مسألهٔ دهم هیلبرت*

مارتین دیویس، روبن هرش*

آیا می‌توان روشی طرح کرد که نشان دهد یك معادلهٔ دیوفانتی (معادله‌ای‌که جوابهای صحیح آن مورد نظر است.) جواب دارد یا نه؟ به‌این سؤال که یکی از سؤالهای فهرست مشهور هیلبرت است، جواب داده شده است.

داوید هیلبرت، در ۸ اوت سال ۱۹۰۰ در پاریس با معرفی فهرستی از ۲۳ مسألهٔ اساسی به استقبال قرن جدید می‌رود، ریاضیدانان آینده را به‌مبارزه می‌طلبد و دومین کنگرهٔ ریاضیدانان را چنین مخاطب‌قرار می‌دهد: «در درون خود این ندای دایمی را می‌شنویم که: مسأله این است، جوابش را بیاب؛ می‌توان جواب را با استدلال محض به‌دست آورد، زیرا درریاضیات هرگز نخواهیم دانست معنی ندارد.» بعضی از مسائل هیلبرت هنوزهم حل نشده‌اند؛ وبعضی‌دیگر به‌چند نسل پژوهشگر ریاضی الهام بخشیده و آنان را به‌سوی نظریه‌های جدید ریاضی‌سوق داده‌اند. جدیدترین‌مسألهٔ حل‌شدهٔ هیلبرت، مسألهٔ دهم اوست که درسال ۱۹۷۰ به‌وسیلهٔ یوری ماتیاسویچ[1] ریاضیدان ۲۲ سالهٔ روسی حل‌شد.

داوید هیلبرت درسال ۱۸۶۲ در کونیگسبرگ[2] متولد شد و از سال ۱۸۹۵ تاسال ۱۹۴۳ که مرگش‌فرا رسید استاد دانشگاه گوتینگن بود. بعد از مرگ هانری پوانکاره درسال ۱۹۱۲، عموماً او را بزرگترین ریاضیدان عصرخودش می‌دانستند. هیلبرت درچندین زمینهٔ ریاضی سهم اساسی‌دارد، ولی از او بیشتر به‌خاطرتوسعهٔ روش‌تجریدی به‌عنوان ابزاری نیرومند درریاضیات یاد می‌شود.

مسألهٔ دهم هیلبرت به‌آسانی بیان می‌شود. این‌مسأله، به‌ساده‌ترین و اساسیترین مبحث ریاضی، یعنی حل‌معادلات، مربوط است. معادلاتی که باید حل شوند، معادلات چند جمله‌ای هستند، یعنی معادلاتی مانند $x^2 - 3xy = 5$، که از جمع وضرب ثابتها و متغیرها و با به‌کاربردن توانهای صحیح ومثبت تشکیل می‌شوند. به‌علاوه هیلبرت تصریح کرد

1. Matyasevich
2. Konigsberg

که در این معادلات، تنها باید اعداد صحیح مثبت یا منفی به‌کار رود. هیچ‌عدد گنگ یا موهومی، وحتی‌عدد گویا، مجاز به‌ورود درمعادلات‌و یا درجوابهای آنها نیست. معادلاتی‌ازاین‌گونه را، به‌یاد دیوفانتوس اسکندرانی[1] که درقرن سوم میلادی کتابی‌دراین‌باب تألیف کرده‌است، معادلات دیوفانتی می‌نامند.

مسألهٔ دهم هیلبرت این است: شیوه‌ای مکانیکی ارائه دهید که با آن بتوان هرمعادلهٔ دیوفانتی را آزمود و دید که جواب دارد یا نه. به‌بیان هیلبرت: «معادله‌ای دیوفانتی با تعدادی دلخواه مجهول و با ضرایب صحیح مفروض است؛ روشی ارائه کنیدکه طبق آن باتعدادی متناهی عمل بتوان تعیین‌کرد که معادله جواب دارد یا نه.» هیلبرت جویای روشی که جوابها را پیدا کند، نبود، بلکه صرفاً در جستجوی روشی بودکه مشخص کند معادله جواب دارد یانه. این فرایند باید شیوهٔ صوری‌بدون ابهامی باشدکه بتوان آن را به‌صورت برنامه‌ای برای ماشین محاسبه درآورد، و کارایی آن در تمام حالات قابل تضمین باشد. چنین فرایندی را یك الگوریتم می‌نامند.

اگرمسألهٔ هیلبرت به‌صورت ساده‌ای بیان می‌شود، بیان جواب ماتیاسویچ ازآن هم ساده‌تر است: هرگز نمی‌توان چنین‌فرایندی طرح کرد؛ چنین الگوریتمی وجود ندارد. با این شیوهٔ بیان، جواب ماتیاسویچ نومید کننده و منفی به‌نظر می‌رسد. باوجود این، کار ماتیاسویچ کاری است مهم ومفید که خواص اعداد را به‌ما بهتر می‌شناساند.

کار ماتیا سویچ، گسترش یك رشته پژوهش است که به‌وسیلهٔ سه آمریکایی به‌عمل آمده است: دیویس (یکی ازنویسندگان این مقاله)، جولیارابینسون[2]، وهیلری پاتنام[3]. کاراین گروه به‌نوبهٔ خود مبتنی بود بر پژوهشهای پیشین چند نفر از بنیانگذاران منطق جدید و نظریهٔ محاسبه‌پذیری[4]: آلن تورینگ[5]، امیل پست[6]، آلونسوچرچ[7]، استفن کلین[8]، وکورت گودل که به‌خاطرکار درزمینهٔ سازگاری دستگاههای اصل موضوعی (مسألهٔ دوم هیلبرت) وفرضیهٔ پیوستار[9] کانتور (مسألهٔ اول هیلبرت) معروف است.

اکنون باتظری به‌چند معادلهٔ دیوفانتی بررسی مسألهٔ دهم هیلبرت را آغازمی کنیم. اصطلاح «معادلهٔ دیوفانتی» تاحدی گمراه‌کننده است، زیرا ماهیت معادله به‌اندازهٔ ماهیت جوابهای قابل قبول آن دارای اهمیت‌نیست. مثلاً، هرگاه معادلهٔ $x^2 + y^2 - 2 = 0$ را به‌عنوان یك معادلهٔ دیوفانتی‌درنظرنگیریم، این‌معادله بینهایت‌جواب دارد. جوابها،

1. Diophantus of Alexandria
2. Julia Robinson
3. Hilary Putnam
4. computability
5. Alan Turing
6. Emil Post
7. Alonzo Church
8. Stephen Kleene
9. continuum hypothesis

به‌وسیلهٔ نمودار معادله نمایش‌داده می‌شوند، که دایره‌ای است واقع در صفحه‌ای که توسط محورهای x و y ساخته می‌شود: مرکز این دایره، دارای مختصات $x=۰$ و $y=۰$ است. این نقطه مبدأ نامیده می‌شود و به‌صورت $(۰, ۰)$ نمایش‌داده می‌شود. شعاع دایره برابر $\sqrt{۲}$ است. (شکل ۱). مختصات هر نقطهٔ دایره در معادله صدق می‌کند، و تعداد این‌گونه نقاط بینهایت است. ولی، اگر معادله را به‌عنوان یک معادلهٔ دیوفانتی درنظر بگیریم، تنها دارای این چهارجواب است: (۱) $x=۱$، $y=۱$؛ (۲) $x=-۱$، $y=۱$؛ (۳) $x=۱$، $y=-۱$؛ و (۴) $x=-۱$، $y=-۱$.

