شهودگرایی و صورتگرایی•

لوئیتزن اِخبِرتوس یان براؤر
ترجمهٔ محمد اردشیر

موضوعی که می‌خواهم نظرتان را به آن جلب کنم مربوط به مبانی ریاضیات است. برای درک نظریه‌های مختلفی که در این حوزه وجود دارند ابتدا باید فهم روشنی از مفهوم «علم» به‌دست آورد؛ زیرا به‌عنوان بخشی از علم است که ریاضیات جایگاه خود را در تفکر بشری پیدا کرده است.

منظور ما از علم، فهرستبندیِ نظام‌مندِ توالیهایِ علّیِ پدیده‌ها به‌وسیلهٔ قوانین طبیعت است، توالیهایی از پدیده‌ها که برای مقاصد فردی یا اجتماعی مناسبتر است آنها را به‌گونه‌ای لحاظ کنیم که گویی عیناً تکرار می‌شوند ــ به‌خصوص آن توالیهای علّی که از نظر روابط اجتماعی حائز اهمیت‌اند.

اینکه علم چنین قدرت عظیمی به انسان می‌دهد تا بر طبیعت فایق آید، بدین دلیل است که توسعهٔ مستمر فهرستبندیِ توالیهای بیشتری از پدیده‌ها، امکان بیشتر و بیشتری را برای ایجاد پدیده‌های مطلوب فراهم می‌کند، این کار که مستقیماً مشکل یا غیرممکن است، با در نظرگرفتن پدیده‌هایی که از طریق توالی علّی با پدیدهٔ اول مرتبط‌اند، آسان می‌شود. و همچنین، اینکه انسان همیشه و همه جا در طبیعت نظم را خلق می‌کند حاصل این واقعیت است که او نه تنها توالیهای علّی پدیده‌ها را مجزا می‌کند (یعنی، سعی می‌کند که آنها را از پدیده‌های ثانوی مزاحم جدا کند) بلکه آنها را با پدیده‌هایی که معلول فعالیت خودش است می‌آمیزد، و بدین ترتیب آنها را از قابلیت کاربرد وسیعتری برخوردار می‌کند. در بین این پدیده‌ها نتایج شمارش و اندازه‌گیری چنان جایگاه مهمی را اشغال می‌کنند که تعداد زیادی از قوانین طبیعت که به‌وسیلهٔ علم معرفی شده‌اند، فقط ارتباط متقابل نتایج شمارش و اندازه‌گیری را بیان می‌کنند. در این زمینه توجه به این نکته خوب است که یک قانون طبیعت که در بیان آن مقادیر قابل اندازه‌گیری وجود دارند، تا حد معینی از تقریب در طبیعت برقرار است؛ درواقع قوانین طبیعت، با تظریف ابزارهای اندازه‌گیری ممکن است آسیب ببینند.

استثناهای این قاعده از زمانهای قدیم، حساب عملی و هندسه از یک طرف و دینامیک اجسام صُلب و مکانیک سماوی از طرف دیگر بوده‌اند. تاکنون هیچ‌گونه بهبود در ابزار مشاهده تأثیری در این دو دسته مباحث نداشته است. ولی در حالی که این واقعیت برای دستهٔ دوم امری اتفاقی و عَرَضی قلمداد شده و همیشه این آمادگی وجود داشته که این علوم را تا حد نظریه‌های تقریبی تنزل دهند، تا همین اواخر این اعتماد مطلق وجود داشته که هیچ تجربه‌ای قادر نیست در دقت قوانین حساب و هندسه خِلَلی وارد کند؛ این اعتماد در این حکم بیان شده است که ریاضیات «خود» علم دقیق است.

زمینه‌های اعتقاد به خلل‌ناپذیری دقت قوانین ریاضی، در طی قرنها، موضوع تحقیق فلسفی بوده است، و در اینجا دو دیدگاه باید از هم متمایز شود: شهودگرایی (عمدتاً در فرانسه) و صورتگرایی (عمدتاً در آلمان). از بعضی لحاظ این دو دیدگاه [در طی زمان] تقابل بیشتر و بیشتری پیدا کرده‌اند؛ اما در سالهای اخیر به این توافق رسیده‌اند که اعتبار دقیق قوانین ریاضی به‌عنوان قوانین طبیعت قابل شک نیست. این دو جناح به این سؤال که دقت ریاضی در کجا وجود دارد، جوابهای مختلفی می‌دهند. شهودگرا می‌گوید در عقل انسان، و صورتگرا می‌گوید روی کاغذ.

در تفکر کانت یک شکل کهنهٔ شهودگرایی می‌یابیم که اکنون تقریباً به‌کلی فراموش شده است، و در آن زمان و مکان صور فهم ذاتی در خِرَد انسان هستند. از نظر کانت اصول موضوع حساب و هندسه احکام ترکیبی پیشینی هستند، یعنی احکامی که مستقل از تجربه‌اند و قابل اثبات تحلیلی نیستند: این توصیفْ دقت مطلق آنها را چه در جهان تجربه و چه به‌طور مجرد توضیح می‌دهد. بنابراین در نظر کانت، امکان ردِ تجربی قوانین هندسی و حسابی نه تنها بر اساس یک اعتقاد استوار نفی شده است، بلکه به‌طور کلی غیرقابل تصور است.

