم که $P_{l(\vec{\rho})}(\vec{\rho} \mid \vec{r};t)$ نیز در معادلهٔ پخش

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{1}{2}\nabla^{2} P$$



شکل۳



شکل۴

با شرط اولیهٔ $P \to \delta(\vec{\rho} - \vec{r})$ وقتی $t \to 0$ صدق می‌کند ولی شرط مرزی عبارت است از

$P_{l(\vec{\rho})}(\vec{\rho} \mid \vec{r};t) \to 0$ وقتی $\vec{r}$ به نقطه‌ای از $l(\vec{\rho})$ نزدیک می‌شود،

در نهایت خوشبینی انتظار خواهیم داشت که با تقریب خوبی

$$\int_{\Omega} P_{\Omega}(\vec{\rho} \mid \vec{\rho};t)\,d\vec{\rho} \sim \int_{\Omega} P_{l(\vec{\rho})}(\vec{\rho} \mid \vec{\rho};t)\,d\vec{\rho}$$

می‌دانیم که

$$P_{l(\vec{\rho})}(\vec{\rho} \mid \vec{\rho};t) = \frac{1 - e^{-2\delta^{2}/t}}{2\pi t}$$

که در اینجا؛ (کوتاهترین فاصلهٔ $\vec{\rho}$ تا Γ) $= \| \vec{q} - \vec{\rho} \| = \delta$. بنابراین (امیدواریم!)

$$\iint_{\Omega} P_{\Omega}(\vec{\rho} \mid \vec{\rho};t)\,d\vec{\rho} = \sum_{n=1} e^{-\lambda_n t} \sim \frac{|\Omega|}{2\pi t} - \frac{1}{2\pi t}\int_{\Omega} e^{-2\delta^{2}/t}\,d\vec{\rho}$$

$|\Omega|/2\pi t$ همان دوست قدیمی ماست و بنابراین فقط می‌ماند که به‌طور مجانبی (وقتی $t \to 0$) انتگرال $\int_{\Omega} e^{-2\delta^{2}/t}d\vec{\rho}$ را محاسبه کنیم. برای این کار خم $\Gamma(\delta)$ را در نظر بگیرید که تشکیل می‌شود از نقاطی در Ω که «فاصلهٔ» آنها از Γ برابر δ است. (شکل ۴ را ملاحظه کنید)

$\Gamma(\delta)$ به‌ازای δهایی که به قدر کافی کوچک‌اند خوش‌تعریف (و حتی محدب) است و انتگرال ما عمدتاً از δهای کوچک ناشی می‌شود.

اگر $L(\delta)$ نشان دهندهٔ طول $\Gamma(\delta)$ باشد آنگاه داریم

$$\int_{\Omega} e^{-2\delta^{2}/t}\,d\vec{\rho} = \int_{0}^{\delta_0} e^{-2\delta^{2}/t} L(\delta)\,d\delta + \text{(چیزی کوچکتر از } |\Omega| e^{-2\delta_0^{2}/t})$$

و بنابراین با نادیده گرفتن جمله‌ای که مرتبهٔ کوچکیِ نمایی دارد (وهمچنین جمله‌های مرتبهٔ t) نتیجه می‌گیریم

$$\int_{\Omega} e^{-2\delta^{2}/t}\,d\vec{\rho} \sim \sqrt{t}\int_{0}^{\delta_0/\sqrt{t}} e^{-2x^{2}} L(x\sqrt{t})\,dx \sim \sqrt{t}L\int_{0}^{\infty} e^{-2x^{2}}\,dx = \frac{L}{4}\sqrt{2\pi t}$$

که $L = L(0)$ طول Γ است.

سرانجام به فرمول زیر می‌رسیم

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t} \sim \frac{|\Omega|}{2\pi t} - \frac{L}{4}\frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \qquad \text{به‌ازای } t \to 0$$

و در نتیجه می‌توانیم طول محیط طبل را نیز «بشنویم».

