پیشرفتهایی در دینامیک آشوبناک•

لای-سانگ یانگ*
ترجمهٔ هادی جرئتی

پیشینهٔ بررسی دستگاههای دینامیکی به‌عنوان شاخه‌ای از ریاضیات به پوانکاره می‌رسد که برای مطالعهٔ مسأله‌هایی که از مکانیک آسمانی سر بر می‌آورند، رهیافتی کیفی پرورد. این موضوع در سه دههٔ اخیر به میزان قابل توجهی گسترش یافته و تغییراتی بنیادی به خود دیده است. امروزه این موضوع در محل تلاقی چندین شاخه از ریاضیات از جمله آنالیز، هندسه، توپولوژی، احتمالات، و ریاضی‌فیزیک قرار دارد. معمولاً مبحث دستگاههای دینامیکی را مطالعهٔ اثرات پیاپی یک نگاشت روی یک نقطه، یا تحول زمانی معادلات دیفرانسیل، و یا عمل گروهها روی خمینه می‌شمرند.

این نوشته در بارهٔ آن بخش از مبحث دستگاههای دینامیکی است که *دینامیک هذلولوی* یا *دینامیک آشوبناک* خوانده می‌شود. مفهوم هذلولوی بودن را، که به زودی تعریف، خواهیم کرد، هدلاند[1] و هوپف[2] در مطالعهٔ شارشهای ژئودزیک روی، خمینه‌های با انحنای منفی به‌کار بردند. بررسی روشمندی از دستگاههای هذلولوی در دههٔ ۶۰ آغاز شد، هنگامی که اِسمیل در مقالهٔ سال ۱۹۶۷ خود در بولتن انجمن ریاضی امریکا [Sm] برنامه‌ای برای نظریهٔ هندسی دستگاههای دینامیکی تدوین کرد. دیدگاه دیگر، یعنی *نظریهٔ ارگودیک* یا رهیافت احتمالاتی به دینامیک هذلولوی را چند سال بعد سینایی[3] و روئل[4] معرفی کردند. طی سی سال گذشته این ایده‌ها تا حد یک نظریهٔ بسیار بارور گسترش یافته‌اند که نظریهٔ کیفی معادلات دیفرانسیل عادی را متحول کرده و به شکل‌گیری ایده‌های نوی در بارهٔ آشوب کمک کرده است.

در این نوشته می‌خواهم از چند پیشرفت در این زمینه از دههٔ ۶۰ به بعد گزارشی بدهم. اگرچه این نوشته را نمی‌توان یک «گزارش جامع» نامید، امیدوارم که بتوانم با تکیه بر یکی دو مثال و چند ایده به‌عنوان نمونه، ریاضیکاران ناآشنا با این زمینه را با بعضی از پیشرفتهای انجام شده آشنا کنم.

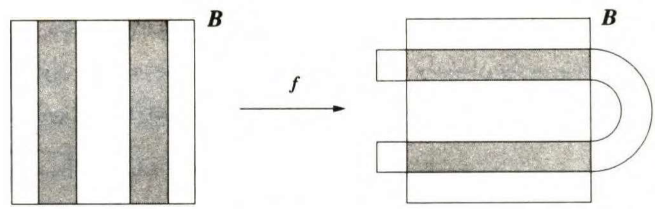
کارمان را با تعریف معنای هذلولوی بودن آغاز می‌کنیم. بیایید توجه خود را به دستگاههای دینامیکی با *زمان گسسته* (در برابر دستگاههای با زمان پیوسته یا همان شارشها) محدود کنیم، یعنی دستگاههایی که با اثر دادن پیاپی نگاشتهای یک خمینه به خودش به‌وجود می‌آیند. نگاشت خطی $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ هذلولوی خوانده می‌شود اگر هیچ‌یک از ویژه‌مقدارهای آن روی دایرهٔ واحد قرار نگرفته باشد. گوییم نگاشت غیرخطی f در نقطهٔ p یک *نقطهٔ ثابت هذلولوی* دارد اگر $f(p) = p$ و $Df(p)$ یک نگاشت خطی هذلولوی باشد. نقاط ثابت هذلولوی یا *جاذب* [ربایندہ]اند (هنگامی که همهٔ ویژه مقدارها درون دایرهٔ واحد قرار دارند) یا *دافع* (هنگامی که همگی بیرون دایره‌اند) یا زینی (هنگامی که گروهی درون و برخی بیرون‌اند). مجموعهٔ ناوردای هذلولوی، که اسمیل معرفی کرد [Sm]، تعمیمی است از نقطهٔ ثابت هذلولوی.

فرض کنید $f : M \to M$ وابرریختی[1]ای از خمینهٔ ریمانی M باشد و $\Lambda \subset M$ مجموعه‌ای فشرده و ناوردا یعنی $f^{-1}(\Lambda) = \Lambda$. گوییم f بر Λ *هذلولوی است*، اگر فضای مماس در هر نقطه مانند $x \in \Lambda$ مجموع مستقیم دو زیرفضا باشد که یکی با Df منبسط و دیگری با Df منقبض می‌شود. همچنین این شرط را هم می‌گذاریم که این زیرفضاها باید به‌طور پیوسته با x تغییر کنند و دیگر اینکه Df آنها را حفظ کند. می‌توان نشان داد که وقتی زیرفضای گسترش یابنده (یا متراکم‌شونده) بدیهی باشد، Λ اجتماع تعدادی متناهی از مدارهای تناوبی است. وضعیت جالبتر هنگامی است که هر دو زیرفضا نابدیهی باشند. در این حالت مدارها موضعاً زین‌گونه‌اند و ساختار Λ و دینامیک روی Λ ممکن است هر دو بسیار پیچیده باشند. یک نمونهٔ اولیه از یک مجموعهٔ ناوردای هذلولوی، «نعل اسب» اسمیل است (شکل ۱ را ببینید).

یک مشخصهٔ مهم هذلولوی بودن هنگامی که هر دو زیرفضا نابدیهی هستند، *ناپایداری دینامیکی* است، به این معنا که مدارهای بیشتر جفتْ نقطه‌های نزدیک به هم، در هر دو سویِ پیش و پسِ زمان، با سرعتِ نمایی از هم دور می‌شوند. انتقال، دوران، ایزومتری [طولپایی]های موضعی، یا نقاط ثابت با ضرایبِ برابر ۱ از ساده‌ترین نمونه‌های رفتار ناهذلولوی هستند. در دههٔ ۱۹۶۰ دو اصطلاح باب شد که در این نوشته بعداً به آنها برخواهیم خورد. یکی *وابرریختی آنوسف*[2] است که بر تمام خمینهٔ M هذلولوی باشند چنین نامیده می‌شوند. دیگری *اصل الف* که نگاشتهایی که بر بخشهای اساسی معینی از خمینهٔ M هذلولوی‌اند واجد اصل الف نامیده می‌شوند. (نیازی به دانستن تعریف دقیق آن نخواهیم داشت.)

1. Hedlund 2. Hopf 3. Sinai 4. Ruelle

1. diffeomorphism 2. Anosov



شکل۱ نگاشت نعل اسب: B یک مربع است. تابع f مربع B را در جهت افقی می‌کشد و در جهت عمودی درهم می‌فشارد و مستطیل حاصل را به شکل یک نعل اسب درمی‌آورد؛ دو نوار سایه‌دار عمودی به نوارهای سایه‌دار افقی نگاشته می‌شوند و مجموعهٔ ناوردای هذلولوی، $\Lambda = \bigcap_{i=-\infty}^{+\infty} f^i(B)$، یک مجموعهٔ کانتور است.

دههٔ ۱۹۷۰، با خود مسائل نو و چشم‌اندازهای نو به همراه آورد. پژوهشگران با کمک گرافیک کامپیوتری روزبه‌روز بیشتر به وجود مثالهایی پی بردند که بر دینامیک آنها انقباض و انبساطهایی حکم‌فرماست ولی شرط نسبتاً محدودکنندهٔ اصل الف را برآورده نمی‌کنند. دو مثال معروفْ جاذبهای لورنتس («پروانه») و نگاشتهای انون[1] هستند. تقریباً هم‌زمان، به دنبال کارهای اُسلدتس[2] و پسین[3]، نوعی از هذلولوی بودن با شرایطی که به‌طور قابل ملاحظه‌ای ضعیفتر بودند سربرآورد. دربارهٔ این موضوع بعداً با تفصیل بیشتر بحث خواهیم کرد، فعلاً کافی است اشاره کنیم که در این نوع ضعیفتر، «انقباض و انبساط در همه‌جا» بر یک مجموعهٔ فشرده، با «انبساط *مجانبی* و انقباض *تقریباً همه‌جا*» جایگزین شده است. چند نتیجهٔ قدیمی در این صورت عمومیتر برقرارمی‌ مانند (مشابه تعمیم قضایایِ دربارهٔ نگاشتهای پیوسته به نگاشتهای اندازه‌پذیر)، و البته پدیده‌های نوی هم کشف شده‌اند. در پرتو این پیشرفتها، آنچه را که پیشتر هذلولوی تعریف کرده بودیم، از این پس *یکنواخت-هذلولوی* می‌نامیم تا آن را از حالت عمومیتر که به تسامحْ *نایکنواخت-هذلولوی* خواهم نامید جدا کرده باشیم.

این نوشته در بارهٔ دستگاههای نایکنواخت-هذلولوی است با تکیهٔ بر نظریهٔ ارگودیک چنین دستگاههایی. مایلم تلاشم را در این دو جهت متمرکز کنم: پروردن یک نظریهٔ عمومی، و کاربرد شگردهای هذلولوی در مثالهای خاص. از هر یک از این دو مسیر، دو نتیجه را به‌عنوان نمونه برگزیده‌ام و در بارهٔ برخی اندیشه‌هایِ نهفته در پس قضایا بحث خواهم کرد. کاربردهایی که برگزیده‌ام عبارت‌اند از: بیلیاردها و جاذبهای انون. در بخش نظریهٔ عمومی، مباحث من (۱) نماهای لیاپانف[4]، آنتروپی، و بُعد؛ و (۲) زوال همبستگی[5] و قضیهٔ حد مرکزی هستند.