در مقابل آن، دیدگاه صورتگرایی است، که بر این اعتقاد است که خود انسان چه از یک خط مستقیم و چه از اعداد، مثلاً اعداد بزرگتر از ده، هیچ تصویر دقیقی در اختیار ندارد، و بنابراین، وجود این هویّات ریاضی در فهم ما از طبیعت بیشتر از وجودشان در خود طبیعت نیست. این درست است که از روابط معینی بین هویّات ریاضی، که ما آنها را اصول موضوع فرض می‌کنیم، روابط دیگری را مطابق قوانین ثابتی استنتاج می‌کنیم، با این اعتقاد که به این طریق حقایق را با استدلال منطقی از حقایق نتیجه می‌گیریم، اما این اعتقادِ غیرریاضی به حقیقت یا حقانیت این عمل، هیچ دقتی ندارد، بلکه فقط ناشی از احساس خوشایند مبهمی است که کاراییِ انتساب این روابط و قوانین استدلال به طبیعت، در ما القا می‌کند. بنابراین برای فردِ صورتگرا دقت ریاضی فقط عبارت است از روش توسعهٔ این رشته از روابط، و این کار مستقل از اهمیتی است که ممکن است به این روابط یا هویاتی که این روابط آنها را به‌هم ربط می‌دهد داده شود. برای صورتگرایِ راسخ و استوار، این رشته از روابط بی‌معنا که ریاضیات به آنها تقلیل می‌یابد، فقط وقتی وجود ریاضی دارند که به زبان مکتوب یا شفاهی توأم با قوانین ریاضی‌ـمنطقی، که بنای آن روابط بر این قوانین مبتنی است، نمایش داده شوند. این زبان را منطق نمادی می‌خوانند.

چون زبان مکتوب یا شفاهیِ معمولیْ شرط سازگاری را که برای منطق نمادی لازم است ندارد، فردِ صورتگرا سعی می‌کند که از به‌کاربردن زبان معمولی در ریاضیات اجتناب کند. نمونهٔ افراطی این گرایش را مکتب صورتگرایی جدید ایتالیاییِ از خود نشان داده است که رهبر آن، پئانو، یکی از مهمترین اکتشافات خود را در مورد وجود انتگرالهای معادلات دیفرانسیل حقیقی در مجلهٔ ماتماتیشه آنالن به زبان منطق نمادی به چاپ رساند؛ نتیجه این بود که این مقاله را تنها عدهٔ اندکی از خبرگان خواندند و فقط وقتی در دسترس عموم قرار گرفت که یکی از اعضای همین مکتب مقاله را به آلمانی ترجمه کرد.

دیدگاه صورتگرایی به این اعتقاد منجر می‌شود که اگر فرمولهای نمادی دیگری به جای آنهایی که اکنون روابط اساسی ریاضی و قوانین ریاضی‌ـمنطقی را نمایش می‌دهند، بنشینند، عدم احساس رضایت، که «آگاهی به حقانیت» خوانده می‌شود و باید نتیجهٔ چنین جانشینی باشد، اعتبار دقت ریاضی آن را اصلاً از بین نمی‌برد. تحقیق در اینکه چرا بعضی دستگاههای منطق نمادی بهتر از دستگاههای دیگر با طبیعت انطباق دارند وظیفهٔ فیلسوف یا مردم‌شناس است، نه ریاضیدان. توضیح در بارهٔ اینکه چرا ما به دستگاههای معینی از منطق نمادی باور داریم و به دستگاههای دیگر نداریم، مثلاً چرا از دستگاههای متناقض ــ که در آنها هم صورت منفی و هم صورت مثبت بعضی گزاره‌ها معتبر هستند ــ متنفریم ([Mannoury] ص ۱۴۹ـ۱۵۴) وظیفه روانشناس است نه ریاضیدان.

تا زمانی‌که شهودگرایان از نظریهٔ کانت هواداری می‌کردند ظاهراً روند ریاضیات در قرن نوزدهم آنها را روز به روز در موضع ضعیفتری از صورتگرایان قرار می‌داد. اولاً، این روند به‌طور مکرر نشان داد که چگونه نظریه‌های کاملی از یک شاخه از ریاضیات به شاخه‌ای دیگر انتقال می‌یابند: برای مثال، هندسهٔ تصویری با وجود تعویض نقشهای نقطه و خط مستقیم بدون تغییر باقی ماند، بخش مهمی از حساب اعداد حقیقی برای میدانهای مختلف اعداد مختلط معتبر باقی ماند و تقریباً همهٔ قضایای هندسهٔ مقدماتی برای هندسهٔ غیرارشمیدسی، که در آن به ازای هر قطعه خط مستقیم، قطعه خط دیگری وجود دارد که نسبت به اولی بینهایت کوچک است، نیز صادق باقی ماندند. این اکتشافات ظاهراً نشان می‌داد که در یک نظریهٔ ریاضی، فقط صورت منطقی آن اهمیت دارد و اشیاء همانقدر فاقد اهمیت‌اند که پایهٔ عددنویسی برای محاسبات در حساب.

اما جدیترین ضربه به نظریهٔ کانت اکتشاف هندسهٔ غیراقلیدسی بود، نظریه‌ای سازگار، پدید آمده از مجموعه‌ای از اصول موضوع که در آن فقط اصل موضوع توازی در هندسهٔ مقدماتی با نقیض آن عوض شده است. این نشان داد که پدیده‌ای که معمولاً به زبان هندسهٔ مقدماتی توصیف می‌شده است، می‌تواند با همان دقت، البته با ایجاز کمتر، به زبان هندسهٔ غیراقلیدسی، توصیف گردد، بنابراین نظر نه تنها ممکن است فضای تجربه ما خواص هندسهٔ مقدماتی را نداشته باشد بلکه جستجوی هندسه‌ای منحصر به فرد که برای فضای تجربه ما صادق باشد اهمیتی ندارد. درست است که هندسهٔ مقدماتی از هر هندسهٔ دیگری برای توصیف قوانین سینماتیک اجسام صُلب و بنابراین تعداد زیادی از پدیده‌های طبیعت مناسبتر است، اما با کمی تأمل ممکن است اشیایی را یافت که برای آنها سینماتیک برحسب هندسهٔ غیراقلیدسی آسانتر از هندسهٔ اقلیدسی تعبیر شود ([Poincaré]، ص ۱۰۴).