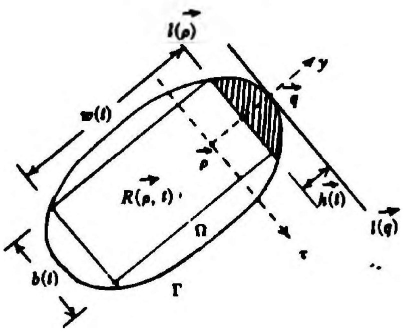
فقط چند سال پیش بود که فرمول مجانبی بالا توسط ریاضیدان سوئدی اوکه پلی‌یل [۲] با استفاده از رهیافتی کاملاً متفاوت به‌دست آمد.

شایان ذکر است که حالا می‌توانیم ثابت کنیم اگر تمامی فرکانسهای طبلی برابر فرکانسهای طبلی دایره‌شکل باشد آنگاه خود آن طبل باید دایره شکل باشد. این نتیجه‌ای است فوری از نابرابری کلاسیک برابر‌محیطی که می‌گوید $L^{2} \geqslant 4\pi|\Omega|$، و تساوی فقط برای دایره برقرار است.

بنابراین دانستن ارتفاع تنها کافی است برای اینکه تشخیص دهیم طبل دایره شکل است یا نه!

۱۱. آیا می‌توان بازهم استدلال شهودی را دقت بخشید؟ در واقع چنین کاری شدنی است. ابتدا نابرابری

$$P_{\Omega}(\vec{\rho} \mid \vec{\rho};t) \leqslant P_{l(\rho)}(\vec{\rho} \mid \vec{\rho};t) = \frac{1}{2\pi t} - \frac{1}{2\pi t}e^{-2\delta^{2}/t}$$



شکل۵

را به‌کار می‌بریم که فقط شکل بهبود یافتهٔ نابرابری $P^*_\Omega(\vec\rho \mid \vec\rho;t) \leqslant 1/2\pi t$ است که قبلاً آن را ثابت کردیم و نابرابری اخیر را هم می‌شود به همان روش اثبات کرد.

سپس به برآورد نقصانی دقیقی برای $P_\Omega(\vec\rho \mid \vec\rho;t)$ نیاز داریم و یافتن آن مقداری مشکلتر است. همان‌گونه که در شکل ۵ نشان داده شده مستطیل $R(\vec\rho,t)$ را «محاط» می‌کنیم و $h(t)$، ارتفاع قطعهٔ سایه‌دار، کمی بعد تعیین می‌شود.

فرض کنید $b(t)$ آن ضلع R باشد که در راستای قاعدهٔ قطعه است و ضلع دیگر آن $w(t)$ باشد. از شکل معلوم است که محور y ضلعهایی از مستطیل را که موازی محور xاند به دونیم می‌کند.

حال $P_R(\vec\rho \mid \vec\rho;t)$ را در نظر بگیرید. شاید این نمادگذاری گمراه کننده باشد زیرا چنین القاء می‌کند که با مسألهٔ مقدار مرزیی سروکار داریم که در آن، مرز در طول زمان تغییر می‌کند. ولی واقعیت چنین نیست. چیزی که در نظر داریم چنین است: t را در نظر بگیرید و $P_{R(t)}(\vec\rho \mid \vec r;t)$ را که بی‌ابهام تعریف شده بیابید و در نهایت قرار دهید $\tau = t$. حاصل برابر است با $P_R(\vec\rho \mid \vec r;t)$ که آن را می‌توان به شکل مناسب زیر توصیف کرد

$$P_R(\vec\rho \mid \vec\rho;t) = \frac{1}{2\pi t} \left\{\sum_{-\infty}^{\infty}\left(\exp\left[-\frac{2b^2}{t}n^2\right] - \exp\left[-\frac{2b^2}{t}(n+\frac{1}{2})^2\right]\right)\right\} \times \left\{\sum_{-\infty}^{\infty}\left(\exp\left[-\frac{2w^2}{t}n^2\right] - \exp\left[-\frac{2w^2}{t}(n+\frac{\delta}{w})^2\right]\right)\right\}$$

که $h(t) = \epsilon\sqrt{t}$. حالا قرار دهید $\bar\delta = \delta - h(t) = \|\vec q - \vec\rho\| - h(t)$ و با فرض اینکه $l(\vec\rho)$ واقعاً مماس برخم است (که در یک خم محدب چنین است مگر حداکثر در تعداد شمارایی نقطهٔ استثنایی $\vec q$) داریم

$$\lim_{t\to 0}\frac{b(t)}{h(t)} = \lim_{t\to 0}\frac{b(t)}{\epsilon\sqrt{t}} = \infty$$