اجازه دهید پیش از ادامهٔ کار نگاهی به پیش‌رو بیندازیم. نظریهٔ هذلولوی، از زمان پیدایش مفاهیم آن، در جهات مختلف پیش رفته است؛ نظریهٔ ارگودیک دستگاههای نایکنواخت-هذلولوی یکی از آنهاست، و این همان موضوعی است که من برای نوشتن برگزیده‌ام. از جملهٔ دیگر موضوعات مهم که به آنها نخواهم پرداخت، هذلولویِ بودن پاره‌ای، نظریه‌های انشعاب[6]، دینامیک یک‌بعدی، عمل گروههای حقیقی یا مختلط (تا آنجا که خواص انبساطی مطرح‌اند) و هندسه است. در محدودهٔ نظریهٔ ارگودیک دستگاههای هذلولوی هم، انتخابهایی انجام داده‌ام که به روشنی متمایل به علایق شخصی من هستند، اگرچه امیدوارم نتایجی که عرضه می‌کنم نمونه‌های نامعقولی نباشند.

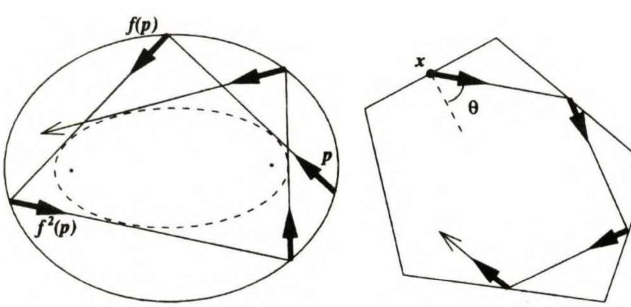
1. Hénon 2. Oseledec 3. Pesin 4. Lyapunov
5. correlation decay 6. bifurcation

بیلیاردها

شارش بیلیاردی، حرکت یک جرم نقطه‌ای است در ناحیه‌ای کراندار چون $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ یا $\Omega \subset \mathbb{T}^2$ که $\partial\Omega$ اجتماع تعدادی متناهی خم هموار باشد. نقطهٔ موردنظر با سرعت واحد حرکت می‌کند و مطابق قانونهای عادی بازتاب، از $\partial\Omega$ بازتابیده می‌شود [برمی‌گردد]، یعنی زاویهٔ تابش [برخورد] و زاویهٔ بازتاب [بازگشت] با هم برابرند. برای این شارش یک مقطع طبیعی وجود دارد که با رویهٔ $M = \partial\Omega \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ مشخص می‌شود و متناظر با برخورد با $\partial\Omega$ است. مناسب است $p = (x, \theta) \in M$ را به‌صورت پیکانی در نظر آوریم که پایه‌اش در $x \in \partial\Omega$ است و با بردار قائم بر سطح که به درون Ω اشاره می‌کند، زاویهٔ θ می‌سازد (شکل ۲). نگاشت پوانکاره یا نگاشت بازگشت اول از این قطعه به خودش را، که با f نمایش می‌دهیم، نگاشت بیلیارد برای ناحیهٔ Ω می‌نامیم. تحقیق اینکه f، اندازهٔ احتمال $\mu = c\cos\theta dx\, d\theta$ را حفظ می‌کند (در اینجا c چنان برگزیده شده است که $\mu(M) = 1$)، یعنی برای هر زیرمجموعهٔ بورلْ اندازه‌پذیر $E \subset M$ داریم $\mu(f^{-1}(E)) = \mu(E)$، سرراست است.

همهٔ بیلیاردها خواص هذلولوی ندارند. مثلاً به‌عنوان تمرین می‌توان دید در حالتی‌که Ω یک بیضی باشد، پوش هر مسیر (نامتناهی) یک گوی بیلیارد، خود یک بیضی یا هذلولی با همان کانونهای Ω است (شکل ۲ الف). پس می‌توان چنین تصور کرد که M با خمهای سادهٔ بسته و ناوردای چپ تحت عمل f برگ‌بندی شده است که f، نقطه‌ها را در هر چنین خمی «می‌گرداند». چنین دینامیکی، *شبه‌متناوب* نامیده می‌شود و سرشتی بسیار متفاوت با دینامیک هذلولوی دارد. در حالتی که ناحیهٔ Ω چندضلعی باشد (شکل ۲ ب)، به سادگی دیده می‌شود که f فاصله‌ها را منقبض یا منبسط نمی‌کند.

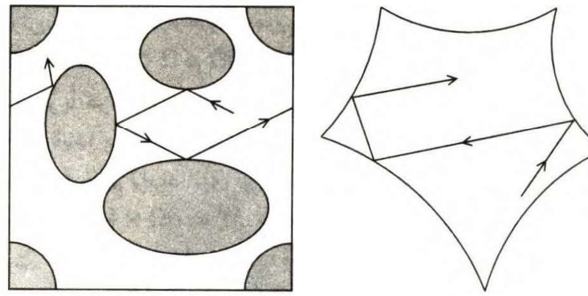
سینایی نخستین کسی بود که بیلیاردهای دارای خواص هذلولوی را به دقت مورد بررسی قرار داد. او در [S2] به مطالعهٔ بیلیاردهای پراکننده[1] در حالتی پرداخت که $\partial\Omega$ اجتماع تعدادی متناهی قطعهٔ «مقعر» باشد. (آن دسته از خمهای مرزی که مرکز انحنای آنها در هر نقطه در خارج ناحیهٔ Ω قرار می‌گیرد، مرز مقعر نامیده می‌شوند). دو نمونهٔ استاندارد از این‌گونه بیلیاردها عبارت‌اند از: بیلیاردها روی ۲-چنبره با تعدادی متناهی «مانع» که از نواحی محدب مجزا تشکیل شده‌اند (شکل ۳ الف) و دیگر، آن دسته از بیلیاردها که از نواحی مسطح تشکیل شده‌اند. مانند آنچه در شکل ۳ ب نشان داده شده است.



(الف) (ب)

شکل۲ نمونه‌هایی از بیلیاردهای ناهذلولوی

1. dispersing

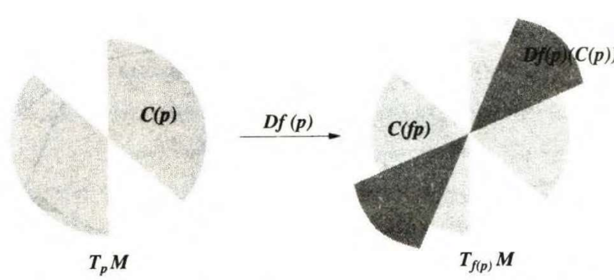


(الف) (ب)

شکل۳ بیلیاردهای پراکننده

بیایید ببینیم چرا نگاشتهای بیلیاردِ وابسته به بیلیاردهای پراکننده خواص هذلولوی دارند. هر بردار مماس بر خمینه در نقطهٔ $p \in M$ را می‌توان با خمی در M نمایش داد که آن را هم می‌توان به‌صورت خانواده‌ای پارامتری شده از پیکانها شامل پیکان وابسته به p تصور کرد. میان خانواده‌های *همگرا* و *واگرای* بردارها تفاوت قائل می‌شویم و توجه می‌کنیم که خانواده‌های واگرا به یک قطاع یا یک *مخروط* در فضای مماس بر M در نقطهٔ p نظیر می‌شوند. از آنجا که خانواده‌های شعاعهای واگرا پس از بازتابیدن از یک سطح مرزی مقعر حتی واگراتر می‌شوند (شکل ۵ الف را ببینید)، مشاهده می‌کنیم که Df، مخروط نظیر شعاعهای واگرا در p را اکیداً به توی مخروط مشابه در نقطهٔ $f(p)$ می‌نگارد (شکل ۴ را ببینید). یافتن خانواده‌ای پیوسته از مخروطها در فضای مماس که توسط Df اکیداً به توی خودشان نگاشته می‌شوند، راهی استاندارد برای اثبات یکنواخت‌ـهذلولوی بودن است: این کار نشان می‌دهد که دست‌کم به‌صورت تصویری، Df مانند یک نگاشت خطی هذلولوی رفتار می‌کند.

چند کلمه‌ای از باب احتیاط در اینجا مناسب به نظر می‌آید. نخست اینکه نگاشتهای بیلیاردی مانند آنها که در شکل ۳ الف آمده‌اند، *ناپیوسته‌اند*. مسیر یک جرم نقطه‌ای را که با $\partial\Omega$ در وضعیت مماس برخورد می‌کند در نظر بگیرید. مسیرهایی که به فاصلهٔ کمی از این مسیر در راست یا چپ آن قرار دارند، به مؤلفه‌های متفاوتی از $\partial\Omega$ خواهند رفت (شکل ۵ ب را ببینید). چنین خواصی باعث می‌شوند که نگاشتهای بیلیارد بسیار پیچیده‌تر



شکل۴ ، $Df(p)$ مخروط $C(p)$ در فضای مماس در p را به $C(f(p))$، که مخروطی در فضای مماس در $f(p)$ است، می‌نگارد. راهی متعارف برای اثبات هذلولوی بودن، تعیین خانواده‌ای از مخروطهای ناورداست.

از وابرریختی‌های آنوسف باشند.

دستاوردی مهم در مطالعهٔ بیلیاردها قضیهٔ زیر است از سینایی، که می‌توان به آن به چشم تکیه‌گاه حدس ارگودیکِ بولتسمان نگریست، که خود بخشی از زیربنای مکانیک آماری است.

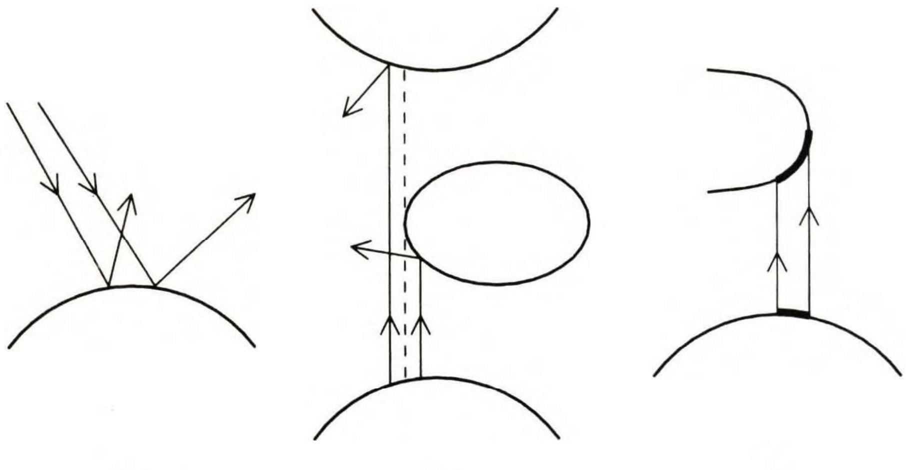
قضیه[S۲]. *بیلیاردهای پراکننده، ارگودیک هستند.*

ارگودیک بودن برای یک تبدیل اندازه نگه‌دار این معنا را دارد که هیچ مجموعهٔ ناوردای دارایِ اندازهٔ میانی وجود ندارد. اثبات قضیهٔ سینایی پیچیده‌تر از آن است که در اینجا آورده شود، ولی دوست دارم ایدهٔ اثبات را با این فرض که خمهای ناپیوستگی وجود ندارند توضیح بدهم، و نشان دهم که وجود آنها چه مشکلاتی پدید می‌آورد.