موضع شهودگرایی که بعد از این دوره از توسعهٔ ریاضیاتْ ضعیف به‌نظر می‌رسید، با رها کردن نظر کانت دربارهٔ پیشینی‌بودن فضا و هواداری قویتر از پیشینی‌بودن زمان تقویت شده است. این شهودگرایی نو، تغییر حالت لحظات حیات را به قسمتهایی که به‌طورکیفی مختلف‌اند، و در حالی که به‌وسیله زمان از هم جدا شده‌اند، دوباره وحدت می‌یابند، به‌عنوان اساسیترین پدیدهٔ عقل انسان در نظر می‌گیرد، گذار از محتوای احساسی به پدیدهٔ تفکر ریاضی، شهود دوـیکی بودن[1] محض. این شهودِ دوـیکی بودن، شهود بنیادی ریاضیات، نه فقط اعداد یک و دو را خلق می‌کند بلکه همهٔ اعداد ترتیبی متناهی را به‌وجود می‌آورد، زیرا یکی از اعضای دوـیکی بودن را می‌توان به‌عنوان یک دوـیکی بودن جدید در نظر گرفت، فرایندی که می‌تواند به‌طور نامتناهی تکرار شود؛ این فرایند منجر به کوچکترین عدد ترتیبی نامتناهی ω می‌شود. بالاخره، این شهود بنیادی ریاضی، که در آن متصل و منفصل، پیوسته و مجزا، متحد شده‌اند، بلاواسطه به شهود پیوستار خطی، یعنی «بین» منجر می‌شود، مفهومی که با در بین گذاشتن واحدهای جدید کاملاً بیان نمی‌شود و بنابراین هرگز با مجموعه‌ای از واحدها یکسان نیست.

بدین طریق پیشینی بودن زمان نه تنها خواص حساب را به‌عنوان احکام پیشینی ترکیبی تأیید می‌کند بلکه همین کار را برای هندسه نیز انجام می‌دهد، و نه فقط برای هندسهٔ مقدماتی دوبعدی و سه‌بعدی، بلکه برای هندسه‌های غیراقلیدسی و nبعدی؛ زیرا از دکارت آموخته‌ایم که همهٔ این هندسه‌ها به‌وسیلهٔ حساب مختصات به حساب تحویل می‌شوند.

بنابراین از دیدگاه فعلیِ شهودگرایی همهٔ مجموعه‌های آحاد ریاضی می‌توانند از شهود بنیادی برآیند، و این کار فقط با ترکیب دو عمل زیر در تعداد متناهی دفعه انجام می‌پذیرد: «خلق یک عدد ترتیبی متناهی» و «خلق عدد ترتیبی نامتناهی ω»؛ در اینجا باید دانست که برای مقصود دوم، هر مجموعه‌ای که قبلاً ساخته شده یا هر ساختنی که قبلاً انجام شده باید به‌عنوان یک واحد در نظر گرفته شود. در نتیجه، فرد شهودگرا فقط وجود مجموعه‌های

1. two-oneness

شمارش‌پذیر را به رسمیت می‌شناسد؛ مجموعه‌هایی که اعضای آنها را می‌توان در تناظر یک به یک، با اعضای یک عدد ترتیبی متناهی یا با اعضای عدد ترتیبی نامتناهی ω قرار داد. و در ساختن این مجموعه‌ها، نه زبان معمولی و نه هیچ زبان نمادی، نقشی غیر از اینکه یک ابزار کمکی غیرریاضی باشد که به حافظهٔ ریاضی کمک می‌کند یا افراد مختلف را قادر می‌کند تا مجموعهٔ یکسانی را بسازند، ندارد.

به این دلیل است که فرد شهودگرا با ضمانتهایی از قبیل متناقض نبودن یک نظریهٔ ریاضی، امکان تعریف مفاهیم آن به‌وسیلهٔ تعداد متناهی از کلمات ([Poincaré]، ص ۶) یا یقین عملی به اینکه ریاضیات هرگز به سوءتفاهم در روابط انسانی منجر نمی‌شود ([Borel]، ص ۲۲۱) نسبت به درستی آن نظریه احساس اطمینان پیدا نمی‌کند.

همانطور که در بالا گفته شد، فرد صورتگرا می‌خواهد وظیفهٔ انتخاب زبان «ریاضی راستین» را از بین بسیاری زبانهای نمادی که می‌توان آنها را به‌طور سازگار به کار گرفت به روانشناس محول کند. مادام که روانشناس به این تکلیف عمل نکرده است، صورتگرا مجبور است، حداقل موقتاً، دامنه‌ای را که می‌خواهد به‌عنوان «ریاضیات راستین» در نظر بگیرد محدود کند و برای این هدف دستگاه معینی از اصول موضوع و قوانین استدلال ارائه کند، زیرا در غیر این‌صورت کارش بی‌نتیجه است. روشهای مختلفی که در این راه به‌کار گرفته شده‌اند، همه از یک ایدهٔ اساسی برمی‌آیند، یعنی پیشفرض وجود جهانی از اشیاء ریاضی، جهانی مستقل از افراد اندیشنده، که از قوانین منطق کلاسیک تبعیت می‌کند و اشیاء آن نسبت به یکدیگر ممکن است «رابطهٔ یک مجموعه با اعضایش» را داشته باشند. با ارجاع به این رابطه است که اصول موضوع مختلفی صورتبندی شده‌اند که ازکار با مجموعه‌های متناهی طبیعی الهام گرفته شده‌اند: «یک مجموعه با اعضایش مشخص می‌شود»؛ «در مورد هر دو شیء ریاضی می‌توان تعیین کرد که آیا یکی از آنها به‌عنوان عضو مشمول در دیگری است یا نه»؛ «برای هر مجموعه، مجموعهٔ دیگری وجود دارد که اعضای آن چیزی جز زیرمجموعه‌های مجموعهٔ مفروض نیستند»؛ اصل انتخاب: «مجموعه‌ای که به چند زیرمجموعه تقسیم شده، شامل حداقل یک زیرمجموعه است که از هر زیرمجموعهٔ دیگر یک و فقط یک عضو در آن است»؛ اصل شمول: «اگر در مورد هر شیء ریاضی بتوان تصمیم گرفت که خاصیت معینی را دارد یا نه، آنگاه مجموعه‌ای وجود دارد که فقط شامل اشیایی است که خاصیت مذکور را دارند»، اصل ترکیب: «اعضای همهٔ مجموعه‌هایی که به یک مجموعه از مجموعه‌ها تعلق دارند، یک مجموعهٔ جدید را تشکیل می‌دهند».