و در نتیجه

$$\sum_{-\infty}^{\infty}\left(\exp\left[-\frac{2b^2}{t}n^2\right] - \exp\left[-\frac{2b^2}{t}(n+\frac{1}{2})^2\right]\right) = 1 + o(1)$$

ولی این کاملاً کافی نیست و به تقریب قویتر زیر نیاز داریم

$$\sum_{-\infty}^{\infty}\left(\exp\left[-\frac{2b^2}{t}n^2\right] - \exp\left[-\frac{2b^2}{t}(n+\frac{1}{2})^2\right]\right) = 1 + o(\sqrt{t})$$

برای مثال اگر انحناء در $\vec q$ موجود باشد به یقین وضعیت این‌گونه است زیرا نتیجه می‌گیریم که $h(t) \sim b^2(t)$ و در این‌صورت جملهٔ $o(\sqrt{t})$ برآوردی بس بزرگ خواهد بود. شرطهای منظم بودن بسیار خفیفی در تقریباً همهٔ نقاط $\vec q$ تقریب $o(\sqrt{t})$ را تضمین می‌کنند. بدون اینکه به بحث دربارهٔ این شرطها بپردازیم فقط فرض می‌کنیم مرز آن‌گونه است که حداقل $o(\sqrt{t})$ را تضمین کند.

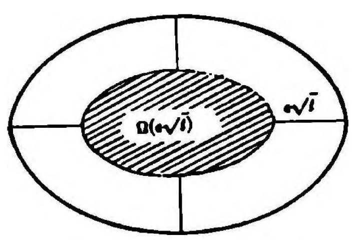
چون $w(t)$ وقتی $t \to 0$ از پایین کراندار است همچنین داریم

$$\sum_{-\infty}^{\infty}\left(\exp\left[-\frac{2w^2}{t}n^2\right] - \exp\left[-\frac{2w^2}{t}(n+\frac{\bar\delta}{w})^2\right]\right) = 1 - e^{-2\bar\delta^2/t} + \text{جمله‌های با مرتبهٔ کوچکی نمایی}$$

کارمان تقریباً تمام شده است. می‌نویسیم

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t} = \int_\Omega P_\Omega(\vec\rho \mid \vec\rho;t)\,d\vec\rho > \int_{\Omega(\epsilon\sqrt{t})} P_R(\vec\rho \mid \vec\rho;t)\,d\vec\rho$$
$$= \frac{1+o(\sqrt{t})}{2\pi t}\int_{\Omega(\epsilon\sqrt{t})}\left(1 - e^{-2\bar\delta^2/t} + (\text{جمله‌های با مرتبهٔ کوچکی نمایی})\right)d\vec\rho$$

(رک. شکل ۶).



شکل۶

پس به غیر از جمله‌هایی که کوچکی آنها از مرتبهٔ نمایی است، و ضریب $1 + o(\sqrt{t})$، انتگرال

$$\int_{\Omega(\epsilon\sqrt{t})}(1 - e^{-2\bar\delta^2/t})\,d\vec\rho$$

را داریم که همانند گذشته می‌توان دید که به‌طور مجانبی برابر است با

$$|\Omega(\epsilon\sqrt{t})| - \frac{L}{4}\sqrt{2\pi t}$$

و در اینجا از جمله‌های مرتبهٔ t و جمله‌های با مرتبهٔ کوچکی نمایی صرف‌نظر کرده‌ایم. چون به‌طور مجانبی داریم $|\Omega(\epsilon\sqrt{t})| \sim |\Omega| - L\epsilon\sqrt{t}$، می‌توانیم نابرابری

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t} > \frac{|\Omega|}{2\pi t} - \frac{(L+\epsilon')}{4}\frac{1}{2\pi t}$$

را به‌دست آوریم. ϵ' رابطهٔ ساده‌ای با ϵ دارد. چون ϵ' را می‌توان به دلخواه کوچک کرد فرمول مجانبی

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t} \sim \frac{|\Omega|}{2\pi t} - \frac{L}{4}\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}$$

نتیجه می‌شود.