فرض کنید نگاشت f، آنوسف باشد، یعنی یکنواخت‌ـهذلولوی (بدون ناپیوستگی) بر تمام خمینه، و فرض کنید f، اندازهٔ احتمال μ را که باعنصر حجم هم‌ارز است، حفظ کند. بنا بر قضیهٔ ارگودیکِ برکاف می‌دانیم که برای هر تابع L^1ـانتگرال‌پذیر مانند φ، میانگینهای مسیری، یعنی $\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\varphi\circ f^i$، با اندازهٔ μ تقریباً همه جا، [یا μـت.ه.]، همگرا هستند و حد آنها هم برابر است با $\int\varphi d\mu$، اگر (f,μ) ارگودیک باشد. پس برای اثبات ارگودیک بودن کافی است بررسی کنیم که این توابع حدی تقریباً همه جا ثابت‌اند؛ و در حقیقت کافی است این کار را تنها برای φهای پیوسته انجام دهیم. اثبات ما بر ایده‌ای از هوپف استوار است و از این حقیقت سود می‌برد که برای یک وابرریختی آنوسف می‌توان جهات منقبض‌شونده و منبسط‌شونده را به شکل یک جفت برگ‌بندی ناوردا جمع‌آوری کرد. برگهای این دو برگ‌بندی، خمینه‌های *پایدار* و *ناپایدار* نامیده می‌شوند. حال برای دو نقطهٔ x، y که روی یک خمینهٔ پایدار قرار دارند، از آنجا که وقتی $n\to\infty$ داریم $d(f^nx, f^ny)\to 0$، میانگینهای مسیری آنها باید به یک حد میل کنند. همین استدلال با طی‌کردن زمان در جهت رو به عقب نتیجه‌ای مشابه در بارهٔ نقاط روی خمینهٔ ناپایدار به‌دست می‌دهد. از آنجا که خمینه‌های پایدار و ناپایدار (دست‌کم به‌صورت توپولوژیک) دستگاه مختصات دکارتی می‌سازند، به نظر می‌رسد که باید بلافاصله نتیجه شود که تابع حدی، که هم بر خمینهٔ پایدار و هم بر خمینهٔ ناپایدار ثابت است، موضعاً ثابت خواهد بود. ولی اعتبار این استدلال درواقع بر پیوستگی *مطلق* برگ‌بندی متکی است، خاصیتی بسیار ظریف که می‌گوید نگاشتهای هولونومی[1] این برگ‌بندی‌ها، مجموعه‌های با اندازهٔ لبگ صفر را به مجموعه‌های *متقاطع* با مجموعه‌های با اندازهٔ لبگ صفر می‌برند. این حقیقتی است که اگر f، تابعی C^2 باشد، برگ‌بندی‌های پایدار و ناپایدارِ وابرریختی‌های آنوسف مطلقاً پیوسته‌اند و به این ترتیب خاصیت «ارگودیک بودن موضعی»، ثابت می‌شود. اثبات این مطلب که حد میانگینهای مسیری تقریباً همه جا ثابت است به بحثی جداگانه نیاز دارد که از آن می‌گذریم.

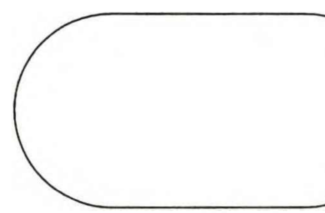
باز می‌گردیم به نگاشتهای بیلیارد. خمهای ناپیوستگیْ خمهای پایدار و ناپایدار را «قطعه‌قطعه می‌کنند»، به‌طوری که بعضی از آنها تا هر اندازهٔ دلخواه کوتاه می‌شوند. این اتفاقْ ساختار حاصلضرب موضعی را که در اثبات ما برای ارگودیک بودن موضعی در بند پیشین، اساسی بود، خراب می‌کند. برای غلبه بر این مشکل کارهای زیادی باید انجام گیرد.

1. holonomy



(الف) (ب) (پ)

شکل۵ خواص بیلیاردهای پراکننده



شکل۶ استادیوم

یادآوری می‌کنیم که علاوه بر ارگودیک بودن، خواص آماری ظریفتر بیلیاردها را سینایی، بونیموویچ، چرنف و دیگران بررسی کرده‌اند (مثلاً [BSC] را ببینید). در این نوشته بعداً به بعضی از این خواص باز خواهیم گشت.

ازمثالهای بالا دیدیم که هندسهٔ Ω به شدت بر خواص دینامیکی نگاشت بیلیارد اثر می‌گذارد. با این حال، چنین نیست که رفتار هذلولوی محدود به مرزهای مقعر باشد. مرزهای محدب هم، مانند *استادیوم* (شکل ۶ را ببینید) که بونیموویچ بررسی کرده است، می‌توانند تحت شرایط خاصی باعث هذلولوی بودن باشند. این حقیقت از آنجا ناشی می‌شود که اگرچه شعاعهای تقریباً موازی پس از بازتاب در آغاز همگرا می‌شوند، پس از کانونی‌شدن دوباره واگرا می‌شوند و اگر پیش از برخورد بعدی، این شعاعها بیش از آن اندازه که همگرا شده بودند، واگرا شوند، پراکندگی لازم برای نگاشت بیلیارد نتیجه می‌شود.

درواقع می‌توان ثابت کرد که نگاشت بیلیارد وابسته به استادیوم، تقریباً همه جا رفتارهای زین‌گونهٔ ضعیفی دارد. این وضعیت را *نمای ناصفر لیاپانف* خواهیم نامید. اگر بخواهیم دقیقتر صحبت کنیم، این به آن معناست که تقریباً همه جا روی M تجزیه‌ای از فضای مماس به دو جهت ناوردای E^u و E^s موجود است چنان‌که برای هر $\nu \in E^u$، $\lambda > 0$ای هست که وقتی $n \to \infty$، داریم $|Df^n\nu| \sim e^{n\lambda}$. و همین شرط برای $\nu \in E^s$ ولی با $\lambda < 0$ برقرار است. توجه کنید که در اینجا هذلولوی بودن بسیار نایکنواخت است: مثلاً مسیرهایی که تقریباً بر دو کنارهٔ مستقیم عمودند، زمان زیادی بی‌آنکه واگرا شوند مرتباً بالا و پایین می‌پرند و در این زمان $\nu \in E^u$ رشد نمی‌کند. شرایط هندسی بر نواحی بیلیارد Ω که باعث نماهای ناصفر لیاپانف می‌شوند، در [W] مدون شده‌اند.

سرانجام یادآوری می‌کنیم که بیلیاردها به یک معنی مدلهای با بعد پایین از برهم‌کنش تعداد زیادی گوی سخت مثلاً در فضای دوبعدی هستند. برای ملاحظهٔ شرحی از اطلاعات موجود در بارهٔ این دستگاهها، خواننده را به [Sz] ارجاع می‌دهیم و این بخش را با گزارشی از آخرین پیشرفتها به پایان می‌بریم: به تازگی سیمانی[1] و سس[2] اثبات این موضوع را اعلام کرده‌اند که بی‌هیچ محدودیتی بر تعداد گویها، دستگاههای شاملِ تعداد متناهی گوی در چنبره‌ای با توزیع نوعی جرم، نماهایِ لیاپانفِ ناصفر دارند.

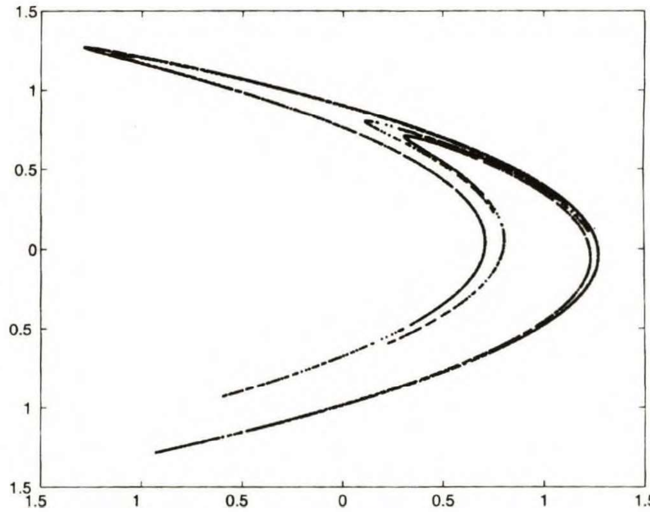
جاذبهای انون

نگاشتهای انون خانواده‌ای دو پارامتری از وابریختی‌های صفحه هستند که با دستور زیر داده می‌شوند

$$T_{a,b}(x,y) = (1 - ax^2 + y, bx)$$

می‌دانیم برای محدوده‌های خاصی از پارامترهای a, b، نگاشت $T_{a,b}$ جاذب دارد. *جاذب* یا *رباینده*، مجموعه‌ای ناوردا چون Ω است با این ویژگی که تمام مدارهای نزدیک به خود را جذب می‌کند: یعنی مثلاً برای هر نقطهٔ آغازی z در نزدیکی Ω، مدار z در طول زمان به سوی Ω کشیده خواهد شد. این معادلات را برای نخستین بار اخترشناسی به نام انون در سال ۱۹۷۷ به‌صورت عددی بررسی کرد و دریافت که این نگاشتها جاذبهایی با دینامیکی بسیار پیچیده دارند. در سالهای پایانی دههٔ هفتاد و سالهای آغازین دهه هشتاد، مطالعات عددی زیادی روی این معادلات انجام شد ولی تقریباً تا همین اواخر نمی‌شد با روشهای تحلیلی به چنین مسائلی پرداخت. در اینجا قصد داریم به این دو پرسش بپردازیم: (۱) آیا جاذبهای انون *آشوبناک*‌اند؟ و اصولاً منظور

1. Simányi 2. Szász



شکل ۷ نمودار کامپیوتری مداری به طول ۵۰۰۰ برای نگاشت $(x,y)\to(1-1.4x^2+0.3y,\, x)$ است. نگاشت اصلی را انون بررسی کرده است. به نظر نمی‌رسد نمای کلی تصویر به انتخاب شرط اولیه، مادام که از ناحیه‌های خاصی در صفحه انتخاب شود، بستگی داشته باشد. این تصویر خاص با به‌کار بردن شرط اولیهٔ $(x,y)=(0,0)$ به‌وجود آمده است.