بر اساس چنین مجموعه‌ای از اصول موضوع، صورتگرا ابتدا نظریهٔ «مجموعه‌های متناهی» را بنا می‌کند. یک مجموعه را متناهی می‌نامند اگر اعضای آن را نتوان در تناظر یک به یک با اعضای زیرمجموعه‌ای از خودش قرار داد؛ با استدلال نسبتاً پیچیده‌ای ثابت می‌شود که اصل استقرای کامل یک خاصیت اساسیِ همهٔ این مجموعه‌هاست ([Zermelo] ص ۱۸۵ـ۱۹۳). این اصل می‌گوید که یک خاصیت برای همهٔ مجموعه‌های متناهی برقرار است اگر اولاً، برای همهٔ مجموعه‌هایی که فقط یک عضو دارند برقرار باشد و ثانیاً اعتبار آن برای یک مجموعهٔ متناهی دلخواه، از اعتبارش برای مجموعه‌ای که فقط یک عضو کمتر دارد، نتیجه شود. اینکه صورتگرا باید برهان صریحی برای این اصل ارائه کند، که در مورد اعداد متناهیِ شهودگرا بنا بر ساختنشان بدیهی است، نشان می‌دهد که صورتگرا به هیچ وجه نمی‌تواند برای توجیه انتخاب خود از اصول موضوع، به جای توسل به شهود، که به نظرش نادقیق است، به نامتناقض بودن نظریه‌اش توسل جوید. ولی برای اثبات اینکه هرگز از بین تعدادی نامتناهی نتیجه که از اصول موضوع او استنتاج می‌شوند، تناقضی برنمی‌آید، ابتدا باید نشان دهد که اگر تناقضی تا nامین نتیجه به‌دست نیاید، تا $(n+1)$امین نتیجه نیز تناقضی به‌دست نمی‌آید، و ثانیاً باید اصل استقرای کامل را به‌طور شهودی به‌کار بندد. اما این قدم دوم را صورتگرا برنمی‌دارد، هر چند که او اصل استقرای کامل را ثابت کرده است؛ زیرا این کار مستلزم حصول یقین ریاضی در این مورد است که مجموعهٔ خواص حاصل بعد از نتیجهٔ mام، به‌ازای یک n دلخواه، در تعریف او برای مجموعه‌های متناهی صدق می‌کند [۸]، و برای به‌دست آوردن این یقین، او باید نه تنها به استعمال غیرمجاز یک معیار نمادی در یک مثال مشخص روی آورد بلکه همچنین باید اصل استقرای کامل را به‌طوری شهودی به‌کار برد؛ و این‌کار او را به استدلال دَوری می‌کشاند.

در قلمرو مجموعه‌های متناهی که اصول موضوع صورتگرایان تعبیر کاملاً روشنی برای شهودگرایان دارد، و در واقع این گروه بدون قید و شرط با آن توافق دارند، اختلاف دو جناح فقط در روش است نه در نتایج؛ ولی در قلمرو مجموعه‌های نامتناهی یا ترامتناهی وضع به‌کلی متفاوت است، چه در آنجا صورتگرا عمدتاً با استعمال اصل موضوع شمول، مفاهیم مختلفی تعریف می‌کند که به‌کلی از نظر شهودگرا بی‌معناست، برای مثال، «مجموعه‌ای که اعضای آن نقاط فضا هستند»، «مجموعه‌ای که اعضای آن توابع پیوستهٔ یک متغیره هستند»، «مجموعه‌ای که اعضای آن توابع ناپیوستهٔ یک‌متغیره هستند»، و غیره. در این تحولات صورتگرایانه معلوم شده است که کاربرد سازگار اصل موضوع شمول، ناگزیر به تناقضات منجر می‌شود. نمونهٔ روشنی از این امر، تنازع معروف به تنازع بورالی‌ـفورتی[1] است. برای نشان دادن این موضوع باید چند تعریف جدید ارائه کنیم.

مجموعه را مرتب گویند اگر بین هر دو عضو آن رابطهٔ «بزرگتر بودن» یا «کوچکتر بودن» وجود داشته باشد، با این خاصیت که اگر عضو a بزرگتر از عضو b باشد آنگاه عضو b کوچکتر از عضو a است، و اگر عضو b بزرگتر از عضو a باشد و عضو c بزرگتر از عضو b باشد، آنگاه عضو c بزرگتر از عضو a است.

مجموعهٔ خوشترتیب (به‌معنای صورتگرایانه) یک مجموعهٔ مرتب است به‌طوری که هر زیرمجموعهٔ آن عضوی دارد که از همهٔ اعضای دیگر کوچکتر است.

دو مجموعهٔ خوشترتیب را که در تناظر یک به یک قرار بگیرند به‌طوری که روابط «بزرگتر بودن» و «کوچکتر بودن» تحت این تناظر حفظ شود، دارای عدد ترتیبی یکسان خوانند.

اگر دو عدد ترتیبی A و B مساوی نباشند، آنگاه یکی بزرگتر از دیگری است، مثلاً اینکه A بزرگتر از B است، بدین معناست که B با یک قطعهٔ آغازی A در تناظر یک به یکی است که روابط «بزرگتر بودن» و «کوچکتر بودن» را حفظ می‌کند. از دیدگاه شهودگرا، قبلاً کوچکترین عدد ترتیبی نامتناهی، ω، را معرفی کردیم، یعنی عدد ترتیبی مجموعهٔ همهٔ اعداد ترتیبی متناهی به ترتیب بزرگی[2]. به مجموعه‌های خوشترتیبی که عدد ترتیبی ω داشته باشند سری مقدماتی می‌گویند.

---

1. Burali-Forti

۲. اعداد ترتیبی کلیتر از نظر شهودگرا اعدادی هستند که به‌وسیلهٔ دو اصل کانتور به‌نام اصول تولید ساخته شده‌اند ([Cantor]، ج ۴۹، ص ۲۲۶).