۱۲. اگر استراتژی کلی ما برای پرداختن به مسأله درست باشد باید بتوانیم کار را ادامه دهیم و در نقطه‌های بسیار نزدیک به یک مرز هموار، مرز را به‌طور موضعی با دایره‌های انحنای مناسبی جایگزین کنیم.

نتیجه‌ای از آن پلئی‌یل قویاً این نکته را القا می‌کند که برای ناحیه‌ای ساده‌ـهمبند و بامرز هموار (یعنی بدون گوشه و انحناء در هر نقطه موجود است) داریم

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t} \sim \frac{|\Omega|}{2\pi t} - \frac{L}{4}\frac{1}{\sqrt{2\pi t}} + \frac{1}{6}$$

متأسفانه من نمی‌توانم این نتیجه را به‌دست آورم به این دلیل زجرآور که نمی‌توانم عبارت به‌دردخوری برای $P_{\Omega}(\vec{\rho} \mid \vec{\rho}; t)$ اگر Ω دایره باشد، پیدا کنم.

به‌جای اینکه به‌خاطر این وضعیت غمناک خود را به ناامیدی بسپارم بقیهٔ این سخنرانی را به طبلهای چندضلعی اختصاص می‌دهم یعنی طبلهایی که مرزشان چندضلعی است. این بررسی نشان می‌دهد که بدون هیچ شکی وجود جملهٔ ثابت در بسط مجانبیِ ما مدیون انحنای کلیِ مرز است.

۱۳. پیش از آنکه بیشتر روم به عبارتی برای $P_{S(\theta_0)}(\vec{\rho} \mid \vec{r}; t)$ نیاز دارم که $S(\theta_0)$ گوه‌ای نامتناهی به زاویهٔ θ_0 است. به‌عبارت دیگر $P_{S(\theta_0)}$ جواب

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{1}{2}\nabla^2 P$$

است با شرط اولیهٔ معمول $P_{S(\theta_0)}(\vec{\rho} \mid \vec{r}; t) \to \delta(\vec{\rho} - \vec{r})$ وقتی $t \to 0$، و این شرط که وقتی $\vec{r}$ به نقطه‌ای از هرکدام از ضلعهای زاویهٔ θ_0 نزدیک می‌شود، صفر شود.

این مسأله‌ای است بسیار قدیمی و بسیار کلاسیک، و اگر $\theta_0 = \frac{\pi}{m}$ (m صحیح) می‌شود با روش معمول تصویرها حلش کرد. برای حالتی که m ناصحیح باشد زومرفلد[1] روشی ابداع کرد که گویی روش تصویرها را به رویهٔ ریمانی تعمیم می‌دهد. کمی بعد، به عبارت دقیقتر در ۱۸۹۹، کارسلاو[2] رهیافتی مقدماتیتر ارائه کرد که در آن $P_{S(\theta_0)}(\vec{\rho} \mid \vec{r}; t)$ با انتگرال مسیری مناسبی نشان داده می‌شود. کارسلاو انتگرال را به سری نامتناهی توابع بسل تبدیل می‌کند ولی برای مقصود ما بهترین کار این است که در مقابل وسوسهٔ [استفاده از] توابع بسل مقاومت کنیم و انتگرال را به شکل دیگری تبدیل کنیم. از جزئیات درمی‌گذرم (با وجود اینکه بعضی از آنها بسیار آموزنده‌اند) و فقط نتیجهٔ پایانی را بیان می‌کنم.

1. Sommerfeld 2. H.S. Carslaw

قرار دهید

$$v(\alpha) = (1/2\pi t) \sum_{\substack{\theta-\alpha-\pi<2k\theta_0 \\ <\theta-\alpha+\pi}} \exp\left[-\frac{r^2 - 2r\rho\cos(\theta-\alpha-2k\theta_0) + \rho^2}{2t}\right] - \sin\left(\frac{\pi^2}{\theta_0}\right)\frac{\exp\left[-\frac{r^2+\rho^2}{2t}\right]}{4\pi\theta_0 t}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp\left[-\frac{r\rho}{t}\cosh y\right]}{\cosh\left\{\frac{\pi}{\theta_0}y + \frac{i\pi}{\theta_0}(\theta-\alpha)\right\} - \cos\frac{\pi^2}{\theta_0}}\,dy$$

جمع $\sum$ روی kهایی است که در نابرابریِ زیر علامت جمع صدق می‌کنند و $\vec{\rho} = (\rho, \alpha)$ و $\vec{r} = (r, \theta)$.

