قضیهٔ هان_باناخ: تاریخچه و تحولات•

لارنس ناریچی و ادوارد بکنشتاین*
ترجمهٔ محمد جلوداری‌ممقانی

مقدمه

بدون قضیهٔ هان_باناخ ساختار آنالیز تابعی بسیار متفاوت با ساختار کنونی‌اش می‌بود. از جمله، معلوم شده است که این قضیه صورت بسیار مناسبی از اصل موضوع انتخاب برای آنالیزدانان است. (این قضیه معادل اصل انتخاب نیست و اتفاقاً از قضیهٔ فراپالایه[1] که اکیداً ضعیف‌تر است، نتیجه می‌شود). ریس و هلی صورتهای اولیه این قضیه را در دنیای پرتلاطم ریاضیات اوایل دهۀ ۱۹۰۰ پیدا کردند. هان و باناخ مستقل از هم صورت حقیقی قضیه را در دهۀ ۱۹۲۰ ثابت کردند. سپس موری آن را به توابع مختلط تعمیم داد، که به محض اینکه بدانیم $f(x) = \operatorname{Re} f(x) - i \operatorname{Re} f(ix)$، برهان ساده‌ای خواهد داشت. آیا نگاشتهای خطی پیوسته را می‌توان به‌سادگی تابعکهای خطی گسترش داد؟ باناخ و مازور[2] قبلاً ثابت کرده بودند که نمی‌توان، اما، این سؤال کلی تا انتشار قضیهٔ ناخبین در ۱۹۵۰ که پاسخی قطعی به آن داد، بی‌پاسخ مانده بود. در این مقاله دربارهٔ دنیای ریاضی‌ای که قضیهٔ هان_باناخ وارد آن شد و ارتباط این قضیه با اصل موضوع انتخاب بحث می‌کنیم، به سوابق آن می‌پردازیم، و بعضی از پیامدها و برخی از گونه‌های اصلی آن را بیان می‌کنیم.

۱. قضیهٔ هان_باناخ چیست؟

قضیهٔ هان_باناخ به علت زیبایی و کارایی‌اش یکی از قضیه‌های مورد علاقهٔ هر آنالیزپیشه‌ای است. این قضیه القاب دیگری از قبیل صورت آنالیزی اصل موضوع انتخاب و جواهر تاج آنالیز تابعی هم دارد. این قضیه به دو صورت اصلی بیان شده است، یکی به‌صورت یک قضیهٔ گسترش مغلوب و دیگری به‌صورت یک قضیهٔ جداسازی. در اینجا به ذکر نمونهٔ اصلی صورت گسترشی می‌پردازیم: فرض کنید M زیرفضایی از فضای خطی X روی $\mathbb{R}$ باشد، همچنین فرض کنید p تابعکی زیرخطی (یعنی، زیرجمعی و همگن مثبت) بر X باشد و f فرمی خطی بر M باشد که p در آنجا بر آن غالب است.

1. ultrafilter 2. Mazur

قضیهٔ هان_باناخ حاکی است که گسترشی خطی چون F از f به تمام X وجود دارد که p بر F همه جا غالب است.

$$\begin{tikzcd}
F: & X \arrow[d, dash] \arrow[dr] & & F \le p \\
f: & M \arrow[r, dashed] & \mathbb{R} & f \le p
\end{tikzcd}$$

۲. اهمیت این قضیه در چیست؟

قضیهٔ هان_باناخ قضیهٔ وجودی قدرتمندی است که به‌ویژه برای کاربردهایی در مسائل خطی شکل مناسبی دارد. برخی از راههای رسوخ این قضیه به سرتاسر آنالیز تابعی عبارت‌اند از:

- نظریهٔ دوگانی
- قضیهٔ انتگرال کوشی در مورد توابع تحلیلی بردارمقدار $x : D \to X$، که X یک فضای باناخ و D دامنه‌ای در صفحهٔ مختلط $\mathbb{C}$ است [۵۸، ص۱۶۲]
- معیار هلی برای حل دستگاههای معادلات خطی در فضاهای نرمدار بازتابی (ر.ک. بخش ۵ و نیز ر.ک. [۵۸]).