ما از «آشوبناک» چیست؟ (۲) طرحهای کامپیوتری مانند شکل ۷ دقیقاً چه چیزی را نشان می‌دهند؟ هر دو پرسش (۱) و (۲) پرسشهایی عمومی هستند که به هیچ روی ویژهٔ نگاشتهای انون نیستند، ولی ما این خانواده را به‌کار می‌بریم تا عوامل پشت پرده را آشکار کنیم. برای روشنی مطلب، تنها نگاشتهای نظیر مقدارهای پارامتر $a<2$ و نزدیک به ۲ و bی بسیار کوچک را بررسی می‌کنیم. اینها همان مقدارهای پارامتر هستند که بندیکس و کارلسون بررسیشان کردند و بخش بسیار کوچکی از مقدارهای پارامتر را که وجود جاذب برای آنها دانسته شده است تشکیل می‌دهند.

کار را با بیان چند حقیقت سادهٔ هندسی آغاز می‌کنیم. (a,b) را تثبیت می‌کنیم و قرار می‌دهیم $T=T_{a,b}$. از معادلات T به‌سادگی نتیجه می‌شود که T خطوط عمودی را به خطوط افقی می‌فرستد و خطهای افقی را به سهمیها (شکل ۸ را ببینید). همچنین ملاحظه کنید که T، نواحی را به‌شدت درهم می‌کشد ومنقبض می‌کند زیرا $b=|\det DT|$. نشان دادن اینکه دور از محور y، مثلاً در بیرون ناحیهٔ $\{|x|<\sqrt{b}\}$، دینامیک دستگاه اصولاً یکنواخت‌ـهذلولوی و زینی است، دشوار نیست: DT بردارهای مماس تقریباً افقی را به بردارهای تقریباً افقی می‌نگارد و پس از مدتی آنها به‌طور نمایی رشد می‌کنند. در برابر، قطاعهای افقی نزدیک محور y به پیچهای سهمیها نگاشته می‌شوند. بنابراین هنگامی که مداری نزدیک محور y می‌شود، جهات انقباض و انبساط ممکن است درهم بیامیزند و هذلولوی بودن از میان برود.

حکم ابتدایی دیگری این است که T مجموعه‌ای ناوردای فشرده چون Ω دارد که در نزدیکی $[-1,1]\times\{0\}$ واقع است؛ جاذب‌بودن Ω به این معنی است که مجموعه‌ای باز چون $U\subset\mathbb{R}^2$ شامل آن وجود دارد با این ویژگی که برای هر $z\in U$، هنگامی که n به بینهایت میل می‌کند داشته باشیم: $d(T^n(z),\Omega)\to 0$. مجموعهٔ ماکسیمال با این ویژگی، *پهنهٔ جذب* Ω نامیده می‌شود؛ این مجموعه، مجموعه‌ای باز و نسبتاً بزرگ است، در حالی که Ω، که مجموعهٔ ناوردای فشردهٔ یک نگاشت منقبض‌کنندهٔ سطح است، اندازه لبگ صفر دارد. دشوار نیست که ثابت کنیم Ω یکنواخت‌ـهذلولوی یا جاذب اصل الف نیست.

اکنون دینامیک روی Ω را در نظر بگیرید. دو سناریوی متفاوت امکان‌پذیر است. در اولی، بیشتر مدارها نهایتاً جذب دورهای متناوب، که آنها را *چاهکهای متناوب* می‌نامیم، می‌شوند. برای اینکه ببینیم چرا این حالت ممکن است پیش بیاید، به یاد بیاورید که $|\det DT|$ بسیار کوچک است. اگر برای بعضی zها، $T^n z$ به z نزدیک شود و $DT^n(z)$ در همهٔ راستاها درهم کشنده باشد، آنگاه قضیهٔ نگاشت انقباضیْ چاهک متناوبی با دورهٔ تناوب n ارائه می‌کند. چندی پیش نیوهاوس دریافت که این حالت در نزدیکی نقاط تماس خمینه‌های پایدار و ناپایدار پیش می‌آید. در حقیقت، او نشان داد که، تحت شرایط خاصی، باید انتظار یافتن بینهایت چاهک را داشت [N].

سناریوی دوم به این ترتیب است که دینامیک روی Ω غالباً هذلولویِ زینی است و ناپایداری دینامیکیِ حاصل، باعث تصویری تقریباً «آشوبناک» خواهد شد. («آشوبناک» را به‌صورت واژه‌ای توصیفی به‌کار برده‌ایم. تا آنجاکه می‌دانم، این واژه هیچ تعریف ریاضی مقبولی ندارد.) استدلال به این صورت است: اگر b کوچک باشد، نوار $\{|x|\le\sqrt{b}\}$ بسیار باریک خواهد بود، و می‌توان انتظار داشت که، وقتی نگاشت یکنواخت‌ـهذلولویِ زین‌گونه است، مدار نقطهٔ دلخواه z بیشتر اوقات خارج از این نوار باشد. حال بیایید این ساده‌اندیشی را که تصور کنیم یکی دو بار برخورد با ناحیهٔ $\{|x|<\sqrt{b}\}$ در زمان طولانی، هیچ آسیبی نخواهد رساند، به‌کناری بگذاریم: مثلاً برای ماتریسهای A_0، A_1، ...، A_{2N} در زیر، حاصلضرب ماتریسی $A_{2N}\ldots A_1A_0$ را در نظر بگیرید

$$i\neq N\ :\ A_i=\begin{pmatrix}2&0\\0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\qquad ,A_N=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$$

اگرچه چندان هم نامعقول نیست اگر بپنداریم که با وجود اینکه چنین حذفهایی ممکن است پیش بیایند، و به واقع هم تا حدی برای نگاشتهای انون پیش می‌آیند، بعید است اثراتی چنان شدید داشته باشند که هیچ رشد نمایی در $\|DT^n\|$ باقی نماند.

برای بیشتر مقدارهای پارامترهای (a,b)، دانسته نیست که به‌واقع کدام داستان پیش می‌آید. همین‌طور، معلوم نیست که نتوانند هر دو درکنار هم در بخشهای مختلف Ω وجود داشته باشند؛ درواقع، تصویرْ بسیار پیچیده است. می‌دانیم که برای مجموعه‌ای باز از پارامترها، چاهک وجود دارد. نتایج عددی و همچنین استدلالهای شهودی در محدوده‌های خاصی از مقدارهای پارامتر، طرح «آشوبناک» را تأیید می‌کنند. در سال ۱۹۹۱، بندیکس و کارلسون مقاله‌ای یک صد صفحه‌ای منتشر کردند [BC] که در آن ثابت کرده بودند مجموعه‌ای با اندازهٔ مثبت از پارامترها وجود دارد که برای آن مقادیر پارامترها، سناریوی «آشوبناک» پیروز می‌شود. در [BC] طرحی برای پیگیری مشتقهای تکرری، یعنی DT^n، اندیشیده شده و نشان داده شده است که $\|DT^n\|$ برای نقاط زیادی از جاذب، به‌صورت نمایی رشد می‌کند. این دستاوردی قابل ملاحظه در دینامیک هذلولوی بود، زیرا اگرچه این موضوع تنها برای نگاشتهای انون

کاملاً بررسی شده است، قابلیت به کار رفتن در جاهای دیگر را هم دارد. حتی طرح کلی آن بسیار دشوارتر از آن است که بتوان در اینجا توضیح داد، اما مایلم صورتی بسیار ساده شده از آن را، یعنی حالت $b = 0$، که نظیر نگاشت یک بعدی، $f_a(x) = 1 - ax^2$، $x \in [-1, 1]$ است، ارائه دهم.

فرض کنید می‌خواهیم ثابت کنیم که برای هر نقطه در $[-1, 1]$، رشد $|(f^n)'|$ به‌صورت نمایی است. روشن است که تنها مشکل ما در اینجا نقطهٔ بحرانی صفر است. وقتی مداری به صفر نزدیک می‌شود، مشتق تکرری آن نزولی فاحش می‌یابد. ایده‌ای پرثمر که آن را برای نخستین بار کُله[1] و اِکمان[2] به‌کار بردند این است که شرطی از نوع $|(f^n)'(f(0))| \geq \lambda^n$ را برای یک $\lambda > 1$ قرار دهیم. این شرط با قدری کنترل روی سرعتی که مدارهای بحرانی مجاز باشند به صفر نزدیک شوند، به‌سادگی منجر به تخمینهای زیر می‌شود: برای xهای نزدیک به صفر، داریم: $|f'(x)| \sim |x|$ و $|f(x) - f(0)| \sim x^2$. پس اگر n چنان باشد که $\lambda^n x^2 \sim 1$، مدار $f(x)$ برای nبار در نزدیکی مدار $f(0)$ باقی خواهد ماند. بنابراین داریم: $|(f^{n+1})'x| \sim |x|\lambda^n \sim |x|^{-1} \sim \lambda^{n/2}$ و اثر ناچیزبودن مشتق در x، پس از nبار عمل دادن پیاپی تابع کاملاً جبران می‌شود. نشان داده شده است که برای مجموعه‌ای با اندازهٔ مثبت از مقادیر پارامتر a، این شرط برقرار است. طرح بندیکس و کارلسون هم مشابه همین است، اما برای کنترل کردن پیچیدگی باید هم طولها و هم زاویه‌ها را به حساب آورد و این‌کار در گذر از بعد ۱ به ۲ کاملاً اساسی است.