در این‌صورت

$$P_{S(\theta_0)}(\vec{\rho} \mid \vec{r}; t) = v(\alpha) - v(-\alpha)$$

توجه کنید که اگر $\theta_0 = \frac{\pi}{m}$، با m صحیح، انتگرالِ پیچیده حذف می‌شود زیرا که ضریبِ پشتِ آن، یعنی $\sin\frac{\pi^2}{m} = \sin \pi m$، صفراست؛ آنچه که در عبارت حاصل برای $v(\alpha) - v(-\alpha)$ باقی می‌ماند مجموعه‌ای است از جمله‌هایی که به سادگی می‌توان آنها را به‌عنوان جملاتی که از روش تصویرها به‌دست می‌آیند باز شناخت.

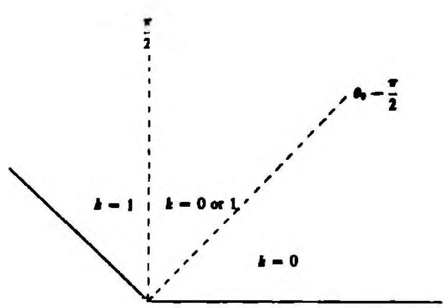
اکنون فرض‌کنیم $\pi > \theta_0 > \pi/2$ و ببینیم در این حالت $P_S(\vec{\rho} \mid \vec{\rho}; t)$ چیست. وقتی‌که در عبارتی که برای $v(\alpha)$ داریم قراردهیم $\theta = \alpha$ نابرابری تحت علامت $\sum$ تبدیل می‌شود به $-\pi < 2k\theta_0 < \pi$ و فقط $k = 0$ مجاز است. در $v(-\alpha)$ نابرابری تبدیل می‌شود به $2\alpha - \pi < 2k\theta_0 < 2\alpha + \pi$ و انتخاب k به α بستگی دارد. می‌بینیم که

$0 < \alpha < \theta_0 - \frac{\pi}{2}$ ، فقط $k = 0$ مجاز است

$\frac{\pi}{2} < \alpha < \theta_0$ ، فقط $k = 1$ مجاز است

ولی برای $\theta_0 - \pi/2 < \alpha < \pi/2$ هم $k = 0$ و هم $k = 1$ مجاز است. (شکل ۷ را ببینید)

حالا قرار می‌دهیم $\vec{r} = \vec{\rho}$ (پس $\rho = r$) و به‌تفصیل عبارتهایی را که برای $P_{S(\theta_0)}(\vec{\rho} \mid \vec{\rho}; t)$ داریم در این سه قطاع می‌نویسیم. برای



شکل۷

$$0 < \alpha < \theta_0 - \pi/2$$

$$P_S(\vec{\rho} \mid \vec{\rho};t) = \frac{1}{2\pi t} - \frac{\exp\left[-\frac{r^2}{t}(1-\cos 2\alpha)\right]}{2\pi t} -$$
$$\sin\left(\frac{\pi^2}{\theta_0}\right)\frac{\exp\left[-\frac{r^2}{t}\right]}{4\pi\theta_0 t}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp\left[-\frac{r^2}{t}\cosh y\right]}{\cosh\frac{\pi}{\theta}y - \cos\frac{\pi^2}{\theta}}dy +$$
$$\sin\left(\frac{\pi^2}{\theta_0}\right)\frac{\exp\left[-\frac{r^2}{t}\right]}{4\pi\theta_0 t}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp\left[-\frac{r^2}{t}\cosh y\right]}{\cosh\left\{\frac{\pi}{\theta}y - 2\pi i\frac{\alpha}{\theta_0}\right\} - \cos\frac{\pi^2}{\theta}}dy$$

برای $\pi < \alpha < \theta_0$

$$P_S(\vec{\rho} \mid \vec{\rho};t) = \frac{1}{2\pi t} - \frac{\exp\left[-\frac{r^2}{t}(1-\cos 2\theta_0 - \alpha)\right]}{2\pi}$$