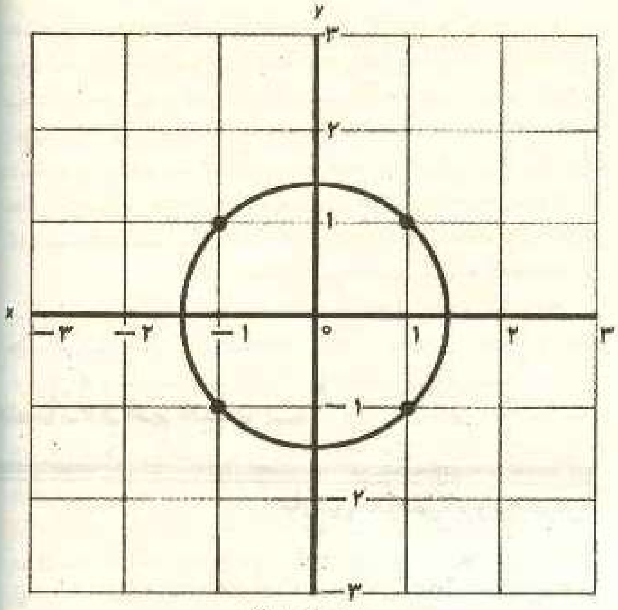
فرض کنید این معادله، به‌معادلهٔ $x^۲+y^۲-۳=۰$ تغییر یابد. معادلهٔ اخیر به‌عنوان یک معادلهٔ معمولی بینهایت جواب دارد؛ اما به عنوان یک معادلهٔ دیوفانتی، ابداً جواب ندارد. دلیلش این است که اکنون نمودار معادله،دایره‌ای به‌شعاع $\sqrt{۳}$ است و این خم هیچ نقطه‌ای ندارد که هر دومختص آن عدد صحیح باشد.

دستهٔ معروفی ازمعادلات دیوفانتی به‌صورت $x^n+y^n=z^n$ است، که در آن n می‌تواند ۲، ۳، ۴ یا هرعدد صحیح بزرگتری باشد. اگر n برابر ۲ باشد، طول اضلاع هرمثلث قائم‌الزاویه‌ای درمعادله صدق می‌کند ــ معادله به‌قضیهٔ فیثاغورث موسوم است. یک دسته از این جوابها اعداد $x=۳$، $y=۴$، $z=۵$ است. اگر n برابر ۳ یا بزرگتر از آن باشد، معادله همان چیزی است که به معادلهٔ فرما مشهور است. پیردوفرما، ریاضیدان قرن هفدهم فرانسه، فکرمی‌کرد ثابت کرده است که این معادلات دارای جوابهای صحیح مثبت نیستند: وی درحاشیهٔ نسخهٔ خود از کتاب دیوفانتوس نوشته است که «اثباتی شگفت‌انگیز» برای این موضوع یافته است، اما متأسفانه این اثبات به‌قدری طولانی است که دراین حاشیه جا نمی‌گیرد. این اثبات (اگر واقعاً فرما چنین اثباتی داشت) هرگز پیدا نشد. شاید این مساله، که به‌آخرین قضیهٔ فرما معروف است، قدیمیترین و معروفترین مسألهٔ حل نشدهٔ ریاضی باشد.

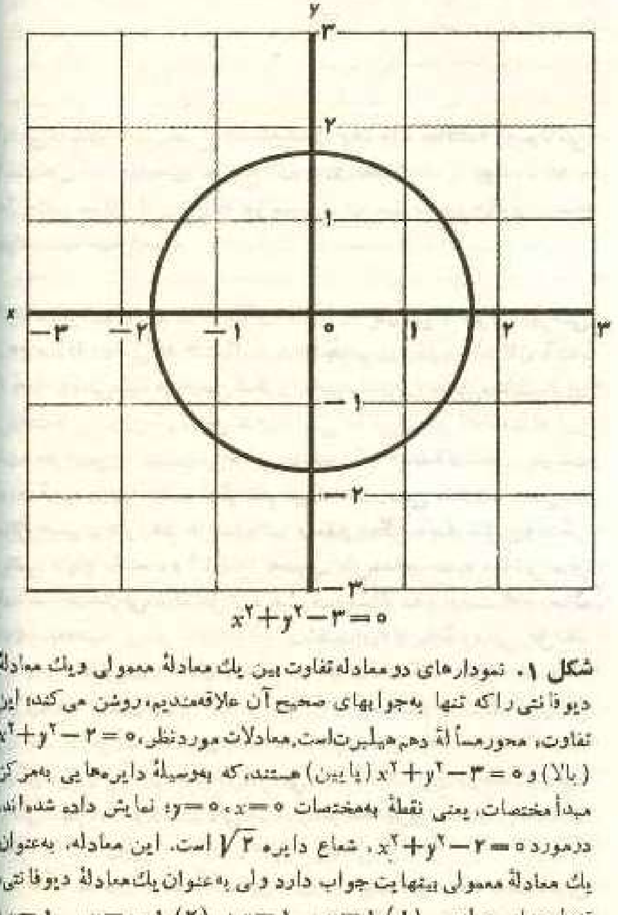
این مثالها نشان می‌دهند که نوشتن معادلات دیوفانتی آسان ولی حل آنها مشکل است. حل این معادلات مشکل است، زیرا درمورد نوع اعدادی که به‌عنوان جواب می‌پذیریم، محدودیت قائلیم.

درمورد معادلات درجهٔ اول، یعنی معادلاتی که در آنهامجهولهادر هم ضرب نشده‌اند وهمهٔ توانها برابر با یک‌اند، همچون معادلهٔ $۷x+۴y-۳z-۹۹t+۱۳u-۱۰=۰$، وجود یا عدم وجود جوابها را می‌توان به‌وسیلهٔ یک فن تقسیم، که از قدیم به الگوریتم اقلیدس معروف است، تعیین کرد. در مورد معادلات درجهٔ دوم دو مجهولی، مانند $۳x^۲-۵y^۲+۷=۰$ یا $x^۲-xy-y^۲=۱$، با نظریه‌ای که در اوایل قرن نوزدهم به وسیلهٔ کارل فریدریش گاوس کبیر توسعه یافت، می‌توان وجود یا عدم وجود جوابها را تعیین کرد. کار اخیر ریاضیدان جوان انگلیسی، آلن بیکر[1] روی معادلات دومجهولی که درجهٔ آنها بیش از ۲ است، موضوع را تا حد زیادی روشن کرده است. درمورد معادلات با بیش از دومجهول که درجهٔ آنها بیش از یک است، درمقابل دریای عظیمی از بی‌اطلاعی، تنها چند حالت خاص را می‌توان با شگردهای ویژه حل کرد.