اکنون به پرسش دوم می‌پردازیم. راهی استاندارد برای ساختن یک تصویر کامپیوتری از جاذب انون این است که یک مقدار اولیه را در پهنهٔ جذب آن برگزینیم و چند هزار نقطهٔ آغازین مدار آن تحت تأثیر متوالی نگاشت را مشخص کنیم. (مقدار اولیه معمولاً از پهنهٔ جذب برگزیده می‌شود و نه لزوماً از خود جاذب، زیرا، همان‌طور که بعداً باز به آن خواهیم پرداخت، مجموعهٔ Ω مجموعه‌ای صفر-اندازه است و دانستن اینکه دقیقاً چه نقاطی در آن قرار می‌گیرند دشوار است.) از آنجا که مدار ترسیم‌شده به جاذب میل می‌کند، معمولاً فرض می‌کنند که مدار حاصل، «تصویری» از جاذب است (شکل ۷ را ببینید). این فرض طبیعتاً به این سؤال منجر می‌شود: می‌دانیم که مدارهای نگاشت انون همگی یکسان نیستند؛ بعضی تناوبی‌اند، بعضی نیستند؛ بعضی از آنها بیشتر از بقیه به پیچها نزدیک می‌شوند. همچنین از تجربه می‌دانیم که (برای یک Tی ثابت) مستقل از گزینش شرط آغازی، اصولاً همین تصویر به‌دست می‌آید. آیا توضیحی ریاضی برای این مطلب وجود دارد؟

وانمود نمی‌کنیم که برای این پرسش بسیار مهم و کنجکاوی برانگیز، پاسخی داریم. ولی، آن را به‌کار می‌بریم تا اندیشهٔ نهفته در پس *اندازهٔ سینایی-روئل-بوئن*[3] یا *اندازه* SRB را تشریح کنیم. می‌توان تصویر کامپیوتری ما را تصویر یک اندازهٔ احتمال پنداشت که، در مداری به طول n، به هر نقطهٔ جرم $\frac{1}{n}$ نسبت می‌دهد. فرض کنید جرم نقطه‌ای در z را با δ_z نمایش می‌دهیم. اگر اندازه‌ای مانند μ وجود داشته باشد که برای «بیشتر» انتخابهای شرایط اولیهٔ z، داشته باشیم $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1} \delta_{T^i z} \to \mu$، نشان داده‌ایم که چرا تصویرهای ما نهایتاً شبیه به هم به نظر می‌رسند. حال، این اندازه، μ، اگر وجود داشته باشد، باید خصوصیت بسیار ویژهٔ زیر را داشته باشد: مانند هر

1. Collet 2. Eckmann 3. Sinai-Ruelle-Bowen

اندازه احتمال ناوردایی، باید تکیه‌گاه آن در Ω قرار گیرد، ولی به نوعی μ این توانایی را دارد که بر مدارهایی که از نقاط مختلف پهنهٔ جذب آغاز می‌شوند، از جمله نقاطی که از تکیه‌گاه μ بسیار دور هستند، اثر بگذرد.

برای آن مقدارهایی از پارامتر که بندیکس و کارلسون بررسی کردند، این اندازهٔ احتمال ناوردای بسیار ویژه، درواقع وجود دارد. به یاد بیاورید که وجود یک نمای مثبت لیاپانف در z این معنی را می‌دهد که $|DT^n(z)v|$ برای برداری مانند v، هنگامی که n به بینهایت می‌گراید، به‌صورت نمایی رشد می‌کند.

قضیه [BY]. *برای مجموعه‌ای با اندازهٔ لبگ مثبت از پارامترهای (a, b)، نگاشت انون $T = T_{a,b}$ اندازهٔ احتمال ناوردایی چون μ بر جاذب آن، Ω، با خواص زیر می‌پذیرد:*

الف. *f در μ-ت.هـ. [یعنی تقریباً همه جا با اندازهٔ μ] یک نمای لیاپانف مثبت دارد.*

ب. *برای zهای واقع در یک مجموعه با اندازهٔ لبگ مثبت در پهنهٔ جذب Ω، دنبالهٔ $\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \delta_{T^i z}$، وقتی $n \to \infty$، به‌طور ضعیف به μ می‌گراید.*

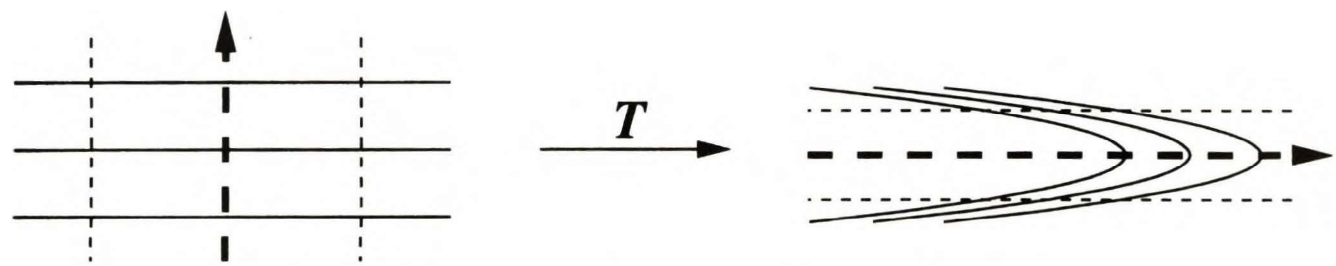
اندازه‌ای مانند اندازهٔ μ در قضیهٔ بالا، یک اندازهٔ SRB نامیده می‌شود. اندازه‌های SRB را نخستین بار سینایی، روئل، و بوئن در جریان بررسی وابریختی‌های آنوسف و جاذبهای اصل الف کشف کردند (مثلاً [B] را ببینید). در بارهٔ وجود آنها در خارج از حوزهٔ برقراری اصل الف چیز زیادی دانسته نیست. جاذبهای انون نخستین مثالهای نایکنواخت-هذلولوی‌ای بودند که وجود اندازه‌های SRB برای آنها نشان داده شده است: چنین اندازه‌هایی را بندیکس و نویسنده ساخته‌اند. به‌تازگی بندیکس و ویانا[1] اعلام کرده‌اند که نتیجهٔ (ب) را به تقریباً همهٔ نقاط پهنهٔ جذب گسترش داده‌اند.

ما در این بخش با به‌کاربردن خانوادهٔ انون به‌عنوان یک نمونه، ایده‌هایی چند معرفی کردیم که در شناخت ما از جاذبها [ربایندها]ی غریب پیشرفته‌ترین مفاهیم هستند. نخست اینکه وجود یک جاذب، به خودی خود، نوعی ناپایداری القا می‌کند، زیرا مجموعهٔ بزرگی از نقاط (مانند پهنهٔ جذب) به سوی آنچه که معمولاً مجموعه‌ای بسیار کوچک است (مثلاً جاذب) کشیده می‌شود. اما هنگامی که دو مسیر مجاور، از پهنه به جاذب نزدیک می‌شوند، ممکن است به سرعت واگرا شوند. دلیل این پدیده، ناپایداری دینامیکی یا آشوب در جاذب است، ولی ناپایداری دینامیکی لزوماً فقدان رفتار منسجم را نتیجه نمی‌دهد، زیرا اگر یک اندازهٔ SRB وجود داشته باشد، آنگاه، در زمان طولانی، تمامی مدارهای مشاهده‌پذیر رفتار آماری یکسان خواهند داشت، یعنی اینکه با بسامدهایی که از این اندازهٔ ناوردا تبعیت می‌کنند، به نقاط مختلف جاذب نزدیک خواهند شد.

نماهای لیاپانف، آنتروپی، و بُعد

اکنون به نظریهٔ عمومی می‌پردازیم. برای ایجاد انگیزه، در این بخش نخست راهی ساده‌انگارانه برای ساختن فرکتال [برخال] از یک الگوی واحد را بررسی می‌کنیم. شکل ۹ الف الگویی را نشان می‌دهد که از یک گوی بزرگتر و سه گوی کوچکتر در درون آن تشکیل شده است. در شکل ۹ ب، در هر یک از گویهای کوچک، نسخه‌ای از این الگو با مقیاس کوچکتر را قرار داده‌ایم و نه گوی

1. Viana



شکل۸ هندسهٔ نگاشتهای انون: خطهای قائم به خطهای افقی نگاشته می‌شوند و خطهای افقی به سهمیها.

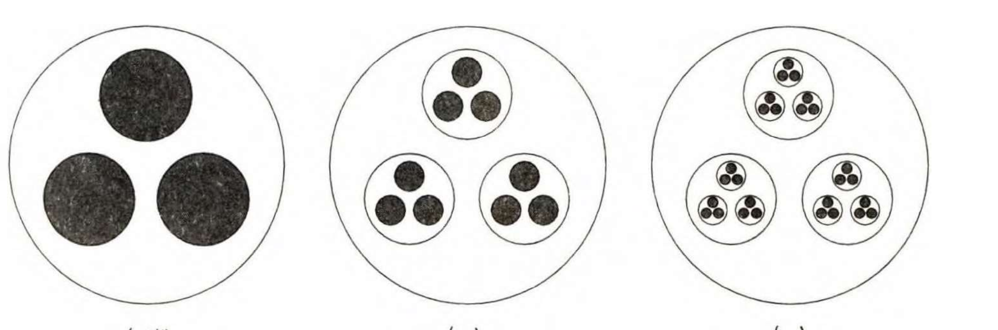
تازه ساخته‌ایم که یک مرتبه کوچکترند. این فرایند در شکل ۹ پ، بر هر یک از این نه گوی تکرار شده است. با ادامه دادن این کار تا بینهایت و اشتراک گرفتن، فرکتالی چون Λ به‌دست می‌آوریم که چیزی نیست جز یک مجموعهٔ کانتور.