قلمرو نفوذ این قضیه، فراتر از آنالیز تابعی، به حیطه‌های زیر گسترش یافته است:

- برهان وجود توابع گرین [۲۳]
- حل مسألهٔ «سادهٔ» اندازه، توسط باناخ [۱، ص۱۸۸ به بعد]
- کاربرد در نظریهٔ کنترل ([۴۸]، [۷۵])
- کاربرد در برنامه‌ریزی محدب [۲]
- کاربرد در نظریهٔ بازیها [۴۶]
- صورتبندی ترمودینامیک [۲۱].

۳. تاریخچهٔ مختصر آنالیز

در قرن نوزدهم، «بردار» به معنای «nتایی» بود. در اواخر این قرن، معنای آن توسعه یافت و شامل «دنباله» هم شد. بین مفاهیم هندسی و آنالیزی فقط تماسهای گذرایی پیدا می‌شد و حداقل می‌توان گفت که مفهوم «اثبات» به هیچ‌وجه دقیق نبود. سبک هندسی قضیه-برهان، که امروز در بیشتر مباحث ریاضی معمول است، باید منتظر دیدگاههای پئانو، هیلبرت و همفکرانش می‌ماند. آنالیزدانان برای «اثبات» مطالبی، صرفاً دیدگاه خود را دربارهٔ آن مطرح و معقول بودن آن را توجیه می‌کردند. این شیوه متأسفانه شبیه روش شتابزدهٔ «علوم» اجتماعی در ارائهٔ «اثبات» در عصر جدید است. در بخش ۳.۳ شرح خواهیم داد که حتی ریاضیدانهای بزرگی چون فوریه و اویلر از این لحاظ تا چه حد بی‌پروا عمل می‌کردند.

در دورهٔ ۱۸۹۰-۱۹۱۵ مفاهیم ساختاری به‌تدریج وارد آنالیز شد و دیدگاههای هندسی مورد پذیرش قرار گرفت. استانداردهای دقت بسیار بالاتر رفت و انتگرالهای جدید امکان وحدت چند مبحث متفاوت را فراهم کردند.

۱.۳ ساختار

ریاضیات به‌حدی بالغ شده بود که شباهتهای میان عملیات روی اشیای مشخص متفاوت، نمایان می‌شد. راهی لازم بود که به این شباهتها هویت مشخصی داده شود. چارچوب نهایی این بود که اشیای مورد نظر به‌عنوان اعضای یک مجموعهٔ دلخواه در نظر گرفته شوند که تأثیرات متقابل آنها از قواعدی خاص پیروی می‌کنند. این اتفاق نخست در جبر رخ داد. در آنجا، پئانو[۶۲] فضای برداری و تابع خطی را به‌صورت اصل موضوعی تعریف کرد. دیگر بردارها «nتاییها» و دنباله‌ها نبودند؛ به این ترتیب دیگر نمی‌شد دقیقاً دانست که «بردارها» چیستند. جالب اینکه این کار اساساً راه را برای ورود فضاهای برداری با بعد دلخواه، بویژه فضاهای تابعی گشود. اما، اگر چه پینکرله در ۱۹۰۱ کتابی در مورد فضاهای خطی نوشت، اندیشهٔ پئانو تا حد زیادی فراموش شد. دیگر زمان تعریف مجرد یک فضا به‌عنوان مجموعهٔ «اشیایی» که از قواعد معینی پیروی کنند، فرا رسیده بود. گروه (اصطلاحی که متعلق به گالواست) روی مجموعه‌ای دلخواه برای نخستین بار در ۱۸۹۵ (به‌وسیلهٔ وبر) و میدان در ۱۹۰۳ تعریف شد.

در آنالیز، پذیرش ایدهٔ ساختار قدری دیرتر از جبر رخ داد. اشیای مشخص در این مبحث، توابع بودند اما سردرگمی دربارهٔ مفهوم دقیق تابع ادامه یافت. دیریکله (در ۱۸۳۷) تابعی عددمقدار از یک متغیر حقیقی را به‌صورت یک جدول، تناظر، یا همبستگی بین دو مجموعه از اعداد تعریف کرد. ریمان (در ۱۸۵۴) مشکلاتی در مفهوم شهودی تابع می‌دید. وی برای اینکه نشان دهد درک ما از مفهوم تابع بسیار ابتدایی است، تابعی برحسب یک سری مثلثاتی تعریف کرد که بازای مقادیر گنگ متغیر مستقل پیوسته و بازای مقادیر گویای آن ناپیوسته است. مثال کلاسیک وایرشتراس (۱۸۷۴) از تابعی که هیچ جا مشتق‌پذیر نیست ولی همه جا پیوسته است، این موضوع را به طرز چشمگیرتری نشان داد. در نتیجهٔ این کشفها، ددکیند، وایرشتراس، موری و کانتور از مسیرهای مختلف، روش $\epsilon - \delta$ را به بخشی از گنجینهٔ استاندارد آنالیز تبدیل کردند.