به چه دلیل به دست آوردن قرابندی از آن گونه که هیلبرت می‌خواست، بسیار مشکل است؟ سرراست‌ترین راه برای به‌دست آوردن جواب، آن است که تمام مقادیر ممکن مجهولها را یکی پس از دیگری بیازماییم تا وقتی که جوابی پیدا شود. برای مثال، اگر معادله دارای دومجهول باشد، می‌توان فهرستی از تمام جفتهای اعداد



$x^۲+y^۲-۲=۰$



$x^۲+y^۲-۳=۰$

شکل ۱. نمودارهای دو معادله تفاوت بین یک معادلهٔ معمولی و یک معادلهٔ دیوفانتی را که تنها به‌جوابهای صحیح آن علاقه‌مندیم، روشن می‌کند؛ این تفاوت، محور مسألهٔ دهم هیلبرت است. معادلات موردنظر، $x^۲+y^۲-۲=۰$ (بالا) و $x^۲+y^۲-۳=۰$ (پایین) هستند، که به‌وسیلهٔ دایره‌هایی به‌مرکز مبدأ مختصات، یعنی نقطهٔ به‌مختصات $x=۰$، $y=۰$، نمایش داده شده‌اند. درمورد $x^۲+y^۲-۲=۰$، شعاع دایره $\sqrt{۲}$ است. این معادله، به‌عنوان یک معادلهٔ معمولی بینهایت جواب دارد ولی به‌عنوان یک معادلهٔ دیوفانتی، تنها چهار جواب، (۱) $x=۱$، $y=۱$؛ (۲) $x=-۱$، $y=۱$؛ (۳) $x=۱$، $y=-۱$ و (۴) $x=-۱$، $y=-۱$ دارد. این جوابها باخالهایی نمایش داده شده‌اند؛ این خالها محل تلاقی نمودار و چهار نقطه به‌مختصات فوق‌الذکر در شبکهٔ دکارتی هستند. درمورد $x^۲+y^۲-۳=۰$، شعاع دایره $\sqrt{۳}$ است. این معادله به‌عنوان یک معادلهٔ معمولی بینهایت جواب دارد، ولی به‌عنوان یک معادلهٔ دیوفانتی، ابداً جواب ندارد.

1. Alan Baker

صحیح تشکیل داد. سپس با مرور این فهرست و آزمودن یك جفت پس از جفتی دیگر، دید که کدام در معادله صدق می‌کند. مسلماً این روش، روش مکانیکی بدون ابهامی است که می‌توان آن را به ماشین هم داد. نتیجه چه خواهد بود؟

اگر معادله، نخستین معادله‌ای باشد که ذکر کردیم، یعنی $x^2+y^2-2=0$، پس از آزمودن $(0,0)$، $(0,1)$، $(1,0)$، $(0,-1)$، $(-1,0)$، همه را کنار می‌گذاریم. نامزد بعدی، $(1,1)$، یك جواب است. شانس آوردیم زیرا تنها شش جفت را باید در نظر می‌گرفتیم. اما اگر معادله $x^2+y^2=20000$ باشد، قبل از یافتن جواب باید هزاران جفت عدد را بیازماییم. بازهم روشن است که اگر جوابی وجود داشته باشد، در تعدادی متناهی مرحله به‌دست می‌آید.

از طرف دیگر دربارهٔ معادلهٔ $x^2+y^2-3=0$ چه می‌توان گفت؟ می‌توان الی‌الابد جفتهای اعداد را آزمود؛ تنها چیزی که معلوم خواهد شد آن است که هنوز جوابی به‌دست نیامده است. هیچگاه مسلم نیست که آیا جفت بعدی که به بوتهٔ آزمایش گذاشته می‌شود، جواب است یا خیر. درمورد این مثال خاص می‌توان ثابت کرد که جواب وجود ندارد. اما اثبات به‌ایدهٔ تازه‌ای نیازمند است؛ و نمی‌توان صرفاً با قراردادن اعداد صحیح درمعادله، یکی پس ازدیگری، چنین اثباتی را به‌دست آورد.

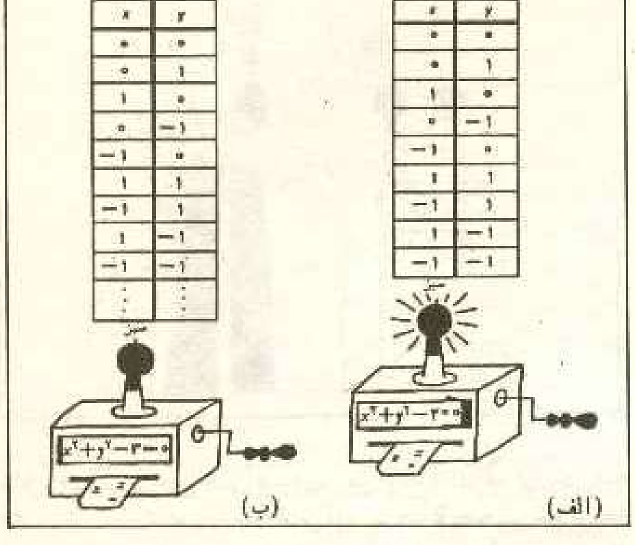
ابزاری که فرایندی از نوع فرایند پیشنهادی هیلبرت را اجرا می‌کند، باید ضرایب یك معادلهٔ دیوفانتی دلخواه را به‌عنوان ورودی بپذیرد؛ و به‌عنوان خروجی، اگر معادله دارای جواب باشد، یك چراغ سبز و درصورتی که دارای جواب نباشد، یك چراغ قرمز روشن کند. چنین ماشینی رامی‌توان ماشین‌هیلبرت نامید. درمقابل، وسیله‌ای راکه جوابها را با بینهایت آزمایش متوالی جستجو می‌کند، می‌توان ماشین «سبزچراغ» نامید. اگرمعادله جواب‌داشته باشد، بعداز تعدادی متناهی مرحله، چراغ‌سبز روشن می‌شود؛ و اگر معادله جواب نداشته باشد، محاسبه الی‌الابد ادامه می‌یابد؛ برخلاف ماشین هیلبرت، ماشین سبزچراغ زمانی برای توقف نمی‌شناسد (شکل ۲).

ساختن ماشین سبزچراغ برای معادلات دیوفانتی آسان است. سؤال این است که آیا می‌توان کار بهتری انجام داد و یك ماشین هیلبرت، یعنی یك ماشین سبزچراغ-قرمزچراغ ساخت که همواره بعداز چندمرحلهٔ متناهی، توقف کند و یك جواب قطعی بله یا نه ارائه دهد؟ آنچه ماتیاسویچ ثابت کرد، این است که این‌کار هیچگاه عملی نیست، حتی اگراجازه دهیم که حافظهٔ ماشین و زمان محاسبه نامحدود باشد، هیچ برنامه‌ای نمی‌توان نوشت وهیچ ماشینی نمی‌توان ساخت که خواست هیلبرت را عملی سازد. ماشین هیلبرت وجود ندارد.

هیلبرت درخطابهٔ خود درسال ۱۹۰۰ چنین ادامه داد: «گاه اتفاق می‌افتد که تحت فرضهایی ناکافی ویا به‌معنایی نادرست درپی جواب هستیم، و به همین دلیل موفق نمی‌شویم. بنابراین؛ این مسأله مطرح می‌شود: نشان دادن امکان‌ناپذیری حل با فرضهای داده شده یا به‌معنای موردنظر» این درست همان چیزی است که درمورد مسألهٔ دهم اتفاق افتاده است.