صورتگرایان به‌سادگی ثابت می‌کنند که زیرمجموعه‌ای دلخواه از یک مجموعهٔ خوشترتیب نیز یک مجموعهٔ خوشترتیب است، که عدد ترتیبی آن نابیشتر از مجموعهٔ اول است؛ همچنین اگر به یک مجموعهٔ خوشترتیب که شامل همه اشیاء ریاضی نیست عضو جدیدی اضافه شود که بزرگتر از همه اعضای مجموعه اول تعریف گردد، مجموعهٔ خوشترتیب جدیدی به‌دست می‌آید که عدد ترتیبی آن بزرگتر از مجموعه اول است.

حال بر اساس اصل موضوع شمول مجموعهٔ s را می‌سازیم که شامل همه اعداد ترتیبی باشد که به ترتیب بزرگی مرتب شده‌اند؛ آنگاه به سادگی می‌توانیم ثابت کنیم که از یک طرف، s یک مجموعهٔ خوشترتیب است که هیچ عدد ترتیبی بزرگتر از عدد ترتیبی s نیست، از طرف دیگر چون همه اشیاء ریاضی اعداد ترتیبی نیستند، می‌توان عددی ترتیبی خلق کرد که با اضافه کردن عضو جدیدی به s، از عدد ترتیبی s بزرگتر باشد — و این یک تناقض است.[1]

اگر صورتگرایان بخواهند سازگاری را رعایت کنند باید نتایج متناقض را به‌عنوان نتایج ریاضی بپذیرند، اما در تنازعی مثل تنازع بورالی-فورتی چیز ناخوشایندی وجود دارد، زیرا در عین حال، پیشرفت مراحل استدلال آنها به‌وسیلهٔ اصل عدم تناقض هدایت می‌شود، یعنی نفی اعتبار همزمان دو خاصیت متناقض. به این دلیل است که اصل موضوع شمول به‌صورت زیر اصلاح شده است: «اگر برای همهٔ اعضای یک مجموعه بتوان تعیین کرد که یک خاصیت معین معتبر است یا نه، آنگاه این مجموعه شامل زیرمجموعه‌ای است که اعضای آن فقط آنهایی هستند که خاصیت مذکور را دارند» ([Zermelo]، ص ۲۶۳).

این صورتِ اصل انتخاب، فقط معرفی مجموعه‌هایی را مجاز می‌شمرد که زیرمجموعهٔ مجموعه‌ای باشند که قبلاً معرفی شده است؛ اگر کسی بخواهد با مجموعهٔ دیگری کار کند، وجود آن باید به‌طور صریح فرض شود. تنها دلیلی که می‌توان علیه معرفی یک مجموعه اقامه کرد این است که فرض وجود آن منجر به تناقض می‌گردد. در واقع تنها اصلاحی که کشف تنازعها در صورتگرایی باعث شده است، حذف مجموعه‌هایی است که منشأ این‌گونه تناقضها بودند. بنابراین می‌توان کار را بدون هیچ‌گونه نگرانی با مجموعه‌های دیگری که بر اساس صورت قبلی اصل شمول معرفی شده‌اند، ادامه داد؛ نتیجهٔ این عمل حوزهٔ وسیع تحقیقاتی است که هنوز برای صورتگرایان جالب توجه است، ولی برای شهودگرایان هیچ اهمیتی ندارد. مثالی از این موضوع در نظریهٔ توانها یافت می‌شود، که من ویژگیهای اصلی آن‌را به‌طور خلاصه بیان می‌کنم، زیرا به‌وضوح شکاف پرنشدنی بین این دو جناح را نشان می‌دهد.

دو مجموعه را همتوان گویند اگر اعضای آنها را بتوان در تناظر یک به یک قرار داد. توان مجموعهٔ A را بزرگتر از توان مجموعهٔ B گویند، و توان

۱. اینکه تنازع بورالی-فورتی را بعضی وقتها با تنازع ریچارد از یک نوع می‌دانند منصفانه نیست. صورت ساده شدهٔ تنازع ریچارد به صورت زیر است: «آیا کوچکترین عدد صحیحی که نتواند به‌وسیلهٔ جمله‌ای با حداکثر بیست کلمه تعریف شود وجود دارد؟» از یک طرف، آری، زیرا تعداد جملات با حداکثر بیست کلمه متناهی است؛ از طرف دیگر نه، زیرا اگر وجود داشته باشد، به‌وسیلهٔ جمله‌ی با سیزده کلمه تعریف شده است که با حروف ایرانیک آمده‌اند.

منشأ این تنازع در اصل موضوع شمول نیست بلکه در کلمهٔ «تعریف شود» است که معنای متغیر دارد، و این باعث می‌شود که بتوان با این جمله تعداد نامتناهی از اعداد صحیح را به توالی تعریف نمود.

مجموعهٔ B را کوچکتر از توان مجموعهٔ A گویند اگر بتوان تناظر یک به یکی بین B و بخشی از A برقرار کرد، اما برقراری تناظری بین A و بخشی از B ممکن نباشد. توان مجموعه‌ای را که به اندازهٔ توان زیرمجموعه‌ای از خود مجموعه است، نامتناهی گویند؛ توانهای دیگر را متناهی گویند. مجموعه‌هایی را که توان آنها با توان اعداد طبیعی ω یکسان باشد، نامتناهی شمارا و توان چنین مجموعه‌هایی را الفْ صفر گویند: می‌توان ثابت کرد که این کوچکترین توانِ نامتناهی است. همان‌طورکه قبلاً گفته شد، این توان الفْ صفر تنها توان نامتناهی است که شهودگرایان وجود آن را می‌پذیرند.