پینکرله اصرار می‌کرد که باید بین تابع و مقادیر آن تفاوت قائل شد. او می‌گفت ریاضیدانان برای بررسی خود تابع به‌عنوان یک موجود مستقل و جدا از مقادیرش، باید f را به‌کار ببرند نه $f(x)$ را. او و دیگران اشتباه گرفتن یک نگاشت خطی را با ماتریس آن نسبت به یک دستگاه مختصات خاص تقبیح می‌کردند، و این مسأله‌ای است که هنوز هم متأسفانه وجود دارد. در راستای این نظریه که توابع به‌خودی خود موجودیت دارند، ولترا (در ۱۸۸۸) پیشنهاد کرد که باید توابعی در نظر گرفته شوند که بر دامنه‌های جدیدی مانند تمام خمهای پیوسته در یک مربع تعریف شده‌اند و آنالیز روی آنها انجام شود—که بدون در دست داشتن توپولوژی پیشنهاد چندان ساده‌ای نیست. وی این توابع نوع جدید را *fonctions de ligne* نامید، که *ligne* خم پیوسته در داخل یک مربع است.

اما پئانو با اعتراض پرسید: خم چیست؟ این کلمه به معنی چیزی شبیه تصویر پیوستهٔ $[0,1]$ در مربع واحد بود. خم فضا پرکن پئانو به زیبایی نشان داد که این تعریف چه امکانات وسیعی به‌وجود می‌آورد. ولی آدامار فریفتهٔ پیشنهاد ولترا شد و بر آن اصرار می‌کرد. وی در ۱۹۰۳ توابع جدید از توابع را تابعک و آنالیز آنها را آنالیز تابعی نامید. بخشی از این موضوع تازه نبود. در اوایل دههٔ ۱۸۰۰ نیز توابعی مورد توجه قرار گرفته بودند که دامنهٔ آنها توابع بودند—مشتقها، تبدیلهای لاپلاس، عملگرهای انتقال— اما چیزی که در این زمان تازگی داشت کاربرد قواعد جبری در مورد آنها بود، قواعدی که پیش از آن فکر می‌کردند فقط باید بر اعداد اعمال شود. اکنون زمان مطالعهٔ ویژگیهای تحلیلی این عملگرها فرا رسیده بود.

فرشه [در ۱۹۰۴] مفاهیم حد و پیوستگی را در مورد مجموعه‌هایی که مرکب از اعداد نبودند مطرح کرد. او در ۱۹۰۶ مفهوم کنونی متریک را تعریف نمود (ضمناً، وی واضع اصطلاح فضای متریک نبوده است. این اصطلاح هندسی مآب‌تر را هاوسدورف در ۱۹۱۳ پیشنهاد کرد.) و فضاهای متریک مشخصی را که در آن «نقاط» عبارت از توابع بودند بررسی کرد. وی به اهمیت مفاهیم فشردگی، کمال و جدایی‌پذیری پی برد و بر آنها تأکید کرد.

۲.۳ دیدگاه—چشم‌انداز هندسی

هندسه در اوایل قرن هفدهم به‌وسیلهٔ دکارت و فرما «جبری‌سازی» شده بود. در اواخر قرن نوزدهم و اوایل قرن بیستم نوبت تلافی هندسه بود که آنالیز را «هندسی‌سازی» کند. اشمیت [در ۱۹۰۸] و فرشه [در ۱۹۰۸] زبان هندسی را وارد فضای هیلبرت ℓ_2 کردند و نخست از نرم (با نماد کنونی $\|x\|$) و از نابرابری مثلث برای نرم صحبت کردند. در ۱۹۱۳ ریس حل دستگاه خطی همگن

$$f_i(x) = a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = 0, 1 \leq i \leq n$$