برای اینکه توضیح دهیم که چگونه می‌فهمیم ماشین هیلبرت وجود ندارد، چند نکتهٔ ساده دربارهٔ محاسبه‌پذیری باید مورد بحث قرار گیرد. فرض کنید S مجموعه‌ای از اعداد صحیح باشد. S «فهرست‌پذیر[1]» است هرگاه یك ماشین سبزچراغ بتوان‌ساخت که وظیفهٔ زیر را انجام دهد: به‌عنوان ورودی هرعدد صحیح را بپذیرد و بعداز

1. listable



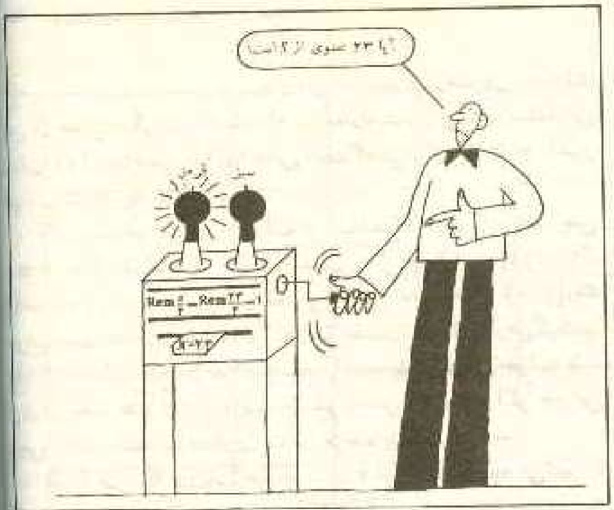
شکل ۲. جفتهای اعداد صحیح را می‌توان یك به‌یك به‌وسیلهٔ ماشین سبز چراغ آزمود تا معلوم شود که آیا جواب معادلات دیوفانتی هستند یا نه. درمرحلهٔ ششم آزمایش وخطا جوابی‌برای معادلهٔ $x^2+y^2-2=0$ به‌دست می‌آید (شکل الف). ولی ماشین‌سبزچراغی که معادلهٔ $x^2+y^2-3=0$ رابیازماید، زمانی‌برای توقف نمی‌شناسد، زیرا جواب صحیح برای این معادله وجود ندارد (شکل ب). تنها چیزی که این ماشین می‌داند، این است که هنوز جوابی به‌دست نیاورده است.

تعدادی متناهی مرحله، چراغ‌سبزی را روشن کند اگر و تنها اگر (عدد صحیح) ورودی متعلق به S باشد. به‌عنوان مثال، مجموعهٔ اعداد زوج فهرست‌پذیر است. دراین حالت، ماشین، ورودی را بر ۲ تقسیم می‌کند و درصورتی که باقیمانده صفر باشد، چراغی سبز را روشن می‌نماید. در متون‌ریاضی، این گونه مجموعه‌ها را بازگشتی‌شمارش‌پذیر می‌نامند. واژهٔ فهرست‌پذیر معادل غیر رسمی آن است.

مجموعهٔ S «محاسبه‌پذیر» است هرگاه یك ماشین سبزچراغ-قرمزچراغ (شبیه ماشین هیلبرت برای‌معادلات دیوفانتی) بتوان ساخت که وظیفهٔ مشکلتری را انجام دهد: هرعدد صحیحی را به‌عنوان ورودی بپذیرد، و بعداز تعدادی متناهی مرحله، اگر عدد متعلق به S باشد، یك چراغ‌سبز و درصورتی که متعلق به S نباشد، یك چراغ قرمز روشن کند. برای مثال، مجموعهٔ اعداد زوج، محاسبه‌پذیر است. ماشین، ورودی را بر ۲ تقسیم می‌کند؛ اگر باقیمانده صفر باشد، چراغ سبز و اگر ۱ باشد چراغ‌قرمز را روشن می‌کند (شکلهای ۳ و ۴).

بین این دوتعریف ارتباط نزدیکی وجود دارد. برای روشن‌شدن مطلب فرض کنید $\bar{S}$ متمم S باشد، یعنی‌مجموعهٔ تمام اعدادصحیحی باشد که متعلق به S نیستند. اگر در دو مثال فوق S مجموعهٔ اعداد زوج باشد، آنگاه $\bar{S}$ مجموعهٔ اعداد فرد است. می‌توان ثابت کرد که اگر S محاسبه‌پذیر باشد، S و $\bar{S}$ هر دوفهرست‌پذیرند. به‌عبارت دیگر اگر، یك ماشین سبز چراغ-قرمز چراغ برای S وجود داشته باشد، آنگاه یك ماشین سبزچراغ برای S و یك ماشین‌سبز چراغ برای $\bar{S}$ وجود دارد. اثبات ساده است. جهت ساختن یك ماشین سبزچراغ برای S، کافی است لامپ قرمز ماشین سبز چراغ-قرمز چراغ را باز کنیم و جهت ساختن یك‌ماشین‌سبز چراغ برای $\bar{S}$، کافی است‌لامپ سبزماشین هیلبرت را باز کنیم و آن را در سرپیچ لامپ قرمز قرار دهیم (شکل ۵).

شکل ۳. ماشین سبز چراغ ـ قرمز چراغ وسیله‌ای خیالی است که تعلق اعداد را به یک مجموعهٔ مفروض می‌آزماید. مسألهٔ دهم هیلبرت می‌پرسد: آیا می‌توانیم یک ماشین سبزچراغ-قرمزچراغ، «ماشین هیلبرت»، بسازیم تا با آن مشخص کنیم که یک معادلهٔ دیوفانتی جواب دارد یا نه؟ درمورد آزمودن عضویت اعداد در یک مجموعه، اگر ماشین بتواند در تعدادی متناهی مرحله تعیین کند که ورودی داده شده عضوی از مجموعه است، چراغ سبز روشن می‌شود. فرض کنید S مجموعهٔ اعداد زوج باشد. برای آزمودن ورودیها می‌توان الگوریتمی برای تقسیم هر ورودی x بر ۲ طرح کرد. اگر باقیماندهٔ تقسیم صفر باشد (می‌نویسیم $\text{Rem}\ x/2=0$)، ماشین برای اعلام عضویت x در S چراغ سبز خود را روشن می‌کند.



شکل ۴. اگر ماشین سبز چراغ-قرمز چراغ بتواند تعیین کند که ورودی، عضوی از مجموعه نیست، چراغ قرمز آن روشن می‌شود. فرض کنید ورودی x عدد ۲۳ باشد؛ ۲ در ۲۳ چندین‌بار می‌گنجد و ۱ باقی می‌ماند، که حاکی از این است که ۲۳ عضوی از S نیست. متمم مجموعهٔ S، $\bar{S}$، مجموعهٔ اعداد فرد است، و لذا ۲۳ عضوی از $\bar{S}$ است. چون می‌توان ماشینی سبز چراغ-قرمز چراغ برای جدا کردن اعضای S و $\bar{S}$ ساخت، مجموعهٔ S را محاسبه‌پذیر می‌نامند.

شکل ۵. ماشین سبز چراغ-قرمز چراغ-برای مجموعهٔ S را می‌توان به‌ماشینی سبز چراغ (یعنی، ماشینی‌که وقتی روشن می‌شود که ورودی متعلق به S باشد) برای S و ماشینی سبز چراغ برای $\bar{S}$، متمم S، تبدیل کرد. اثبات ساده است. جهت ساختن یک ماشین‌سبز چراغ برای S، لامپ قرمز ماشین‌سبز چراغ-قرمز چراغ را باز می‌کنیم. جهت‌ساختن یک ماشین‌سبز چراغ برای $\bar{S}$، لامپ سبز ماشین‌سبز چراغ-قرمز چراغ را باز می‌کنیم، و آن‌را در سرپیچ لامپ قرمز می‌پیچیم. این نکته را می‌توان به‌روش دیگر نیز بیان کرد. اگر مجموعه‌ای (مانند S) محاسبه‌پذیر باشد، آنگاه این مجموعه و متمم آن ($\bar{S}$) فهرستپذیرند. یعنی عضوهای S (در این حالت مجموعهٔ اعداد زوج) را می‌توان جداگانه فهرست کرد و آنها را از اعضای $\bar{S}$ (مجموعهٔ اعداد فرد) جدا ساخت.