همهٔ این حرفها رامی‌توان با زبان دستگاههای دینامیکی هم گفت و گوی بزرگ در الگو را B نامید و گویهای کوچکتر را B_i. فرض کنید $f:\cup B_i \to B$ چنان باشد که هر B_i را به‌صورت مستوی بر B بنگارد و قرار دهید $\Lambda = \bigcap_{n=0}^{\infty} f^{-n}(\cup B_i)$. طبیعی است که تلاش کنیم بعد فرکتالی Λ را به مشخصه‌های دستگاه دینامیکی پدیدآورندهٔ آن مربوط کنیم. برای سادگی فرض کنید همهٔ B_iها شعاع یکسان دارند. قرار دهید $\lambda := \log(\frac{r(B)}{r(B_i)})$ [$r(x)$ یعنی شعاع گوی x] و همچنین قرار دهید $h := \log \#(B_i)$. برای فهمیدن رابطهٔ میان h، λ، و δ (بعد هاوسدُرف Λ)، یکی از این اعداد را تثبیت می‌کنیم، دیگری را تغییر می‌دهیم و اثرات آن بر سومی را بررسی می‌کنیم. چنین چیزی در شکل ۱۰ نشان داده شده است. با توجه به شکلهای ۱۰الف و ۱۰ب، به‌طور شهودی به نظر واضح می‌آید که اگر با ثابت نگاه داشتن h، مقدار λ را کم کنیم، از δ هم کاسته خواهد شد؛ همین‌طور شکلهای ۱۰ب و ۱۰پ باید ما را متقاعد کرده باشند که اگر، با ثابت نگاه داشتن λ، h را زیاد کنیم، بر δ افزوده خواهد شد.

برای اینکه این مشاهدات را در قالب قضیه‌ای درآوریم که برای همهٔ وابریختی‌ها (که مشتق آنها از نقطه‌ای به نقطه دیگر تغییر می‌کند) درست باشد، یک امکانْ بررسی مقادیر میانگین است. این کار به معرفی یک اندازهٔ ناوردا منجر می‌شود. در باقی‌ماندهٔ این بخش، جفت (f,μ) را در نظر می‌گیریم که f یک وابریختی C^2 از یک خمینهٔ ریمانی فشرده مانند M است و μ یک اندازهٔ احتمال بورل ناوردا تحت f بر M.

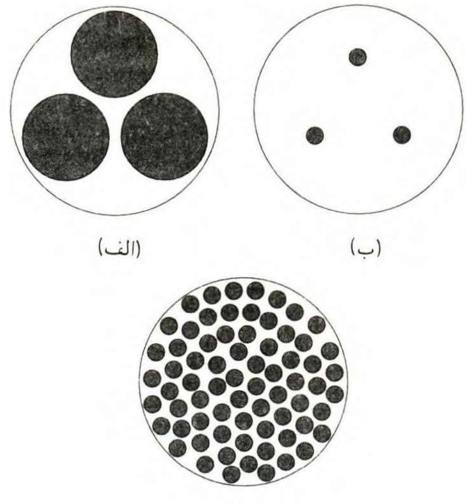
پیشتر با ایدهٔ نمای لیاپانف روبه‌رو شده‌ایم. آنچه در پی خواهد آمد، بررسی روشمندتری از آن است. اگر ν بردار مماسی در x باشد، به عدد $\lambda = \lambda(x,\nu)$ *نمای لیاپانف* در x در جهت ν می‌گوییم اگر وقتی $n \to \infty$، داشته باشیم: $|Df^n(x)\nu| \sim e^{\lambda n}$. صورتی ماتریسی از قضیهٔ ارگودیک، منسوب به اُسلدتس، موجود است که به ما می‌گوید که $\lambda(x,\nu)$ برای هر ν در μـت.هـ. x، خوش‌تعریف است. در حقیقت، در μـت.هـ. x، تجزیه‌ای از فضای مماس به جمع مستقیم زیرفضاهایی چون $E_1(x)\oplus\ldots\oplus E_r(x)$ موجود است با این ویژگی که $\lambda(x,\nu)$ برای هر ν در $E_i(x)$ ثابت است؛ این مقدار مشترک $\lambda(x,\nu)$ را با $\lambda_i(x)$ نمایش می‌دهیم. تجزیه به $\oplus E_i(x)$، به یک معنا تعمیمی است از تجزیه به فضاهای ویژه برای یک نگاشت خطی. می‌توان به‌سادگی دید که $\lambda_i(x) = \lambda_i(fx)$، پس، اگر (f,μ) ارگودیک باشد، این اعداد μـت.هـ. ثابت هستند وکلیهٔ اطلاعات راجع به خواص مجانبی Df^n را می‌توان در تعدادی متناهی عدد $\lambda_1 > \lambda_2 > \ldots > \lambda_r$ ریخت که به ترتیب دارای چندگانگی m_1، ...، m_r هستند، $m_i = \dim E_i$.

برگرداندن این نظریهٔ خطی به نظریه‌ای غیرخطی که عمل f را در همسایگیهای مسیرهای نوعی توصیف می‌کند، به‌دست پسین انجام شد. او، علاوه بر دیگر چیزها، این را هم ثابت کرد که در μـت.هـ. x، خمینهٔ *ناپایداری* وجود دارد که از x می‌گذرد. این خمینه، که با $W^u(x)$ نشانش خواهیم داد، در x بر $E^u(x)$ مماس است [$E^u(x) := \oplus_{\lambda_i>0} E_i(x)$] و با این شرط مشخص



(الف) (ب) (پ)

شکل۹ ساختن فرکتال از یک الگوی اولیه.



(الف) (ب)

(پ)

شکل۱۰ سه الگوی اولیهٔ متفاوت: مشاهده کنید که چگونه بُعد فرکتال با تعداد و قطر گویهای کوچکتر تغییر می‌کند.

می‌شود: $\{y\in M : \lim_{n\to\infty} d(f^{-n}x, f^{-n}y)=0\}$. همین‌طور، در تقریباً همه نقاط، یک خمینهٔ *پایدار* وجود دارد که بر زیرفضای پایدار مماس است.

نماهای لیاپانف به‌طور هندسی می‌سنجند که مدارها با چه سرعتی واگرا می‌شوند، در حالی که آنتروپی متریک (f,μ)، که با $h_\mu(f)$ نشانش خواهیم داد، پیچیدگی را، به مفهوم *تصادفی‌بودن* و *اطلاعات*، می‌سنجد. این مفهوم را برای نخستین بار کولموگورُف و سینایی در حوالی سال ۱۹۵۹ مطرح کردند. به‌طور تقریبی، آنتروپی میزان عدم قطعیتی است که با آن مواجه هستیم وقتی که می‌خواهیم رفتار آیندهٔ مدارها را بر اساس اطلاعات در بارهٔ گذشته‌شان پیش‌بینی کنیم. تعریف صوری $h_\mu(f)$ کمی دشوارتر از آن است که در این فضای محدود آورده شود، پس به جای این کار، آن را از راه قضیهٔ شانن‌ـبرایمن‌ـمک‌میلن[1] تعریف می‌کنیم. فرض کنید α افرازی متناهی از خمینهٔ M باشد. برای $n\geq 0$، α^n را آن افرازی تعریف می‌کنیم که اعضایش مجموعه‌هایی به شکل زیر هستند

$$\alpha^n(x) :=$$
$$\{y\in M : \text{برای هر } 0\le i\le n\text{، } f^ix \text{ و } f^iy \text{ در یک عنصر } \alpha \text{ قرار دارند}\}$$

برای سادگی فرض کنید (f,μ) ارگودیک است. در این صورت قضیهٔ شانن‌ـبرایمن‌ـمک‌میلن می‌گوید که عدد h وجود دارد (که $h_\mu(f)$ را همین h تعریف می‌کنیم)، چنان که اگر α افرازی به اندازهٔ کافی ظریف باشد، آنگاه برای nهای به اندازهٔ کافی بزرگ، با چشم‌پوشی از مجموعه‌ای با μـاندازهٔ کوچک، می‌توان M را متشکل از $\sim e^{nh}$ عنصر α^n تصور کرد که هر یک μـاندازه‌ای $\sim e^{-nh}$ دارند. برای ملاحظهٔ بیانی دقیقتر، خواننده را به متنهای متعارف نظریهٔ ارگودیک ارجاع می‌دهیم. البته برای اهداف ما کافی است e^{nh} را آهنگ رشد پیچیدگی f به‌شمار آوریم. البته تنها مدارهای «نوعی» نسبت به اندازهٔ μ را به حساب می‌آوریم.

از آنجا که نماهای لیاپانف و آنتروپی متریکْ هر دو خواص اندازه‌های ناوردا را منعکس می‌کنند، می‌توان آن دو را تنها از راه مفهومهایی که به اندازه مربوط می‌شوند، به هم پیوند داد. فرض کنید ν یک اندازهٔ احتمال بورل بر فضای متریک فشردهٔ X باشد، و $B(x,r)$ گوی به شعاع r حول x را نمایش دهد. گوییم *بعدِ اندازهٔ* ν، $\dim(\nu)$، خوش‌تعریف و برابر α است اگر برای νـت.هـ. x، وقتی که r به صفر می‌گراید، $\nu B(x,r)\sim r^\alpha$. ارتباط میان $\dim(\cdot)$ و بعد هاوسدُرف در اینجاست که اگر $\alpha=\dim(\nu)$، آنگاه

$$\alpha = \mathrm{Inf}\{HD(Y) : Y\subset X, \nu(Y)=1\}$$

پیش از بیان صورت کامل قضیه‌مان، آموزنده است که در آغاز حالت خاصی را که f تنها یک نمای لیاپانف $\lambda>0$ دارد، بررسی کنیم. (چنین fای لزوماً وارون‌ناپذیر است، ولی ایرادی ندارد). قرار می‌دهیم

$$B(x,\epsilon;n) := \{y\in M : d(f^kx,f^ky)<\epsilon \quad \forall 0\le k\le n\}$$

در این صورت

$$B(x,\epsilon;n)\sim B(x,\epsilon e^{-\lambda n})$$

و با تغییر کوچکی در قضیهٔ شانن‌ـبرایمن‌ـمک‌میلن خواهیم داشت

$$\mu B(x,\epsilon;n)\sim e^{-nh}$$

با جمعبندی این دو سطر داریم

$$\mu B(x,r)\sim r^{h/\lambda}$$

که ثابت می‌کند که $\dim(\mu)$ وجود دارد و از طریق رابطهٔ $h=\lambda\cdot\dim(\mu)$ به h و λ وابسته است.