را به‌عنوان اقدام برای یافتن عنصری چون $x = (x_1, \ldots, x_n)$ توصیف کرد که بر فضای خطی پدید آمده از $f_1, \ldots, f_n$، که در آن $f_i = (a_{i1}, \ldots, a_{in})$، عمود باشد؛ یعنی، حل دستگاه معادلات را به‌عنوان اقدامی برای یافتن مکمل متعامد فضای خطی پدید آمده از $f_1, \ldots, f_n$ در نظر گرفت. مهمتر اینکه، «معادلات» یعنی f_iها، به مرتبهٔ بردار ارتقا یافتند و حالتی همچون «متغیرها» پیدا کردند. هیلبرت و پیروان مکتب وی نیز از سطحهای متعامد سخن گفتند. هلی و دیگران، با تکیه بر کارهای قبلی مینکوفسکی [در ۱۸۹۶] ایده‌هایی را در مورد تحدب وارد جریان اصلی آنالیز کردند. میراث این اندیشه‌ها هنوز مورد استفادهٔ ماست.

۳.۳ دقت
دو عیب عمدهٔ آنالیز در قرن هفدهم جنبهٔ شهودی غیرقابل اعتماد آن و محاسبات صرفاً صوری با نمادها بود. به‌عنوان نمونه‌ای از این ایده‌های شهودی، عقیدهٔ جزمی عجیب یوهان برنولی (۱۶۹۳) بود که: «کمیتی که به اندازهٔ بینهایت کوچک کم یا زیاد می‌شود، نه کم می‌شود و نه زیاد». همان‌طور که اسقف بارکلی در کتاب آنالیست خود در ۱۷۳۴ با عصبانیت متذکر شد، با این دیدگاه آنالیزدانها هم خدا را دارند و هم خرما را: آنها می‌توانند این «شبح کمیت محوشدهٔ» دیوانه را تا مرحلهٔ آخر استدلال به‌عنوان چیزی در نظر بگیرند و سپس آن را به‌عنوان هیچ چیز دور بریزند. امروزه برخی از ریاضی‌پیشگان کاربردی dx را به‌عنوان «صفر کوچک» به‌کار می‌برند اما جمله‌های مراتب بالاتر dx^2، dx^3 و غیره را برای راحتی، نه به خاطر دقت، نادیده می‌گیرند.

اویلر در محاسبات نمادی با سریها و حاصلضربها بدون در نظر گرفتن همگرایی، استاد مسلم بود. «برهان» وی برای برابری $e^x = \sum_{n\geq 0} x^n/n!$ با استفاده از «حد» وقتی در بسط دوجمله‌ای

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = 1 + x + \frac{n(n-1)}{2!}\,\frac{x^2}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\,\frac{x^3}{n^3}+\cdots$$

n به سمت بینهایت می‌رود، گویای این واقعیت است. مسلماً این کار وجدان ریاضی او را آزرده نمی‌کرد. علی‌رغم اعتراضات لاگرانژ، فوریه نیز در کتاب کلاسیک خود با عنوان نظریهٔ تحلیلی گرما (*La theorie analytique de la chaleur*) در سال ۱۸۲۲ دغدغهٔ خاطری در این مورد نداشته است. وی پس از بسط تابع خاصی به‌صورت یک سری برحسب توابع سینوس و کسینوس، می‌گوید: «می‌توانیم همین نتایج را به هر تابعی تعمیم دهیم، حتی به توابعی که ناپیوسته و کاملاً دلخواه‌اند». وی با نمادها محاسبهٔ صوری انجام می‌دهد، همگرایی را به حال خود می‌گذارد، و بسط سری سینوسی یک تابع فرد «دلخواه» را به‌دست می‌آورد.

اگر چه تأثیر کارهای کوشی، ریمان، و وایرشتراس استانداردها را قبلاً بالا برده بود، اما، کارهای هیلبرت و پیروان مکتب او در مبانی هندسه استانداردهای دقت را آن قدر ارتقا داد که بسیاری از کارهای قبلی در مقایسه با آنها ناچیز جلوه می‌کنند.