عکس این مطلب‌نیز درست است: اگر S و $\bar{S}$ فهرست‌پذیر باشند، S محاسبه‌پذیر است. معادل این گزاره این است: اگر یك ماشین سبز چراغ برای هر یك از S و $\bar{S}$ وجود داشته باشد، آنگاه می‌توان یك ماشین‌سبزچراغ-قرمز چراغ برای S ساخت. این‌کار به‌آسانی صورت می‌گیرد. درماشین‌سبز چراغ برای $\bar{S}$، به‌جای لامپ سبز لامپ قرمز قرار می‌دهیم؛ سپس دو ماشین را به‌طور موازی به‌هم وصل می‌کنیم، به‌طوری که ورودی به‌طور همزمان بـه هردو برود. روشن است که حاصل کار یك ماشین‌سبزچراغ-قرمزچراغ است (شکل ۶).

با آگاهی از همهٔ این مطالب اکنون می‌توان یکی از احکام مهم نظریهٔ محاسبه‌پذیری را بیان کرد ــ حکمی که درحل مسألهٔ دهم هیلبرت نقشی اساسی دارد: مجموعه‌ای چون K وجود دارد که فهرست‌پذیـر است ولی محاسبه‌پذیر نیست؛ یعنی یك ماشین‌سبزچراغ برای K وجود دارد، ولی ساختن یـك ماشین سبزچراغ برای K که متمم K است ممکن نیست.

برای اثبات این حکم به‌ظاهر شگفت‌انگیز، فرض‌کنید هرماشین سبزچراغ دریك جزوهٔ «راهنمای مصرف کننده» به‌طورمشروح به‌زبان انگلیسی توصیف شده باشد وجزوه، چگونگی ساخت ماشین را دقیقاً شرح بدهد، همهٔ ایـن جزوه‌ها را می‌تـوان مرتب کرد و آنها را پشت سرهم ۱، ۲، ۳، وغیره نامید. بـه‌این تـرتیب همهٔ مـاشینهای سبز چراغ شماره گذاری می‌شوند؛ M_1 ماشین اول است، M_2 ماشین دوم والی‌آخر. دراینجا نکته‌ای ظریف پنهان است. درمورد جزوات راهنمای مـاشینهای‌سبزچراغ-قرمزچراغ تدوین چنین فهرست مرتبی امکانپذیر نیست. مشکل در این است که بااستفاده از راهنما، نمی‌توان گفت که به‌ازای هر ورودی ماشین مربوطه، چراغ‌سبز روشن خواهد شد یا چراغ‌قرمز.

مجموعهٔ K، بنا به‌تعریف، مجموعهٔ تمام اعدادی چون n است‌که ماشین M_n بـه‌محض دریافت خـود n به‌عنوان یـك ورودی، روشن می‌شود. به‌عبارت دیگر، عدد ۱ متعلق بـه K است اگر و تنها اگـر هنگامی که «۱» به ورودی M_1 می‌رسد، چراغ‌سبز M_1 روشن شود. ۲ متعلق به K است اگر و تنها اگر هنگامی که «۲» در ورودی M_2 قرار داده می‌شود، چراغ‌سبز M_2 روشن شود و الی آخر (شکل ۷).

جهت ساختن یك ماشین سبزچراغ برای K، علاوه بر مجموعهٔ شامل تمام جزوات، به‌آدمکی نیز نیازمندیم که بتواند آنهارا بخواند ودستورات آنها را اجراکند. آدمك‌ممکن است صاحب شعور وادراك باشد، ولی به‌هرحال باید موجودی مطیع باشد که هرچه را می‌شود دقیقاً همان را انجام دهـد. به این آدمك عـددی چون ۳۷۸۱ داده می‌شود، وی جزوهٔ شمارهٔ ۳۷۸۱ را مطالعه می‌کند وبـاخواندن آن می‌تواند ماشین سبزچراغ M_{3781} رابسازد. وقتی‌که این عمل انجام شد، عـدد صحیح ۳۷۸۱ را بـه عنوان ورودی بـه ماشین M_{3781} می‌دهد. اگرچراغ سبز روشن‌شود، ۳۷۸۱ متعلق‌به K است. بنابراین برای K یك ماشین سبزچراغ داریم.

دربارهٔ $\bar{K}$ چه می‌توان گفت؟ چگونه می‌توان مطمئن شدکه برای آن ماشین‌سبز چـراغ وجود ندارد؟ خوب، فرض‌کنید چنین ماشینی وجود می‌داشت. چون $\bar{K}$ متمم K است، این ماشین باید به ازای هر ورودی، مثلاً ۲۹۷، روشن شود اگر وتنها اگر M_{297} به‌ازای ۲۹۷ روشن نشود. (روشن شدن M_{297}، به‌این معناست‌که ۲۹۷ متعلق به K است و در $\bar{K}$ نیست.) بنابراین ماشین مربوط به $\bar{K}$، به‌طور حتم با M_{297} یکـی نیست (شکل ۸). به‌همین دلیل این ماشین، به‌ازای هر مقدار دیگر n، با M_n یکی نیست. استدلال فوق درموردهرعدد دیگر نیز به‌همین صورت به‌کار مـی‌رود و نشان می‌دهد کـه در مجموعهٔ جزوه‌های‌راهنما، هیچ ماشین‌سبز چراغی‌برای $\bar{K}$ ظاهر نمی‌شود. چون همهٔ ماشینهای سبزچراغ، الزاماً در فهرست ما ظاهر می‌شوند، نتیجه می‌گیریم که هیچ ماشین سبزچراغی برای $\bar{K}$ نمی‌تواند وجود داشته باشد، یعنی $\bar{K}$ فهرست‌پذیر نیست.

این‌نتیجه به‌طور قطع مهم است، و سزاوار تفکر و تأمل. خوب می‌دانیم که مجموعهٔ K چیست؛ اصولاً با کامپیوتر می‌توانیم هرقدر که بخواهیم برای‌آن عضو تولید‌کنیم. بااین وصف، برای جداکردن K از $\bar{K}$ هرگز شیوه‌ای صوری (الگوریتم یا برنامه‌ای برای ماشین)

شکل ۶. ماشین سبزچراغ مربوط به هر یك از S و $\bar{S}$ را می‌توان جهت ساختن یك ماشین‌سبزچراغ-قرمزچراغ برای S به‌کار برد. این گزاره، عکس گزارهٔ مربوط به‌شکل ۵ است. درماشین‌سبزچراغ مربوط به $\bar{S}$، لامپ قرمز را به‌جای‌لامپ‌سبز قرار می‌دهیم. آنگاه ماشینها را به‌طور موازی چنان به‌هم وصل می‌کنیم که ورودی به‌طور همزمان به هردو ماشین برود. حاصل کار مسلماً یك ماشین‌سبزچراغ-قرمزچراغ است. این‌ادعا را می‌توان به‌صورت دیگری نیز بیان کرد، اگر مجموعه‌ای و متمم آن فهرست‌پذیر باشند، آن مجموعه محاسبه‌پذیر است.

شکل ۷. مجموعهٔ K فهرست‌پذیر است، یعنی برای K یك ماشین سبز چراغ وجود دارد. بیایید تمام ماشینهای سبز چراغ را شماره‌گذاری کنیم: M_1 ماشین اول، M_2 ماشین دوم، M_3 ماشین سوم و به‌همین ترتیب تا ماشین nام. بنا به‌تعریف، K مجموعهٔ تمام اعدادی چون n است که وقتی خود n به‌عنوان یك ورودی وارد ماشین nام می‌شود، چراغ سبز آن روشن می‌شود. در شکل، آدمکی ۳۷۸۱ را به‌عنوان ورودی به ماشین $M_{۳۷۸۱}$ داده و چراغ سبز ماشین روشن شده است، و این بدان معناست که ۳۷۸۱ عضوی از K است.