بحث بالا بر این حقیقت تکیه دارد که می‌توانیم مجموعه‌هایی را که گویهای مدور را تقریب می‌زنند، از روی رفتار دینامیکی دستگاه تولید کنیم. اما وقتی که بیش از یک نمای لیاپانف مثبت وجود داشته باشد، این کار نشدنی است و اثباتها به میزان قابل توجهی پیچیده‌تر می‌شوند. در قضیهٔ زیرین، f می‌تواند هر وابرریختی C^2، و μ می‌تواند هر اندازهٔ احتمال بورل ناوردای دلخواه باشد. به یاد آورید که E_i زیرفضای نظیر نمای لیاپانف λ_i است. اندازه‌های شرطی بر خمینه‌های ناپایدار را با $\mu|W^u$ نشان داده‌ایم. همین‌طور قرارداد کرده‌ایم که $a^+ := \max(a,0)$.

قضیه. *برای سادگی فرض کنید (f,μ) ارگودیک باشد. در این صورت نظیر هر λ_i، عددی چون δ_i وجود دارد که $0\le\delta_i\le\dim E_i$ و چنان که:*

الف. $h_\mu(f)=\sum_i \lambda_i^+\delta_i$

ب. $\dim(\mu|W^u)$ *وجود دارد و برابر است با* $\sum_{\lambda_i>0}\delta_i$

علاوه بر این، اگر برای هر i داشته باشیم $\lambda_i\neq 0$، آنگاه

پ. $\dim(\mu)$ *وجود دارد و برابر است با* $\dim(\mu|W^u)+\dim(\mu|W^s)$.

تعبیر هندسی اعداد «δ_i»، بعد *پاره‌ای* μ در جهات E_i است. اگر این را پیش چشم داشته باشیم، دستور بُعد در الف را می‌توانیم چنین تعبیر کنیم که عموماً، $h=\vec\lambda\cdot\vec\delta$، که $\vec\delta$ و $\vec\lambda$ *بردارهای* نماهای لیاپانف و بعدهای پاره‌ای هستند. بخشهای الف و ب و بخش «$\le$» در پ از این قضیه را لدراپیر

1. Shannon-Breiman-McMillan

و نویسنده ثابت کرده‌اند [LY]. طرف دیگر نابرابری در پ را هم به تازگی باریرا[1]، پسین، و اشملینگ[2] ثابت کرده‌اند.

شایان ذکر است که به آنچه در بالا دستور بُعد خوانده شد می‌توان به چشم تظریفی از دو نتیجهٔ بسیار مهم نگریست که پیشتر ثابت شده‌اند: *نابرابری روئل*، که می‌گوید $h_\mu(f) \le \int \sum \lambda_i^+ \dim E_i d\mu$، [R۲]، و *فرمول پسین* که می‌گوید برابری برقرار است وقتی که μ هم‌ارز اندازهٔ ریمانی باشد [P]. از آنجا که می‌توان به اختلاف دو طرف نابرابری روئل به‌عنوان میزان «اتلاف انرژی» در یک دستگاه دینامیکی نگریست، بُعد یک اندازه ناوردا هم همین تعبیر را دارد. برای بررسی گسترده‌تر این موضوع [ER] را ببینید.

زوال همبستگی و قضیهٔ حد مرکزی

در این بخش پایانی دنباله‌های مشاهدات حاصل از دستگاههای دینامیکی را بررسی می‌کنیم و به آنها به دیدهٔ متغیرهای تصادفی در نظریهٔ احتمال می‌نگریم. فرض کنید $f : M \to M$ یک دستگاه دینامیکی باشد، μ یک اندازهٔ احتمال ناوردا، و $\varphi : M \to \mathbb{R}$ تابع یا کمیتی قابل اندازه‌گیری یا قابل مشاهده (مثلاً دما در یک آزمایش ترمودینامیکی). دنبالهٔ توابع

$$\varphi,\ \varphi\circ f,\ \varphi\circ f^2,\ \dots,\ \varphi\circ f^n,\ \dots$$

را متغیرهای تصادفی بر فضای احتمال مورد مطالعه، (M,μ)، فرض می‌کنیم و از خود می‌پرسیم که، چه‌طور ممکن است چنین چیزی را از نظر کیفی به فرایندهای تصادفی مانند برآمدهای پرتاب یک سکه مربوط کرد.

در اینجا قانون قوی اعداد بزرگ که می‌گوید $\frac{1}{n}\sum_{0}^{n-1}\varphi\circ f^i$ تقریباً به یقین به $\int\varphi d\mu$ همگراست، برقرار است وقتی که (f,μ) ارگودیک باشد؛ این همان قضیهٔ ارگودیک برکاف است که بارها با آن روبه‌رو شده‌ایم. همچنین می‌توان پرسید که آیا قضیهٔ حد مرکزی هم برقرار است: یعنی برای تابع φ که $\int\varphi d\mu = 0$، آیا σی مثبتی موجود است چنان که داشته باشیم

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=0}^{n-1}\varphi\circ f^i \xrightarrow{\text{distr}} \mathcal{N}(0,\sigma)?$$

در اینجا $\mathcal{N}(0,\sigma)$ توزیع نرمال با واریانس σ^2 (خم زنگوله‌ای) است.[3] پرسش متعارف، دیگر به همبستگی φ و $\varphi\circ f^n$ برای nهای بزرگ مربوط می‌شود. به بیان دقیق، اگر تعریف کنیم

$$\Phi(n) := \left|\int(\varphi\circ f^n)\varphi d\mu - \left(\int\varphi d\mu\right)^2\right|$$

آنگاه می‌توان پرسید که آیا $\Phi(n)$، هنگامی که n به بینهایت می‌گراید، به صفر خواهد گرایید؟ و با چه سرعتی؟ مثلاً اگر برای یک $\alpha > 0$ مستقل از φ داشته باشیم $\Phi(n) \sim e^{-\alpha n}$، آنگاه این ویژگی، خاصیتی است از دستگاه دینامیکی (f,μ) و در این صورت می‌گوییم که (f,μ) دارای *زوال همبستگی نمایی* است. همین‌طور، اگر برای یک $\alpha > 0$ داشته باشیم $\Phi(n)\sim n^{-\alpha}$، می‌گوییم (f,μ) دارای *زوال چندجمله‌ای* است. و به همین ترتیب.

1. Barreira 2. Schmeling

۳. در اینجا منظور از $\xrightarrow{\text{dist}}$ همگرایی در توزیع احتمال است ـ م.

گمان می‌کنم این پرسشها، پرسشهایی بسیار مهم هستند. روشهای رایج کنونی را نمی‌توانیم در بررسی این مسائل برای دستگاههای دینامیکی کاملاً عمومی به‌کار بریم. بنابراین، مطابق جهتگیری این مقاله، توجه خود را به نگاشتهایی که از نظر هندسی در بخشهای بزرگی از فضاهای فازشان، متضمن مقدار زیادی انقباض و انبساط هستند، محدود می‌کنیم. در این خانواده (که چندان به دقت تعریف نشده) وابریختی‌های اصل *الف* و همین‌طور مثالهایی هم که پیشتر به آنها پرداختیم قرار دارند. ما در اینجا این دیدگاه را برمی‌گزینیم که فقط خواصی که بر مجموعه‌های با اندازهٔ لبگ مثبت برقرارند، مشاهده‌پذیرند. بنابراین اگر دستگاهی «پایستار» باشد، یعنی اگر f یک اندازهٔ هم‌ارز با اندازهٔ لبگ را حفظ کند، آنگاه چنین اندازه‌ای مورد توجه ما خواهد بود. اگر دستگاهی «اتلافی» باشد (به این معنی که پایستار نباشد)، آنگاه μ را یک *اندازهٔ SRB* برخواهیم گزید (در صورت وجود)، زیرا از آنجا که در بخش جاذبهای انون هم دیدیم، اینها همان اندازه‌هایی هستند که خواص اندازهٔ لبگ در دستگاههای پراکننده را آشکار می‌کنند. از آنجا که در حالت کلی معلومات نسبتاً کمی در بارهٔ وجود اندازه‌های SRB در دست است، نخستین و اساسی‌ترین پرسش ما در بارهٔ دستگاههای اتلافی، وجود چنین اندازه‌هایی خواهد بود.

نکتهٔ بعدی در بارهٔ خواص ارگودیک و آمیزانندهٔ (f,μ) است. *آمیزانیدن*[1]، خاصیتی قویتر از ارگودیک بودن است: طبق این خاصیت، برای هر جفت از مجموعه‌های بورل A و B، وقتی $n\to\infty$، داریم:

$$\mu(f^{-n}A\cap B)\to\mu(A)\mu(B)$$

بعضی پرسشهای ما تنها در صورتی با معنا خواهند بود که (f,μ) آمیزاننده باشد، که اصلاً معادل این ادعاست که تابع $\Phi(n)$ که در بالا تعریف شد، در بینهایت به صفر همگرا شود. اگر چه تمامی (f,μ)ها ارگودیک یا آمیزاننده نیستند، قضیه‌ای از پسین و لدراپیر وجود دارد که می‌گوید اگر μ هموار یا SRB باشد و اگر f در μـت.هـ. نمای لیاپانف ناصفر داشته باشد، آنگاه (f,μ) تشکیل شده است از حداکثر تعدادی شمارش‌پذیر از مؤلفه‌های ارگودیک، که هر یک از آنها با تقریب یک دور متناهی آمیزاننده است (مثلاً [P] را ببینید). بدین‌ترتیب همواره پرسشهای ما در بارهٔ هر *مؤلفهٔ آمیزاننده* بامعنا هستند.

ملاحظهٔ این نکته دشوار نیست که در وضعیتهای تعینی مانند آنچه ما بررسی می‌کنیم، در صورتی که نوعی شرط همواری روی تابعهای موردنظر نگذاریم سرعت آمیزانیدن ممکن است به دلخواه کُند باشد. بنابراین همواره فرض خواهیم کرد که φ پیوستهٔ هولدر[2] است.

می‌توان وضعیت را برای خانوادهٔ دستگاههای دینامیکی تحت بررسی چنین خلاصه کرد: برای وابریختی‌های آنوسف و جاذبهای اصل الف، اندازهٔ SRB همواره وجود دارد، زوال همبستگیْ نمایی است، و قضیهٔ حد مرکزی همواره برقرار است (مثلاً [R1] را ببینید). در خارج از محدودهٔ اصل الف، تا تقریباً همین اواخر، بیشتر پیشرفتها در مورد خانواده‌هایی از مثالهای خاص بوده است. این مثالها چنین القا می‌کنند که رفتارهای کاملاً متفاوتی ممکن است بروز کنند. به‌عنوان نمونه، مثالهایی در مرز برقراری اصل الف وجود دارند

1. mixing 2. Hölder

که اندازه‌های SRB نمی‌پذیرند؛ مثالهایی هم هستند که می‌پذیرند ولی زوال چندجمله‌ای دارند.