۴.۳ ابزارهای جدید: انتگرالهای جدید
در قرن نوزدهم کوشش قابل‌ملاحظه‌ای برای حل دستگاههای بینهایت معادلهٔ بینهایت مجهولی صرف شد (سعی کنید ریاضیدانی را نام ببرید که سعی در حل معادلات نکرده باشد!) در حالت خطی، مسألهٔ دستگاه معادلات خطی را می‌شد به این صورت بیان کرد: به‌ازای تابعکهای خطی f_i و اسکالرهای ثابت c_i، x را چنان پیدا کنید که $f_i(x) = c_i$. ولی تعداد fها (و cها) هر قدر بود، تعداد مختصات x هم همان‌قدر فرض می‌شد. وقتی بینهایت f و c وجود داشته باشد، x باید بینهایت مؤلفه یا مختص داشته باشد ـــ باید یک دنباله باشد، نه یک چندتایی. در حل دستگاههای شامل بینهایت معادلهٔ خطی با تعمیم هوشمندانهٔ دترمینان پیشرفت قابل‌ملاحظه‌ای حاصل شد. فکر اصلی این بود که دستگاه بینهایت معادله را ببُرند و سپس حد بگیرند. ضعف جدی این روش، وابستگی آن به حاصلضربهای نامتناهی بود که فقط تحت شرایطِ بسیار محدودکننده همگرا می‌شوند. نظریه‌های جدید لبگ و استیلتیس دربارهٔ انتگرال وحدت بخشیدن به این مسائل را امکان‌پذیر ساخت، که دو نمونه از آنها عبارت‌اند از:

۱. سریهای فوریه. به‌ازای دنبالهٔ (g_n)، مثلاً ازکسینوسها، و دنبالهٔ (a_n) از اعداد متعلق به ℓ_2، تابع x را چنان پیدا کنید که این اعداد ضرایب فوریهٔ آن باشند، یعنی به‌ازای هر $n \in \mathbb{N}$، $\int x(t)g_n(t)dt = a_n$. آیا x یکتاست؟

۲. مسائل گشتاور. به‌ازای دنبالهٔ (a_n) از اعداد، تابع x را چنان پیدا کنید که به‌ازای هر $n \in \mathbb{N}$، $\int t^n x(t)dt = a_n$.

۴. کارِ ریس
ریس ([۷۱]، [۷۲]) با الهام ازکارهایی که قبلاً در مورد فضای هیلبرت صورت گرفته بود، به حل مسألهٔ زیر همت گماشت: اگر $p > 1$ (بنابراین می‌توانست از نابرابریهای هولدر و مینکوفسکی که تعمیم داده بود، استفاده کند):

(P) به‌ازای بینهایت y_s متعلق به $L_q[a,b]$ و اسکالرهای c_s، x متعلق به $L_p[a,b]$ را چنان پیدا کنید که

$$\int_a^b x(t)y_s(t)dt = c_s\,.$$

جواب و روش حل وی هیچ شباهتی به کارهای قبلی نداشت. برای اینکه این x وجود داشته باشد باید بین yها و cها رابطهٔ لازم وکافی زیر برقرار باشد.

(*) به‌ازای هر مجموعهٔ متناهی از اندیسهای s و هر دسته از اسکالرهای a_s باید $K > 0$ وجود داشته باشد به‌طوری که

$$\left|\sum a_s c_s\right| \le K\left(\int_a^b \left|\sum a_s y_s\right|^q\right)^{1/q}$$

توجه کنید که از (*) نتیجه می‌شود که اگر $\sum a_s y_s = 0$ آنگاه $\sum a_s c_s = 0$. بنابراین، اگر تابعک خطی f را بر فضای خطی M که بوسیلهٔ yها در $L_q[a,b]$ پدید می‌آید، به‌صورت $f(y_s) = c_s$ تعریف کنیم، آنگاه f خوش‌تعریف است. همچنین، به‌ازای هر y متعلق به M، $|f(y)| \le K\|y\|_q$، بنابراین به زبان امروزی، می‌گوییم که f بر M کراندار یا پیوسته است. ریس نشان داد که اگر xای متعلق به L_p جوابی از (P) باشد، f را می‌توان به‌طور پیوسته به کل فضا گسترش داد. به عبارت دیگر، توانایی حل معادلات خطی، موجب می‌شود که بتوانیم تابعکهای خطی کراندار را به‌طور پیوسته به کل فضا گسترش دهیم. بنابراین، جواب ریس به (P) حالت خاصی از قضیهٔ هان-باناخ است.