همان دو انتگرال بالایی +

و در نهایت برای $\theta_0 - \frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$

$$P_S(\vec{\rho} \mid \vec{\rho};t) = \frac{1}{2\pi t} \quad \frac{\exp\left[-\frac{r^2}{t}(1-\cos 2\alpha)\right]}{2\pi t} - \frac{\exp\left[-\frac{r^2}{t}(1-\cos 2\theta_0 - \alpha)\right]}{2\pi t}$$

باز هم همان دو انتگرال بالایی +

باید توجه کنیم که $r^2(1-\cos 2\alpha)$ و $(r^2(1-\cos 2(\theta_0-\alpha))$ برابر است با $2\delta^2$ که δ فاصلهٔ $\vec{\rho}$ است تا یکی از ضلعهای گُوه.

۱۴. برای اینکه موضوع کمی ساده‌تر شود فرض می‌کنیم که طبلِ چندضلعی محدب است و تمامی زاویه‌ها منفرجه‌اند.

در هر رأس عمودهایی بر ضلعهای چندضلعی رسم می‌کنیم و در نتیجه N قطاع سایه‌دار به‌دست می‌آوریم (N تعداد ضلعها و رأسهای چندضلعی است.)

حالا فرض کنید ρ نقطه‌ای در Ω باشد. چیزهایی که از $\vec{\rho}$ پخش می‌شوند مرز را یا به شکلِ خط راست و یا اگر $\vec{\rho}$ نزدیک رأسی باشد به شکل گوه‌ای نامتناهی «می‌بینند».

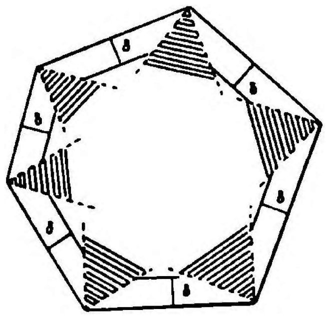
همچنین می‌شود گفت که در نظر ذرهٔ پخش شونده، مرز چون نزدیکترین گوه است و در نتیجه می‌شود به‌جای $P_\Omega(\vec{\rho} \mid \vec{\rho};t)$، $P_{S(\theta_0)}(\vec{\rho} \mid \vec{\rho};t)$ را قرار داد که $S(\theta_0)$ نزدیکترین گوه به $\vec{\rho}$ است.

هر $P_S(\vec{\rho} \mid \vec{\rho};t)$ جملهٔ $\frac{1}{2\pi t}$ را دارد و پس از انتگرالگیری روی Ω جملهٔ $\frac{|\Omega|}{2\pi t}$ را نتیجه می‌دهد. همچنین هر $P_S(\vec{\rho} \mid \vec{\rho};t)$ شامل دو انتگرال است که پیچیده به نظر می‌آیند و باید روی گوه محاسبه شوند.

خوشبختانه حاصل دومین انتگرال برابر صفر است و اولی پس از انتگرالگیری روی $S(\theta_0)$ برابر است با

$$-\frac{1}{8\pi}\left(\sin\frac{\pi^2}{\theta_0}\right)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dy}{(1+\cosh y)\left(\cosh\frac{\pi}{\theta}y - \cos\frac{\pi^2}{\theta_0}\right)}$$

این فقط سهم یک گوه است، برای به‌دست آوردن سهم کل گوه‌ها باید روی همهٔ گوه‌ها مجموع‌یابی کنیم



شکل۸

بنابراین سهم کل گوه‌ها برابر است با

$$-\frac{1}{8\pi}\sum_\theta\left(\sin\frac{\pi^2}{\theta_0}\right)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dy}{(1+\cosh y)\left(\cosh\frac{\pi}{\theta}y - \cos\frac{\pi^2}{\theta_0}\right)}$$

در نهایت اگر $\vec{\rho}$ درون قطاع سایه‌دار گوهٔ $S(\theta_0)$ باشد با انتگرالگیری روی قطاع به‌دست می‌آوریم

$$-\int_{\theta_0-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\alpha\int_0^{\infty}\left\{\frac{\exp\left[-\frac{r^2}{t}(1-\cos 2\alpha)\right]}{2\pi t}+ -\frac{\exp\left[-\frac{r^2}{t}(1-\cos 2\theta_0-\alpha)\right]}{2\pi t}\right\}r\,dr =$$
$$-\frac{1}{2}\frac{1}{2\pi}\cot\left(\theta_0 - \frac{\pi}{2}\right)$$