حال اجازه دهید مفهوم «عدد ترتیبی نامتناهی شمارا» را بررسی کنیم. از آنجایی که این مفهوم هم برای صورتگرا و هم برای شهودگرا یک معنای روشن و خوش‌تعریف دارد، صورتگرا خود را محق می‌داند که «مجموعه‌ای از همهٔ اعداد ترتیبی نامتناهی شمارا» خلق کند که توان آن را الفْ یک می‌نامند، کاری که شهودگرا آن را درست نمی‌داند. چون این دلیل هم برای صورتگرا و هم برای شهودگرا موجه است که اولاً، مجموعه‌های نامتناهی شمارا مرکب از اعداد ترتیبی نامتناهی شمارا می‌توان به شیوه‌های مختلف ساخت، و ثانیاً به هر یک از چنین مجموعه‌هایی می‌توان یک عدد ترتیبی نامتناهی شمارا نسبت داد که به این مجموعه تعلق ندارد، صورتگرا نتیجه می‌گیرد که: «الفْ یک از الفْ صفر بزرگتر است»، گزاره‌ای که برای شهودگرا هیچ معنایی ندارد. چون این دلیل هم برای صورتگرا و هم برای شهودگرا موجه است که غیرممکن است مجموعه‌ای از اعداد ترتیبی نامتناهی شمارا ساخت[1] که بتوان ثابت نمود توان آن کوچکتر از الفْ یک، ولی بزرگتر از الفْ صفر است، صورتگرا نتیجه می‌گیرد: «الفْ یک دومین کوچکترین عدد نامتناهی است»، گزاره‌ای که برای شهودگرا هیچ معنایی ندارد.

حال مفهوم «عدد حقیقی بین ۰ و ۱» را بررسی می‌کنیم. این مفهوم برای صورتگرا معادل «سریهای مقدماتی ارقام بعد از ممیز» است[2]، و برای شهودگرا به معنای «قانونی برای ساختن یک سری مقدماتی از ارقام بعد از ممیز است، که با تعدادی متناهی از اعمال ساخته می‌شود». و وقتی که صورتگرا «مجموعهٔ همهٔ اعداد حقیقی بین ۰ و ۱» را خلق می‌کند، این کلمات برای شهودگرا هیچ معنایی ندارد، خواه اعداد حقیقیِ صورتگرا مد نظر باشد، که با سریهای مقدماتی ارقامِ آزادانهٔ انتخاب‌شده معین می‌شود، خواه اعداد حقیقیِ شهودگرا که به‌وسیلهٔ قوانین متناهیِ ساخت معین می‌شود. چون می‌توان برای احکام زیر براهینی آورد که هم برای صورتگرا و هم برای شهودگرا موجه باشد: اولاً، مجموعه‌های نامتناهی شمارا از اعداد حقیقی بین ۰ و ۱ به شیوه‌های مختلف قابل ساختن هستند، و ثانیاً به هر چنین مجموعه‌ای می‌توان یک عدد حقیقی بین ۰ و ۱ نسبت داد که به مجموعه متعلق نباشد، صورتگرا نتیجه می‌گیرد که: «توان پیوستار، یعنی توان مجموعهٔ اعداد حقیقی بین ۰ و ۱، بزرگتر از الفْ صفر است»؛ این گزاره برای شهودگرا هیچ معنایی ندارد؛ حتی صورتگرا این سؤال را مطرح می‌کند که «آیا توان پیوستار، دومین

۱. اگر به‌جای «ساختن»، «تعریف کردن» [به مفهوم صورتگرایانه] را بگذاریم، برهان مذکور برای شهودگرا راضی‌کننده نیست. زیرا در برهان کانتور جایگزینی کلمات «können wir bestimmen» ([Cantor]، ج ۴۹، ص ۲۴۱ سطر ۱۷ از بالا) با کلمات «muss es geben» مجاز نیست.

۲. در اینجا مثل هر جای دیگرِ این مقاله، به‌طور ضمنی فرض شده است که تعدادی نامتناهی رقم متمایز با ۹ وجود دارد.

کوچکترین توان نامتناهی است؟»؛ و این سؤال را که همچنان منتظر پاسخ است، یکی از مشکلترین و اساسیترین مسائل ریاضی می‌داند.

ولی از نظر شهودگرا، سؤال به نحوی که مطرح شده است فاقد معناست: به مجرد اینکه به‌گونه‌ای تعبیر شود که معنادار باشد، به‌راحتی می‌توان به آن پاسخ داد.

اگر سؤال را به این صورت مطرح کنیم: «آیا غیرممکن است که مجموعه‌هایی نامتناهی از اعداد حقیقی بین ۰ و ۱ ساخته شود[1] که توان آنها از توان پیوستار کوچکتر باشد، ولی از الفْ صفر بزرگتر باشد؟ «آنگاه پاسخ باید مثبت باشد؛ زیر شهودگرا فقط می‌تواند مجموعه‌های شمارایی از اشیای ریاضی بسازد و اگر بر اساس شهود پیوستار خطی، سریهای مقدماتی از انتخابهای آزاد را به‌عنوان عناصر ساختمان بپذیرد، آنگاه هر مجموعهٔ ناشمارا که به‌وسیلهٔ آن ساخته شده است، شامل زیرمجموعه‌ای با توان پیوستار است.

اگر سؤال را بدین صورت مطرح کنیم: «آیا می‌توان تناظری یک به یک بین اعضای مجموعه‌ای شمارا از اعداد ترتیبی نامتناهی از یک طرف، و مجموعه‌ای از اعداد حقیقی بین ۰ و ۱ از طرف دیگر برقرار کرد به گونه‌ای که هر دو مجموعه با ساختن اعضای جدید به‌طور نامتناهی قابل توسعه باشند و این تناظر با ادامهٔ این ساختمان در هر دو مجموعه مختل نشود؟» آنگاه جواب باید مثبت باشد، زیرا توسعهٔ هر دو مجموعه می‌تواند به مرحله‌هایی تقسیم شود به‌طوری که در هر مرحله تعداد نامتناهی شمارا از اعضا اضافه گردد[2].