سپس ریس فضاها را تغییر داد و به این شکل از مسأله پرداخت:

(Q) به‌ازای $y_s \in C[a,b]$ و اسکالرهای c_s، $x \in BV[a,b]$ (توابع با تغییر کراندار) را چنان پیدا کنید که

$$\int_a^b y_s(t)dx(t) = c_s\,.$$

وی پس از اصلاح روشهای قبلی خود، این مسأله را با شرطی که بسیار شبیه شرط کرانداری (*) به نظر می‌رسید حل کرد. او به اهمیت این شرط

پی برد و ثابت کرد که هر تابع «جمعی پیوسته» در این شرط صدق می‌کند و برعکس؛ در اینجا منظور وی از «پیوستگی»، پیوستگی دنباله‌ای نسبت به نرم زبرینه [سوپریمم] بود. در هر مورد، حالت خاصی از قضیه هان-باناخ را اثبات و دوگان پیوستهٔ یک فضای نرمدار را تعیین کرد.

۵. ورود هلی به صحنه

نگرش ریس این نبود که فرمهای خطی پیوسته را تعریف کند و گسترش بدهد. اما باناخ [۴] برای حل مسألهٔ اندازه، با استفاده از استقرای ترامتناهی، تابعکهای خطی نامنفی را گسترش داد. در واقع [۷۶]، استدلال باناخ حالت خاص زیر از قضیهٔ گسترش کرین-روتمن [۴۷] را ایجاب می‌کند.

قضیه. فرض کنید M زیرفضایی خطی از فضای برداری مرتب X با واحد ترتیبی $e \in M$، و f تابعکی خطی و نامنفی بر M باشد. در این‌صورت، تابعک خطی نامنفی F بر X وجود دارد به‌طوری که بر M، $F(x) = f(x)$.

هلی [۳۱] به گسترش دادن فرمهای خطی پیوسته فکر می‌کرد و نمونهٔ اولیهٔ استدلالی را که هان [۲۷] و باناخ [۵] بعدها جداگانه برای اثبات قضیهٔ هان-باناخ به‌کار بردند، ارائه داد ــ یعنی، مسأله را تبدیل کرد به اثبات اینکه یک فرم خطی پیوستهٔ تعریف شده بر زیرفضای M از یک فضای نرمدار را می‌توان بدون افزایش نرم به‌وسیلهٔ یک بردار به $[M \cup \{x\}]$ گسترش داد. او مسألهٔ (Q) را مجدداً بررسی کرد و نه سال بعد (۱۹۲۱) اثبات دیگری به دست داد ــ در آن موقع وی سرباز ارتش اتریش بود و به‌عنوان اسیر جنگی در روسیه به سر می‌برد. هلی به جای فضاهای خاص ℓ_p، $L_p[a,b]$ و $C[0,1]$، یک نرم کلی (هر چند آن را نرم ننامید و نماد $||x||$ را هم به‌کار نبرد) روی یک فضای دنباله‌ای کلی ــ مشخصاً هر زیرفضای برداری $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ ــ در نظر گرفت. این، البته شامل فضاهای ℓ_p و بسیاری دیگر از فضاها نظیر فضای L_2 که می‌شد آنها را با ℓ_2 یکی گرفت، می‌شد. هلی نرم کلی خود را با بعضی از ایده‌های اولیهٔ مینکوفسکی دربارهٔ تحدب مرتبط کرد. مینکوفسکی قبلاً به تناظر بین «نرمها» روی زیرفضایی از $\mathbb{R}^n$ و «اجسام متقارن محدب» [مجموعه‌های بسته، متقارن، کراندار و محدبی که 0 یک نقطهٔ داخلی آنهاست] پی برده بود، مفهومی که چند دهه بعد وقتی که فضاهای موضعاً محدب مطرح شدند دوباره وارد کار شد.