شکل ۸. مجموعهٔ $\bar{K}$، متمم K، محاسبه‌پذیر نیست، یعنی هیچ ماشین سبز چراغی برای $\bar{K}$ وجود ندارد. فرض کنید یك ماشین سبز چراغ برای $\bar{K}$ وجود می‌داشت. چون $\bar{K}$ متمم K است، این ماشین به‌ازای هر ورودی، مثلاً ۲۹۷، باید روشن شود اگر و تنها اگر $M_{۲۹۷}$ به‌ازای ۲۹۷ روشن نشود. بنابراین ماشین $\bar{K}$ بطور حتم با $M_{۲۹۷}$ یکی نیست. به‌همین دلیل این ماشین، هیچ M_nای، n دلخواه، یکی نیست. بنابراین هیچ ماشین سبز چراغی برای $\bar{K}$ وجود ندارد. و این به‌معنای فهرست ناپذیر بودن $\bar{K}$ است. مجموعه‌ای فهرست‌پذیر که متممش فهرست ناپذیر است، محاسبه‌پذیر نیست، یعنی هیچ ماشین سبز چراغ-قرمز چراغی برای آن نمی‌توان ساخت. پس هیچ الگوریتمی برای جدا کردن K از $\bar{K}$ وجود ندارد.

نمی‌تواند وجود داشته باشد. بنابراین در اینجا با مثالی از یك مسأله روبرو هستیم که به‌طور دقیق بیان شده ولی با ابزارهای مکانیکی قابل حل نیست.

البته، بحث ما غیر رسمی و غیر دقیق بود. با وجود این، صورتبندی مجدد تمام ایده‌ها و استدلالهای ذکر شده، با تعاریف و اثباتهای دقیق ریاضی، امکانپذیر است. در واقع، این مطالب در شاخه‌ای از منطق ریاضی، به‌نام نظریهٔ تابعهای بازگشتی، صورتبندی شده‌اند، که این نظریه را گودل، چرچ، پست، کلین و تورینگ در سالهای ۱۹۳۰ بنیان گذاشته‌اند.

خوب، همهٔ اینها چه ارتباطی با معادلات دیوفانتی دارند؟ جواب ساده است: ماتیاسویچ ثابت کرده است که هر مجموعهٔ فهرست‌پذیر، یك معادلهٔ دیوفانتی متناظر دارد. به‌زبان دقیقتر، اگر S مجموعه‌ای فهرست‌پذیر باشد، آنگاه متناظر با آن یك چندجمله‌ای P با ضرایب صحیح و متغیرهای $x, y_1, \ldots, y_n$ وجود دارد که با $P(x, y_1, \ldots, y_n)$ نمایش داده می‌شود. عددی صحیح چون ۱۷، به S تعلق دارد اگر و تنها اگر معادلهٔ دیوفانتی $P(۱۷, y_1, \ldots, y_n) = ۰$ دارای جواب باشد.

ممکن است به‌نظر آید که در مورد بعضی از مجموعه‌ها مجبوریم به‌چندجمله‌ایهای خیلی پیچیده روی آوریم، ولی چنین نیست. درجهٔ P لازم نیست از چهار تجاوز کند؛ و لازم نیست تعداد متغیرهای $y_1, \ldots, y_n$ بیش از ۱۴ باشد. (هنوز کسی نمی‌داند که آیا به‌این هردو کران به‌طور همزمان می‌توان رسید یا نه.)

از این نتیجهٔ ماتیاسویچ، سریعاً می‌رسیم به‌این مطلب که ماشین هیلبرت نمی‌تواند وجود داشته باشد. مجموعهٔ فهرست‌پذیر K را که در چند پاراگراف قبل ساختیم، به‌خاطر بیاورید. بنابر نتیجهٔ ماتیاسویچ، وابسته به‌این مجموعه، یك معادلهٔ دیوفانتی $P_K(x, y_1, \ldots, y_n) = ۰$ وجود دارد. اگر ساختن ماشین هیلبرت، یعنی ماشین سبز چراغ-قرمز چراغ، برای آزمودن معادلات دیوفانتی از لحاظ داشتن جواب، امکانپذیر می‌بود، آنگاه به‌ازای هر عدد صحیح x، می‌توانستیم تعیین کنیم که آیا اعدادی صحیح چون $y_1, y_2, \ldots, y_n$ وجود دارند که معادله جواب داشته باشد یا خیر. ولی، درموقع معلوم کردن این مطلب، تعلق یا عدم تعلق x به K نیز معلوم می‌شود. به‌عبارت دیگر، ماشین هیلبرتی که در مورد معادلهٔ دیوفانتی توصیف کنندهٔ K به‌کار گرفته می‌شود، می‌تواند به‌عنوان یك ماشین سبز چراغ-قرمز چراغ برای K به‌کار رود. ولی ثابت کرده‌ایم که K محاسبه‌پذیر نیست، بنابراین هیچ ماشین سبز چراغ-قرمز چراغی نمی‌تواند برای K وجود داشته باشد. تنها راه خروج از این بن‌بست این نتیجه‌گیری است که ماشین هیلبرت وجود ندارد، به‌عبارت دیگر مسألهٔ دهم هیلبرت حل‌ناپذیر است!

این واقعیت که به‌هر مجموعهٔ فهرست‌پذیر یك معادلهٔ دیوفانتی وابسته است، نتیجهٔ مثبتی است که به‌خودی خود، صرفنظر از کاربردش در مسألهٔ دهم هیلبرت، خیلی جالب است. یك زیرمجموعهٔ بسیار مهم و جالب از اعداد صحیح، مجموعهٔ اعداد اول است. یك عدد اول عددی است که تنها بر ۱ و خودش تجزیه‌پذیر (تقسیم‌پذیر) باشد. مثالهایی از اعداد اول عبارت‌اند از: ۲، ۳، ۵، ۷، ۱۱، ۱۳، و ۱۷. این موضوع که مجموعهٔ اعداد اول فهرست‌پذیر است، تا حدی واضح می‌باشد. الگوریتمی، موسوم به‌غربال اراتستن، برای فهرست کردن این اعداد از یونانیها به ما رسیده است. نتیجهٔ ماتیاسویچ همراه با ابزاری که توسط پاتنام توسعه یافته است، یك معادلهٔ دیوفانتی $Q(y_1, y_2, \ldots, y_n) = z$ را به‌دست می‌دهد که در آن عدد مثبت z اول است اگر و تنها اگر معادله دارای جواب صحیح و مثبت

y_n ،... ،y_2 ،y_1 باشد. (صورت دقیق چندجمله‌ای Q پیچیده‌تر از آن است که به‌طور کامل در اینجا آورده شود.)

با ترکیب قضیهٔ ماتیاسویچ و کار گودل در زمینهٔ تصمیم‌ناپذیری، نتیجهٔ مهم دیگری را می‌توان ثابت کرد. اگر دستگاهی دلخواه از اصول موضوع وجود داشته باشد که از آن بتوان اطلاعاتی دربارهٔ معادلات دیوفانتی به‌دست آورد، همواره می‌توان یك معادلهٔ دیوفانتی با ویژگیهای زیر به‌دست‌آورد: (۱) معادله هیچ جواب صحیح ومثبت نداشته باشد، و (۲) این واقعیت را که معادله هیچ جواب صحیح و مثبت ندارد، نتوان به‌طور منطقی ازمجموعهٔ اصول موضوع داده شده، استنتاج کرد. البته، همین‌که معادلهٔ دیوفانتی به‌دست آید، می‌توان مجموعهٔ جدیدی از اصول موضوع ساخت و با استفاده از آنها ثابت کرد که معادلهٔ دیوفانتی مزبور جواب ندارد. اما در این صورت این مجموعهٔ جدید اصول موضوع، معادلهٔ دیوفانتی دیگری را به‌وجود خواهد آورد که در مورد آن همین حکم برقرار است.