میل دارم در باقیماندهٔ این نوشته گزارشی از بعضی کارهای تازه بدهم که به قصد مطالعهٔ روشمند خواص آماریی که در بالا به آنها اشاره شد، انجام شده‌اند. هدفهای من (۱) ارائه دادن شرایط قابل تحقیق برای این خواص، و (۲) ربط دادن آنها به هندسهٔ نگاشت است. این شرایط را زیرعنوانهای *زمان بازگشت* و *زمان تجدید* بیان کرده‌اند و برای شیئی تعریف می‌شوند که ساختن آن مستلزم درجه‌ای از هذلولوی بودن است. کارم را با توصیفی از این شیء آغاز می‌کنم. برای سادگی فعلاً اجازه دهید با f چنان برخورد کنیم که گویی نگاشتی منبسط‌کننده است و از این حقیقت که ممکن است در امتداد خمینه‌های پایدار موضعی این شرط نقض شود چشم‌پوشی کنیم. ایده چنین است: مجموعه‌ای دلخواه چون Λ با خواصی معقول برمی‌گزینیم که $m(\Lambda) > 0$ [m، اندازهٔ لبگ است] . Λ را به‌عنوان مجموعهٔ مرجع در نظر می‌گیریم. زیرمجموعهٔ $\Lambda' \subset \Lambda$ را «تجدید شده» یا «بازگشته به Λ» در زمان n می‌نامیم اگر f^n، Λ' را وابریختانه[1] بر Λ بنگارد. این دستگاه را تکرار می‌کنیم تا آنجا که تقریباً تمام نقاط Λ بازگشته باشند و Λ را به زیرمجموعه‌های مجزای $\{\Lambda_i\}$ افراز کرده باشند که در زمانهای متفاوت باز می‌گردند. فرض کنید R تابع زمان بازگشت باشد، ادعا می‌کنیم که خواص آماری f تا حد زیادی در رفتار مجانبی دنبالهٔ $m\{R > n\}$ ظاهر می‌شوند.

مسلماً نتایج زیر به دقت بیان نشده‌اند. یکی از محتویات تحلیلی مهم که در نظر نگرفته‌ایم، *کنترل کردن اجزای غیرخطی* است، که برای تأمین قدری «ناوابستگی» دینامیک دستگاه در زمانهای میان بازگشت به مجموعهٔ اولیه ضروری است. با ارجاع خواننده به [Y1] و [Y2] برای جزئیات بیشتر، قضیه‌ای بیان می‌کنیم:

قضیه. *فرض کنید f و Λ و m و R مانند بالا باشند.*

الف. اگر $\int R dm < \infty$، آنگاه f یک اندازهٔ احتمال μ را که هموار یا SRB است حفظ می‌کند؛ اگر شرط کنیم که (f, μ) ارگودیک باشد و $\mu(\Lambda) > 0$، آنگاه μ یکتا هم هست.

ب. اگر علاوه بر این ۱ =ب. م. م. $\{R\}$، آنگاه (f, μ) آمیزاننده است.

پ. اگر برای θای کوچکتر از ۱، $m\{R > n\} < C\theta^n$، آنگاه زوال همبستگی نمایی است.

ت. اگر برای αای بزرگتر از ۱، $m\{R > n\} = \mathcal{O}(n^{-\alpha})$، آنگاه زوال همبستگی از مرتبهٔ $\mathcal{O}(n^{-\alpha+1})$ است.

ث. اگر R همانند ت باشد و $\alpha > 2$، قضیهٔ حد مرکزی برقرار است.

قضیهٔ بالا خواص آماری f را به دُم دنبالهٔ زمانهای بازگشت آن مرتبط می‌کند. ادعا می‌کنیم که این خواص با سرعتی *که قطعات به دلخواه کوچک خمینهٔ ناپایدار با آن سرعت رشد می‌کنند تا به اندازهٔ ثابتی برسند*، ارتباط نزدیکی دارد. این از آن روست که برای بازگشت به مجموعهٔ مرجع Λ در ساختار تجدیدی ما، یک قرص ناپایدار باید تا به اندازهٔ Λ رشد کند، و ملاحظهٔ این نکته دشوار نیست که همین که یک بار به اندازه معینی رسید، با اثردادن تابع به تعداد ثابتی از دفعات، باز خواهد گشت. سرعت رشد خمینهٔ ناپایدار از دستگاهی به دستگاهی تغییر می‌کند: این همان جاست که هندسهٔ نگاشت وارد کار می‌شود. برای نمونه، اگر f یکنواخت‌ـهذلولوی باشد، آنگاه قطر هر قرص ناپایدارِ به اندازهٔ کافی کوچک با هر بار اثردادن تابع تحت ضریبی معین رشد می‌کند. و اگر نگاشتی یکنواخت‌ـهذلولوی نباشد، چنانچه منشأ ناهذلولوی بودن آن شناسایی شده و مکانیسم آن نیز معلوم شود، آنگاه شدت ممانعت در مقابل این رشد را می‌توان برحسب عملکرد «مجموعهٔ بد» توجیه کرد.

آنچه پیشنهاد کرده‌ایم، برنامه‌ای عمومی است برای به‌دست آوردن اطلاعات آماری در بارهٔ دستگاههایی دینامیکی که مقداری رفتار هذلولوی دارند. این برنامه برای چند مثال معروف پیاده شده است. بحثمان را با نشان دادن اینکه چگونه این برنامه در باره گویهای بیلیارد روی $\mathbb{T}^2$ با موانع محدب به‌کار می‌رود (بخش بیلیارد را ببینید. به‌ویژه شکل ۳ الف را) به پایان می‌بریم. برای چنین بیلیاردهایی، ناپیوستگی در نگاشت، تنها عامل جلوگیری‌کننده از رشد یکنواخت خمهای ناپایدار است. با توجه به این موضوع، بررسی مجموعهٔ ناپیوستگیها مهم به نظر می‌رسد. اگر یک شرط اضافی را هم بر بیلیاردها اعمال کنیم، که به نام «افق متناهی» معروف است، آنگاه می‌دانیم که این مجموعهٔ ناپیوستگیها از تعدادی متناهی خم هموار ساخته شده است که بعضی از آنها در نقاط مشخصی همدیگر را قطع می‌کنند. واقعیتی ساده، ولی مهم، این است که ممکن نیست بیش از Kn شاخه از مجموعهٔ ناپیوستگیهای f^n از یک نقطه بگذرند، که k ثابتی است که تنها به آرایش موانع روی میز بیلیارد بستگی دارد. این نکته را نخستین بار بونیموویچ دریافت. بنابراین، پس از n تکرار، تصویر یک خم ناپایدار به اندازهٔ کافی کوچک، حداکثر $Kn + 1$ مؤلفه خواهد داشت در حالی که درازای آن با ضریب λ^n رشد می‌کند [برای یک $\lambda > 1$]. بنابراین، در میانگین، رشد نمایی غالب می‌شود. با کمی کار اضافی، این بحثها به تخمین زیر منجر می‌شود: $m\{R > n\} < C\theta^n$، و از قضیهٔ بالا نتیجه می‌گیریم که قضیهٔ حد مرکزی برقرار است و سرعت زوال همبستگی هم $\sim e^{-\alpha n}$ است. برای جزئیات بیشتر [Y1] را ببینید. نتیجهٔ CLT برای نخستین بار در [BSC] ثابت شده است.

1. diffeomorphically

مراجع

[BC] M. Benedicks and L. Carleson, *The dynamics of the Hénon map*, Ann. Math. **133** (1991), 73-169.

[BY] M. Benedicks and L.-S. Young, *SBR measures for certain Hénon maps*, Invent. Math. **112** (1993), 541-576.

[B] R. Bowen, *Equilibrium states and the ergodic theory of Anosov diffeomorphisms*, Lecture Notes in Math., vol. 470, Springer, 1975.

[BSC] L. A. Bunimovich, Ya. G. Sinai, and N. I. Chernov, *Statistical properties of 2-dimensional hyperbolic billiards*, Russian Math. Surv. **46** (1991), 47-106.

[ER] J.-P. Eckmann and D. Ruelle, *Ergodic theory of chaos and strange attractors*, Rev. Modern Phys. **57** (1985), 617-656.

[LY] F. Ledrappier and L.-S. Young, *The metric entropy of diffeomorphisms*, Ann. Math. **122** (1985), 509-574.

[Sz] D. SZASZ, *Boltzmann's ergodic hypothesis, a conjecture for centuries?*, Studia Sci. Math. Hungar. **31** (1996), 299-322.

[W] M. WOJTKOWSKI, *Principles for the design of billiards with nonvanishing Lyapunov exponents*, Commun. Math. Phys. **105** (1986), 391-414.

[Y1] L.-S. YOUNG, *Statistical properties of dynamical systems with some hyperbolicity*, Ann. Math. (1998).

[Y2] ———, *Recurrence times and rates of mixing*, to appear in Israel J. Math.

* * * * * *

• Lai-Sang Young, "Developments in choatic dynamics", *Notices Amer. Math. Soc.*, (10) **45** (1998).

* لای-سانگ یانگ، دانشگاه کالیفرنیا در لس‌آنجلس، آمریکا

lsy@math.ucla.edu.

[N] S. NEWHOUSE, *The abundance of wild hyperbolic sets and nonsmooth stable sets for diffeomorphisms*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **50** (1979), 101-151.

[P] YA. B. PESIN, *Characteristic Lyapunov exponents and smooth ergodic theory*, Russian Math. Surveys **32** (1977), 55-114.

[R1] D. RUELLE, *Thermodynamic formalism*, Addison-Wesley, New York, 1978.

[R2] ———, *An inequality of the entropy of differentiable maps*, Bol. Soc. Brasil Mat. **9** (1978), 83-87.

[S1] YA. G. SINAI, *Gibbs measures in ergodic theory*, Russian Math. Surveys **27** (1972), 21-69.

[S2] ———, *Dynamical systems with elastic reflections: ergodic properties of dispersing billiards*, Russian Math. Surveys **25**, (1970), 137-189.

[Sm] S. SMALE, *Differentiable dynamical systems*, Bull. Amer. Math. Soc. **73** (1967), 747-817.