ولی اگر سؤال را به این صورت طرح کنیم: «آیا ممکن است قانونی ساخت که به هر سری مقدماتی از ارقام، یک عدد ترتیبی نامتناهی شمارا نسبت دهد و به‌طور پیشینی بدانیم که دو سری مقدماتی مختلف هرگز یک عدد ترتیبی نامتناهی شمارا نخواهند داشت؟» آنگاه جواب باید منفی باشد؛ زیرا این قانونِ تناظر باید به‌گونه‌ای باشد که در هر مرحله از مراحل متوالی سری مقدماتی، یک عدد ترتیبی نامتناهی شمارا بسازد؛ بنابراین برای هر مکان c_ν، یک بزرگترین عدد خوش‌تعریفِ نامتناهیِ شمارا چون α_ν وجود دارد که ساختمان آن مبتنی بر آن مکان خاص است، پس یک عدد ترتیبی خوش‌تعریف نامتناهی شمارا چون α_ω وجود دارد که از همهٔ α_νها بزرگتر است و بنابراین همهٔ اعداد ترتیبی که مشمول قانون تناظر هستند از آن بزرگتر نیستند؛ پس توان مجموعهٔ اعداد ترتیبی از الفْ صفر بیشتر نیست.

یک روشِ صورتگرایان برای به‌دست آوردن توانهای بزرگتر، این است، که به‌ازای هر توان μ «مجموعهٔ همه راههای مختلف ممکن برای انتخابهای توان μ» را تعریف می‌کنند، و ثابت می‌کنند که توان این مجموعه بزرگتر از μ است. به‌طور خاص، با استدلالی که هم صورتگرایان و هم شهودگرایان از آن رضایت دارند ثابت شده است که می‌توان به طُرُق مختلف قوانینی ساخت که مطابق آنها توابع یک‌متغیرهٔ حقیقی متناظر با همهٔ سریهای مقدماتیِ ارقام شوند، اما غیرممکن است قانونی ساخته شود که مطابق آن هر سری مقدماتی از ارقام متناظر با یک تابع یک‌متغیرهٔ حقیقی شود و در آن به‌طور پیشینی این قطعیت وجود دارد که دو تابع مختلف هرگز با یک سری مقدماتی واحد متناظر نمی‌شوند. صورتگرا از این احکام نتیجه می‌گیرد که: «c'، توان مجموعهٔ همه توابع یک‌متغیرهٔ حقیقی، از c، توان پیوستار، بزرگتر است»، گزاره‌ای که برای شهودگرا فاقد معناست، و صورتگرا به همین شیوهٔ گذار از c به c'، از c' به توانهای بزرگتر c'' می‌رسد.

روش دومی که صورتگرایان به‌وسیلهٔ آن توانهای بزرگتر را به‌دست می‌آورند این است، که برای هر توان μ، مجموعهٔ همه اعداد ترتیبی با توان μ را تعریف می‌کنند، و بعد ثابت می‌کنند که توان این مجموعه بزرگتر از μ است. به‌طور خاص، آنها توان مجموعهٔ همهٔ اعداد ترتیبی با توان الفْ یک را با الفْ دو نشان می‌دهند و ثابت می‌کنند که الفْ دو بزرگتر از الفْ یک است و از نظر مقدار بلافاصله بعد از الفْ یک است. اگر تعبیر این نتیجه به گونه‌ای که برای شهودگرایان معنایی داشته باشد، ممکن می‌بود چنین تعبیری به‌سادگی حالات قبل نبود.

آنچه تاکنون مورد بررسی قرار گرفت جنبهٔ منفی نظریهٔ توانها بود؛ برای صورتگرایان جنبه‌ای مثبت نیز وجود دارد که مبتنی بر قضیه برنشتاین است: «اگر مجموعهٔ A همتوان با زیرمجموعه‌ای از B، و مجموعهٔ B نیز همتوان با زیرمجموعه‌ای از A باشد، آنگاه A و B همتوان هستند»، یا به‌صورت معادل: «اگر مجموعهٔ $A = A_1 + B_1 + C_1$ با مجموعهٔ A_1 همتوان باشد، با $A_1 + B_1$ نیز همتوان است.

این قضیه برای مجموعه‌های شمارا بدیهی است. اگر بخواهیم برای مجموعه‌هایی با توانهای بالاتر برای شهودگرا معنایی داشته باشد، باید به‌صورت زیر تعبیر شود: «اگر بتوان اولاً قانونی ساخت که تناظری یک به یک بین هویّات ریاضی نوع A و هویّات ریاضی نوع A_1 برقرار کند، و ثانیاً قانونی ساخت، که تناظری یک به یک بین هویّات ریاضی نوع A و هویّات ریاضی نوع A_1، B_1 و C_1 برقرار کرد، آنگاه می‌توان قانون سومی از این دو قانون به‌وسیلهٔ تعدادی عمل متناهی ساخت که تناظری یک به یک بین هویّات ریاضی نوع A و هویّات ریاضی انواع A_1 و B_1 برقرار کند».

برای تحقیق در اعتبار این تعبیر، برهان را نقل می‌کنیم:

«از تقسیم A به $A_1 + B_1 + C_1$، با استفاده از تناظر γ_1 بین A و A_1، تقسیم A_1 به $A_2 + B_2 + C_2$ را به‌دست می‌آوریم، به‌علاوه تناظر یک به یک γ_2 بین A_1 و A_2 نیز به‌دست می‌آید. از تقسیم A_1 به $A_2 + B_2 + C_2$، به‌وسیلهٔ تناظر یک به یک بین A_1 و A_2، تقسیم A_2 به $A_3 + B_3 + C_3$ و تناظر یک به یک γ_3 بین A_2 و A_3 را به‌دست می‌آوریم. تکرار نامتناهی این جریانْ مجموعهٔ A را به یک سری مقدماتی از زیرمجموعه‌های C_1، C_2، C_3، ...، یک سری مقدماتی از زیرمجموعه‌های B_1، B_2، B_3، ... و مجموعهٔ باقیماندهٔ D تقسیم می‌کند. تناظر مطلوب γ_C بین A و $A_1 + B_1$ با نسبت دادن هر عضو C_γ به عضو متناظر $C_{\gamma+1}$ و هر عضو دیگر به خودش به‌دست می‌آید».