در اثبات قضیهٔ ماتیاسویچ چه چیزهایی مورد استفاده قرار می‌گیرند؟ علاوه بر نتایج نظریهٔ کلاسیك وحتی نظریهٔ قدیمی اعداد که به‌آنها اشاره شد، نتیجه‌ای کلیدی به‌نام قضیهٔ ماندهٔ چینی هم به‌کار می‌رود. قضیهٔ ماندهٔ چینی‌را به‌وسیلهٔ یك مثال عددی توضیح می‌دهیم.

فرض کنید یافتن عددی موردنظر است که باقیماندهٔ تقسیم آن براعداد ۱۰، ۳، ۷ و ۱۱ به‌ترتیب ۴، ۲، ۳ و ۱ باشد (شکل ۹). قضیهٔ ماندهٔ چینی ما را مطمئن می‌سازد که چنین عددی باید وجود داشته باشد. (در واقع دراین حالت ۵۸۴ چنین عددی است.) تنها شرط لازم برای کاربرد قضیهٔ ماندهٔ چینی، آن است که هیچ جفتی از مقسوم‌علیه‌های مورد استفاده نباید عامل مشترك (البته بجز ۱) داشته باشند. تعداد مقسوم‌علیه‌ها دلخواه است و باقیمانده‌های موردنظر می‌توانند هرعدد مثبت دلخواهی باشند.

درسال ۱۹۳۱ گودل نشان داد که چگونه می‌توان قضیهٔ ماندهٔ چینی را به‌عنوان یك شگرد کدگذاری به‌کاربرد؛ دراین شگرد، یك دنبالهٔ متناهی دلخواه از اعداد را می‌توان به‌صورت تنها یك عدد، به‌عنوان کد، نوشت. با استفاده ازعدد کد، به‌همان روشی که در مثال فوق اعداد ۴، ۲، ۳ و ۱ به‌عنوان باقیمانده‌های تقسیمات متوالی از عدد ۵۸۴ به‌دست آمدند، می‌توان دنباله را دوباره به‌دست آورد. مقسوم‌علیه‌ها را می‌توان به‌صورت یك تصاعد حسابی انتخاب کرد.

نخستین گام برای اثبات عدم وجود ماشین هیلبرت درسال ۱۹۵۰ در تز دکتری یکی از ما (دیویس) برداشته شد. در این گام تکنیك گودل در مورد استفاده از قضیهٔ ماندهٔ چینی به‌عنوان یك وسیلهٔ کدگذاری، برای نسبت دادن یك معادلهٔ دیوفانتی $P_S(k, x, z, y_1, y_2, \ldots, y_n) = ۰$ به مجموعهٔ فهرست‌پذیر دلخواه S به کار گرفته شد. متأسفانه رابطهٔ بین معادله و مجموعه، بسیار پیچیده‌تر از آن شد که برای مسألهٔ دهم هیلبرت موردنیاز بود. مشخصاً،

مسأله: مطلوب است کوچکترین عدد صحیح ومثبت x که درتقسیم براعداد ۱۰، ۳، ۷ و ۱۱ به‌ترتیب دارای باقیمانده‌های ۴، ۲، ۳ و ۱ باشد.

حل: فرض کنیم x عدد مورد نظر باشد. نماد «Rem» مخفف «باقیمانده...» است. بنابراین مسأله را می‌توان به صورت زیرهم نوشت

$$\mathrm{Rem}\left(\frac{x}{۱۰}\right)=۴ \qquad \mathrm{Rem}\left(\frac{x}{۷}\right)=۳$$

$$\mathrm{Rem}\left(\frac{x}{۳}\right)=۲ \qquad \mathrm{Rem}\left(\frac{x}{۱۱}\right)=۱$$

برای یافتن x، باید چهارمسألهٔ کمکی برحسب مجهولهای جدید y_1، y_2، y_3 و y_4، حل کرد. در هرمورد صورت از ضرب سه تا ازمقسوم علیه‌ها به‌دست می‌آید وچهارمین مقسوم علیه درمخرج قرارمی‌گیرد. به‌عنوان مثال در معادلهٔ اول که مربوط به y_1 است، ۲۳۱ راکه برابراست با ۳×۷×۱۱ درصورت کسر و ۱۰ را در مخرج آن قرار می‌دهیم

$$\mathrm{Rem}\left(\frac{۲۳۱\,y_1}{۱۰}\right)=۴,\quad y_1<۱۰ \qquad \mathrm{Rem}\left(\frac{۳۳۰\,y_3}{۷}\right)=۳,\quad y_3<۷$$

$$\mathrm{Rem}\left(\frac{۷۷۰\,y_2}{۳}\right)=۲,\quad y_2<۳ \qquad \mathrm{Rem}\left(\frac{۲۱۰\,y_4}{۱۱}\right)=۱,\quad y_4<۱۱$$

کوچکترین اعداد صحیحی که جواب این معادلات کمکی هستند، عبارت‌اند از $y_1=۴$، $y_2=۱$، $y_3=۳$ و $y_4=۱$.

برای به‌دست آوردن x (عدد اصلی موردنظر) صورتهای چهارمعادلهٔ کمکی را باهم جمع می‌کنیم

$$\begin{aligned} x &= (۲۳۱\,y_1)+(۷۷۰\,y_2)+(۳۳۰\,y_3)+(۲۱۰\,y_4) \\ &= (۲۳۱\times۴)+(۷۷۰\times۱)+(۳۳۰\times۳)+(۲۱۰\times۱) \\ &= ۹۲۴+۷۷۰+۹۹۰+۲۱۰ \\ &= ۲۸۹۴ \end{aligned}$$

بنابراین ۲۸۹۴ یکی ازمقادیر x است. اگرحاصلضرب تمام مقسوم علیه‌ها را ازاین عددکم کنیم، جواب کوچکتری به‌دست می‌آید

$$۲۸۹۴-(۱۰\times۳\times۷\times۱۱)=۲۸۹۴-۲۳۱۰=۵۸۴.$$

بنابراین، ۵۸۴ کوچکترین جواب مسأله است.

شکل ۹. درحل مسألهٔ دهم هیلبرت ازقضیهٔ ماندهٔ چینی‌استفاده می‌شود. دراینجا این قضیه برای پیداکردن عددی به‌کار رفته است که باقیمانده‌های تقسیم آن براعداد ۱۰، ۳، ۷ و ۱۱ به‌ترتیب عبارت‌اند از ۴، ۲، ۳ و ۱. عدد ۵۸۴ کوچکترین جواب مسأله است.

۱.	۱
۲.	۱
۳.	۱+۱=۲
۴.	۱+۲=۳
۵.	۲+۳=۵
۶.	۳+۵=۸
۷.	۵+۸=۱۳
۸.	۸+۱۳=۲۱
۹.	۱۳+۲۱=۳۴
۱۰.	۲۱+۳۴=۵۵
۱۱.	۳۴+۵۵=۸۹
۱۲.	۵۵+۸۹=۱۴۴
۱۳.	۸۹+۱۴۴=۲۳۳
.	.
.	.
.	.
n	$\approx \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$

شکل ۱۰. اعداد فیبوناتچی‌را درسال ۱۲۰۲ میلادی لئوناردوی پیزایی مشهور بـه فیبوناتچی کشف کرد. این دنباله از ۱ و ۱ آغـاز می‌شود و به‌طور متوالی از مجموع آخرین دو عدد، عـدد بعدی بـه‌دست می‌آید. این دنبالـه بـه‌طور نمایی رشد می‌کند؛ جملهٔ n ام دنباله تقریباً بـا توان nام عدد حقیقی $(1+\sqrt{5})/2$ متناسب است.