هلی به‌ازای زیرفضای نرمدار X از $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$، زیرفضای

$$X' = \left\{ (u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n u_n < \infty \right\} \quad \text{به‌ازای هر } (x_n) \in X$$

را در نظر گرفت، یعنی، (u_n)هایی که $(u_n x_n)$ به‌ازای همهٔ (x_n)های متعلق به X مجموع‌پذیر است. مثلاً اگر $X = c$ یا $X = c_0$، آنگاه $X' = \ell_1$؛ اگر $X = \ell_1$ آنگاه $X' = \ell_\infty$؛ البته به این طریق همواره دوگان پیوستهٔ X به‌دست نمی‌آید ــ مثلاً دوگان پیوستهٔ $X = \ell_\infty$ از این راه حاصل نمی‌شود. به هر حال، هلی به‌ازای $x = (x_n) \in X$ و $u = (u_n) \in X'$ یک فرم خطی روی X (فرم دو خطی روی $(X \times X')$ با تبدیل (X, X') به یک جفت دوگان) به‌صورت

$$\langle x, u \rangle = \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n u_n$$

تعریف کرد.

وی با به‌کار بردن ایده‌ای از مینکوفسکی، X' را با تعریف

$$||u|| = \sup \left\{ \frac{|\langle x, u \rangle|}{||x||} : x \neq 0 \right\}$$

نرمدار کرد.

نرم دوگانی که با این روش روی X حاصل می‌شود همان نرم اولیه روی X است. امروز این نوع جفتها در صورتی‌که $\sum x_n u_n$ مطلقاً همگرا باشد فضاهای دنباله‌ای کوته[1] و دوگانهای کوته نامیده می‌شوند. بنابر نابرابری کوشی-شوارتس، $|\langle x, u \rangle| \leq ||x|| \, ||u||$؛ پس تابعکهایی خطی که به این ترتیب به‌دست می‌آیند پیوسته یا به قول ریس، کراندار (beschränkt) هستند.

هلی سپس در صدد برآمد مسألهٔ زیر را حل کند.

(R) به‌ازای $u_i \in X'$، $(c_i) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$، مطلوب است تعیین $x \in X$ به‌طوری که

$$\text{به‌ازای هر } i \in \mathbb{N}, \quad \langle x, u_i \rangle = c_i.$$

وی مسأله را به دو قسمت تقسیم کرد:

(A) تابع خطی $f : X' \to \mathbb{C}$ را چنان پیدا کنید که به‌ازای kای مثبت و به‌ازای هر u در X' با ضابطهٔ $f(u_i) = c_i$، $|f(u)| \leq k||u||$، و

(B) پس از پیدا شدن f (اگر بتوان آن را پیدا کرد)، $x \in X$ را چنان بیابید که به‌ازای هر $u \in X'$، $\langle x, u \rangle = f(u)$.

هلی مسألهٔ (A) را به کمک استقرا و قضیه‌ای از خودش در مورد مجموعه‌های محدب حل کرد؛ وی دریافت که همواره نمی‌توان x مربوط به (B) را پیدا کرد. او (و ریس) اولین کسانی بودند که فضاهای باناخ نابازتابی را کشف کردند.

به‌طور خلاصه کارهای اصلی هلی از این قرار است:

- هلی یک فضای دنباله‌ای کلی با نرم کلی را تعریف و روی آن کار کرد
- وی مفاهیم مختلف در مورد تحدب را به‌کار بست
- اصول نظریهٔ دوگانی را معرفی کرد
- کلیت شرط پیوستگی (*) ریس را تشخیص داد و زیرینهٔ Kهایی را که در (*) صدق می‌کنند عدد ماکسیمم (Maximalzahl) نامید که امروزه به نرم تابعک خطی معروف است.

۶. هان و باناخ

هان [۲۸] و باناخ [۵] رویکرد کلی‌تری را در پیش گرفتند. هر چند هر دوی آنها همان تکنیک هلی را به‌کار بردند ــ تبدیل مسأله به حالتی که دامنهٔ تابعک فقط با یک بردار گسترش می‌یابد ــ ولی هیچ‌کدام در مورد ایدهٔ اصلی برهان قضیهٔ هان-باناخ امتیازی به هلی ندادند. اما، باناخ در استنتاج قضیه‌ای از ریس که هلی قبلاً آن را ثابت کرده بود به مقالهٔ سال ۱۹۱۲ هلی ارجاع داد؛ وی این استنتاج را به‌عنوان اولین کاربرد قضیهٔ هان-باناخ انجام داد. گذشته از آن، هان و باناخ برای شکل دادن آنالیز تابعی به‌صورتی که امروز می‌شناسیم راهی طولانی طی کردند. آنان