---

۱. اگر در اینجا «تعریف کردن» (به‌معنای صورتگرایانه) به‌جای «ساختن» گذاشته شود و اگر فرض کنیم که مسئلهٔ جفتهای ارقام در بسط اعشاری π، که در صفحهٔ بعد بحث می‌شود، نمی‌تواند حل شود، آنگاه سؤال مطرح شده در متن جواب منفی دارد. زیرا فرض کنید Z مجموعهٔ بسطهای دوتایی نامتناهی باشد که رقم nام آن ۱ باشد اگر nامین جفت ارقام در بسط اعشاری π از ارقام نابرابر تشکیل شده باشد؛ به‌علاوه فرض کنید X مجموعه همه بسطهای دوتایی متناهی باشد. آنگاه توان $X + Z$ بزرگتر از الفْ صفر، اما کوچکتر از توان پیوستار است.

۲. هر مجموعه‌ای را که اعضای آن می‌توانند به‌طور انفرادی محقق شوند و در آن برای هر زیرمجموعهٔ نامتناهی شمارا عضوی وجود دارد که به آن زیرمجموعه تعلق ندارد، ناتمام شمارا می‌نامیم. مطابق تعاریف متن، می‌توان به‌طور کلی گفت: «همه مجموعه‌های ناتمام شمارا یک توان دارند.»

برای آزمودن این برهان در یک مثال مشخص، فرض کنید A مجموعهٔ همهٔ اعداد حقیقی بین ۰ و ۱ باشد، که با بینهایت ارقام در بسط اعشاری نمایش داده شده‌اند. برای A_1 مجموعهٔ آن اعدادی را در نظر می‌گیریم که رقم $(2n-1)$ام آنها با رقم $(2n)$ام برابرند؛ به‌علاوه، گر عددی به A_1 متعلق نباشد، به B_1 تعلق دارد. اگر تساوی فوق بینهایت بار تکرار شود و به C_1 تعلق دارد اگر تساوی فوق به تعداد متناهی دفعه تکرار شود. با جایگزینی متوالی هر رقم یک عضو دلخواه A با دو رقم برابر با آن، قانونی به‌دست می‌آید که تناظری یک به یک چون γ_1 بین A و A_1 برقرار می‌کند. برای اینکه عضوی از A_1 متناظر با عضو خوش‌تعریفی از A، مثل $\pi - ۳$ شود، می‌توانیم به‌طور متوالی تا آنجا که بخواهیم ارقام را معین کنیم؛ بنابراین باید خوش‌تعریف محسوب شود.

برای تعیین عضوی متناظر با $\pi - ۳$ مطابق تناظر γ_c، لازم است تعیین کنیم که آیا در بسط اعشاری آن، یک رقم در مکان فرد به تعداد نامتناهی بار با همان رقم در مکان زوج بلافاصله بعد از آن مساوی است یا به تعداد متناهی بار؛ برای این هدف، یا باید فرایندی برای ساختن یک سری مقدماتی از چنین جفتهای ارقام مساوی خلق کنیم یا از فرض وجود چنین سری مقدماتی، تناقضی استنتاج کنیم. اما هیچ زمینه‌ای برای اعتقاد به قابل حل بودن این مسائل وجود ندارد[۱].

بنابراین روشن شده است که قضیهٔ برنشتاین و با آن، جنبهٔ مثبت نظریهٔ توانها نیز هیچ تعبیر شهودگرایانه را نمی‌پذیرد.

این بود توصیف من از موضوعی اساسی که در جهان ریاضی اختلاف ایجاد کرده است. در هر دو جناح عالمان مشهور حضور دارند و احتمال توافق درکوتاه مدت عملاً منتفی است. به قول پوانکاره: «انسانها یکدیگر را نمی‌فهمند، زیرا زبان واحدی ندارند و زبانهایی وجود دارند که کسی آنها را نمی‌فهمد».

مراجع

[Borel] Borel,E.1912. "La philosophie mathématique et L'infiniti", *Revue du mois*, vol. 14.

[Brouwer] Brouwer, L. E. J. 1908. "Die onbetrouwbaarheid der Logische principes." *Tijdschrift voor wijsbegeerte*, vol. 2.

[Burali-Forti] Burali-Forti, C. 1897. "Una questione sue i numeri Transfiniti". *Rendiconti del circolo Metematico di palermo*, vol. 11.

[Cantor] Cantor, G. 1895-7. "Beitrüge Zur Begründung der Transfiniten Mengenlehre". parts 1 and 2. *Mathematische Annalen*, vols. 46 and 49. Translated as cantor 1915.

[Cantor] ______, 1915. *Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers*. A Translation of cantor 1895-15 by P. E. B. Jourdain. chicago and London: open Court; reprinted, NewYork: Dover, 1952.

[Mannoury] Mannoury,G 1909. *Methodo logisches und philosophische zur Elementar-Mathematik*. Haarlem: Visser; Assen: Van Gorcum.

[Poincaré] Poincaré. H. 1903. *La Science et L' Hypothèse*, paris: Flammarian.

[Poincaré] ______. 1905. "*Les Mathématiques et la Logique*." Revue de métaphysique et de morale, vol. B.

[Poincaré] ______, 1908a. "L'avenir des mathematiques," *scientia: Revista di scienza*, vol. 4.

[Zermelo] Zermelo, E. 1908. "Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehte I. "*Mathematische Annalen*, vol. 65.

[Zermelo] ______, 1909. "Sur les ensembles finis et le principe de L'induction complète." *Acta Mathematica*, vol. 32.

۱. چنین اعتقادی را فقط بر اساس اصل طرد شق ثالث می‌توان داشت، یعنی اصل موضوع وجود «مجموعهٔ همه خواص ریاضی»، اصلی وسیعتر از اصل موضوع شمول، که قبلاً ذکر شد. در این مورد به [Brouwer]، ص ۱۵۲، ۱۵۸) رجوع کنید.

******

• این مقالهٔ ترجمهٔ متن سخنرانی براور به مناسبت آغاز کار او در دانشگاه آمستردام در ۱۴ اکتبر ۱۹۱۲ است. ترجمهٔ آن به انگلیسی به وسیلهٔ پروفسور آرنولد درسدن (Arnold Dresden) انجام شده و در *Bulletin of the American Mathematical Society* **20** (1913). 81-96 به چاپ رسیده است.