رابطه چنین بود: عدد صحیح و مثبت x به مجموعهٔ S تعلق دارد اگر وتنها اگر به‌ازای مقدارصحیح ومثبتی از z، یافتن جوابی برای هریك از معادلات دیوفانتی حاصل از قراردادن $k=1$، بعد $k=2$ و غیره تـا z در معادلهٔ $P_S(k, x, z, y_1, y_2, \cdots, y_n)=0$، امکانپذیر باشد. گرچه نتیجه به‌طور امیدوارکننده‌ای نزدیك به نتیجهٔ مورد نیاز به‌نظر می‌رسید، ولی این تازه اول کار بود.

تقریبـاً در همان زمـان رابینسون پژوهش خودش را در باب مجموعه‌هایی کـه می‌توانند به‌وسیلهٔ معادلات دیوفانتی تعریف شوند، آغاز کرد؛ اوچندین تکنیك هوشمندانه ابداع کردکه با استفاده از آنها بتوان معادلاتی راکـه رفتار جوابهایشان شبه‌نمایی است (شبیه توان رشد می‌کنند) بررسی کرد. درسال ۱۹۶۰، او، دیویس و پاتنام برای اثبات نتیجهٔ دیگری به‌همکاری پرداختند. این گروه هم ازکار او وهم ازنتیجهٔ دیویس‌استفاده کردند ونشان دادند که به‌هرمجموعهٔ فهرستپذیر، یك معادلهٔ دیوفانتی از یك نوع «گسترده» متناظر است. گسترده به‌این معنا کـه متغیرهای معادلـه مجازند به‌عنوان نما ظاهرشوند؛ مثالی از این گونه‌معادلات، $2^z + x^2 + z^3 = 0$ است. دیویس،رابینسون وپاتنام کارهای خود را با بعضی از نتایج پیشین رابینسون درهم آمیختند و کشف کردندکه: حتی اگرتنها یك معادلهٔ دیوفانتی یافت شودکه رفتار جوابهایش به‌معنای خاصی نمایی باشد، آنگاه توصیف هر مجموعـهٔ فهرستپذیر به‌وسیلهٔ یك معادلـهٔ دیوفانتی امکانپذیر خواهـد بود. این به‌نوبهٔ خود نشان خواهد دادکه مسألهٔ دهم هیلبرت حل‌ناپذیراست.

یافتن معادله‌ای دیوفانتی کـه جوابهایش به‌معنای مناسبی به‌طور نمایی رشدکنند، یك دهه طول‌کشید. در سال ۱۹۷۰ ماتیاسویچ بـا استفاده از اعدادی که به‌اعداد فیبوناتچی شهرت دارنـد (شکل ۱۰) چنین معادله‌ای را پیداکرد. این اعداد مشهور، درسال ۱۲۰۲میلادی به‌وسیلهٔ لئوناردوی پیزایی،که به فیبوناتچی هم معروف است، کشف شده‌اند. وی این‌اعداد را بامحاسبهٔ تعدادکل جفتهای اخلاف یك‌جفت خرگوش به‌دست آورد، بـا این شرط کـه جفت اصلی و هرجفت از اخلاف آنهاهرماه یکبارتولید مثل کنند. دنبالهٔ فیبوناتچی از ۱و۱ آغاز

$$\mathrm{I.}\; u+w-v-2=0$$
$$\mathrm{II.}\; l-2v-2a-1=0$$
$$\mathrm{III.}\; l^2-lz-z^2-1=0$$
$$\mathrm{IV.}\; g-bl^2=0$$
$$\mathrm{V.}\; g^2-gh-h^2-1=0$$
$$\mathrm{VI.}\; m-c(2h+g)-3=0$$
$$\mathrm{VII.}\; m-fl-2=0$$
$$\mathrm{VIII.}\; x^2-mxy+y^2-1=0$$
$$\mathrm{IX.}\; (d-1)l+u-x-1=0$$
$$\mathrm{X.}\; x-v-(2h+g)(e-1)=0$$

شکل ۱۱. حل مسألـهٔ دهم هیلبرت توسط ماتیاسویچ شامل معادلـه‌ای دیوفانتی است که ازمجذور کردن هریك ازاین ده معادله وجمع کردن آنها ومساوی با صفرقراردادن چندجمله‌ای پیچیدهٔ حاصل، بـه‌دست می‌آیـد. دراین معادلات مقادیر n و v درجوابها، چنان به‌هم مربوط هستند که v عدد $(2n)$ام فیبوناتچی است. از جواب این‌نتیجه به‌دست می‌آید که به‌هر مجموعهٔ فهرستپذیر یك معادلهٔ دیوفانتی وابسته است. چون مجموعـه‌های فهرستپذیری وجود دارندکه متمم آنها فهرستپذیر نیست، پس هر مجموعهٔ فهرستپذیری نمی‌توانـد یك ماشین سبزچراغ-قرمز چراغ داشته بـاشد. چون داشتن یك ماشین سبزچراغ-قرمـزچراغ برای یك مجموعه، معادل داشتن یك ماشین‌هیلبرت برای معادلات دیوفانتی است، نتیجهٔ ماتیاسویچ بدین‌معنی‌است‌که برای‌آزمودن‌معادلات‌دیوفانتی،نمی‌توان‌ماشین‌هیلبرت‌ساخت.

می‌شود و بـه‌طور متوالی ازمجموع دو عدد قبلی عدد بعدی حـاصل می‌شود: اولین‌عدد فیبوناتچی ۱و دومی‌هم‌۱ است، سومی ۲ = ۱ + ۱، چهارمی ۳ = ۲ + ۱، پنجمی ۵ = ۳ + ۲ و الی آخر. ویژگی اعداد فیبوناتچی که در ارتباط با مسألهٔ دهم هیلبرت اهمیت دارد آن است که این اعداد به‌طورنمایی رشد می‌کنند. یعنی عدد n ام فیبونـاتچی تقریباً متناسب است باتوان n ام یك عدد حقیقی ثابت ومعین.

اگرکـی می‌توانست معادله‌ای دیوفانتی بیابدکـه جوابهایش n را به‌عدد nام فیبوناتچی مربوط کند، این معادله، مثالی مطلوب ازیك معادلهٔ دیوفانتی می‌بودکه جوابهای آن رفتارنمایی دارند؛ وحل‌مسألهٔ دهم هیلبرت، از این مثال نتیجه می‌شد. کاری که ماتیاسویچ انجام داد، ساختن یك معادلهٔ دیوفانتی ازاین نوع بود (شکل ۱۱). وقتی که وی نشان داد که مجموعهٔ اعداد فیبوناتچی به این طریق بـا یك معادلـهٔ دیوفانتی متناظر است، بیدرنگ از قضیهٔ دیویس، رابینسون و پاتنام نتیجه شدکه بـا هر مجموعهٔ فهرستپذیر، ازجمله مجموعهٔ خاص K که محاسبه‌پذیر نیست، یك معادلـهٔ دیوفانتی متناظر است؛ و به‌این ترتیب داستان مسألهٔ دهم هیلبرت خاتمه می‌یابد.

ترجمهٔ محمد جلوداری ممقانی

• Davis Martin, Hersh Reuben, "Hilbert's 10th problem", *The Chauvent Papers*, The Mathematical Association of America, 1978, 555-571.

• مارتین‌دیویس،دانشگاه‌نیویورك‌آمریکا؛روبن‌هرش،دانشگاه‌نیومکزیکوی‌آمریکا