و سهم کل قطاعهای سایه‌دار برابر است با $-\frac{1}{2}1/2\pi\sum_\theta \cot(\theta_0 - \pi/2)$. به‌سادگی می‌شود دید که سهم بقیهٔ قسمتها برابر است با

$$-\frac{1}{2\pi t}\int_0^{\infty}\left(L - 2\delta\sum_\theta\cot(\theta_0 - \frac{\pi}{2})\right)e^{-2\delta^2/t}d\delta$$
$$= -\frac{L}{4}\frac{1}{\sqrt{2\pi t}} + \frac{1}{2}\frac{1}{2\pi}\sum_\theta\cot\left(\theta_0 - \frac{\pi}{2}\right)$$

در نهایت برای طبل چندضلعی داریم

$$\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\lambda_n t} \sim \frac{|\Omega|}{2\pi t} - \frac{L}{4}\frac{1}{\sqrt{2\pi t}} - \frac{1}{8\pi}$$
$$\sum_\theta\left(\sin\frac{\pi^2}{\theta_0}\right)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dy}{(1+\cosh y)\left(\cosh\frac{\pi}{\theta}y - \cos\frac{\pi^2}{\theta}\right)}$$

که هر θ_0 در نابرابری $\pi/2 < \theta_0 < \pi$ صدق می‌کند. اگر چندضلعی N ضلع داشته باشد و اگر $N \to \infty$ به‌طریقی که هر θ_0 به π میل کند آنگاه جملهٔ ثابت نزدیک می‌شود به

$$\frac{2\pi}{8\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dy}{(1+\cosh y)^2} = \frac{1}{6}$$

این نتیجه باید اعتقاد ما را به اینکه برای طبلهای ساده‌ـهمبندِهموار این ثابت عمومی و برابر $\frac{1}{6}$ است، تقویت کند.

۱۵. در طبلهای چندگانه‌ـهمبند چه اتفاقی می‌افتد؟

اگر طبل و سوراخها چندضلعی باشد پاسخ به سادگی به‌دست می‌آید. فقط نیاز داریم به $P_{S(\theta_0)}(\vec{\rho} \mid \vec{\rho}; t)$ به‌ازای $\pi < \theta_0 < 2\pi$ که به‌سادگی از فرمول کلی که در بالا آورده شد به‌دست می‌آید.

در نزدیک سوراخها، ذره‌های پخش شونده گوه‌های مقعر «می‌بینند» ولی چیزی در اصل عوض نمی‌شود.

اگر تمام چندضلعیها به خمهای هموار نزدیک شوند ثابت به $\frac{1}{6}(1-r)$ نزدیک می‌شود که r تعداد سوراخهاست. بنابراین طبیعی است حدس بزنیم که برای طبلی هموار با r سوراخ هموار داریم

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t} \sim \frac{|\Omega|}{2\pi t} - \frac{L}{4}\frac{1}{\sqrt{2\pi t}} + (1-r)\frac{1}{6}$$

و بنابراین می‌شود چندگانه‌ـهمبندی طبل را «شنید»!

البته می‌شود در این باره اندیشید که آیا به‌طورکلی می‌توان ثابت اویلر‌ـپوانکاره را شنید یا نه، و همه‌جور سؤالهای جالب توجه دیگر نیز مطرح کرد.

همان‌گونه که مطالعهٔ ما بر روی طبلهای چندضلعی نشان می‌دهد، ساختار جملهٔ ثابت کاملاً پیچیده است، زیرا خصوصیتهای متری و توپولوژیک را ترکیب می‌کند. باید دید که آیا می‌شود این خصوصیتها را از هم جدا کرد یا نه.

مراجع

1. M. Kac, On some connections between probabillity theory and integral equations. Proc. Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, 1957, pp. 189-215.

2. A.Pleijel, A study of certain Green's functions with applications in the theory of vibrating membranes, Arkiv för Matematik. 2 (1954) 553-569

******

• Mark Kac, "Can one hear the shape of a drum?", *Am. Math. Monthly.* (4)**73**(1966) 1-23.

این مقاله را نویسنده به جورج یوجین اولنبک (George Eugene Uhlenbeck) تقدیم کرده است.