1. Köthe

- فضای نرمدار کلی را تعریف کردند. هان [۲۷] و باناخ [۳] این کار را مستقل از هم انجام دادند. هر دوی آنها به مفهوم کمال نیاز داشتند. باناخ بعدها [۶] با تمایز قایل شدن بین فضای باناخ و فضای نرمدار آن را در کتابش کنار گذاشت. (در این زمان وجود مفهوم کلی نرم در فضای علمی احساس می‌شد. وینر هم [۸۷] آن را به‌طور همزمان تعریف کرد).
- دستگاههای معادلات خطی را کنار گذاشتند و مسألهٔ کلی گسترش یک فرم خطی پیوسته را بررسی کردند که بر یک فضای نرمدار کلی تعریف شود، برخلاف هلی که آن را بر یک فضای دنباله‌ای تعریف کرده بود. بنابراین، قضیه را آنگونه که امروز می‌شناسیم صورتبندی کردند.
- فضای دوگان یک فضای نرمدار کامل کلی را تعریف و ثابت کردند که این نیز یک فضای نرمدار کامل نسبت به نرم استاندارد است.
- بازتابی بودن را تعریف کردند و تشخیص دادند که به‌طور کلی، یک فضای نرمدار X در دوگان دوم خود، X''، می‌نشیند.
- استقرای ترامتناهی را به‌کار بردند (هلی استقرای معمولی را به‌کار برده بود). روش استفاده از آن در اینجا به یکی از ابزارهای اصلی آنالیزپیشگان بعدی تبدیل شد.

در ۱۹۲۷، هان به نتایج سال ۱۹۲۱ هلی در زمینهٔ فضاهای باناخ حقیقی کلی بازگشت. وی با اثبات نتایج هلی از طریق استقرای ترامتناهی به جای استقرای معمولی آنها را ساده کرد و تعمیم داد. هر چند استقرای ترامتناهی را قبلاً نیز آنالیزپیشگان به‌کار برده بودند (به استثنای حل مسألهٔ اندازه به‌وسیلهٔ باناخ [۴]) اما به این‌صورت از آن استفاده نکرده بودند. البته، هان صورتبندی استقرای ترامتناهی را بر اساس لم تسورن به‌کار نبرد، زیرا این لم تا ۱۹۳۵ به‌وجود نیامده بود، بلکه از اعداد ترتیبی استفاده کرد. هان علاوه بر آنکه مسألهٔ قبلی را صرفاً با گسترش تابعکهای خطی حل کرده بود، برای اولین بار مفهوم فضای دوگان (polare Raum) را به‌طور صوری معرفی و یادآور شد که X در دوگان دومش، X''، می‌نشیند و فضای بازتابی (regularität) را تعریف کرد. نظریهٔ دوگانی به دورهٔ نوجوانی خود رسیده بود.

باناخ نیز، بدون اطلاع از کارهای هان، در ۱۹۲۹ با استفاده از خوش‌ترتیبی و استقرای ترامتناهی قضیهٔ هان-باناخ را ثابت کرد. وی تقدم هان را در این مورد در کتاب خود تأیید و قضیه را اندکی تعمیم داد: به جای اینکه فرم خطی f را مغلوب مضربی از نرم در نظر بگیرد، فرض کرد که f مغلوب یک تابعک زیرخطی باشد، اما، وی از این تعمیم هیچ استفادهٔ دیگری نکرد. هیچ‌کس دیگری هم تا معرفی فضاهای موضعاً محدب این کار را انجام نداد. سپس قضیهٔ کلی‌تر باناخ بسیار مفید واقع شد.

گزاره‌های زیر پیامدهای بی‌واسطهٔ کارهای آنان است:

- گسترشهای نرم‌نگهدار. به‌ازای هر تابعک خطی پیوستهٔ مفروض f که بر زیرمجموعه‌ای از یک فضای نرمدار تعریف شده است، گسترش خطی پیوستهٔ F که بر کل فضا تعریف شده است وجود دارد به‌طوری که $||f|| = ||F||$.
- فرمهای خطی پیوستهٔ نابدیهی. فرم خطی f بر یک فضای موضعاً محدب X پیوسته است اگر و تنها اگر نیم‌نرم پیوستهٔ p روی X وجود داشته باشد به‌طوری که $|f| \le p$. به‌علاوه، اگر X هاوسدورف باشد و $x \neq 0$، باید نیم‌نرم پیوستهٔ p بر X وجود داشته باشد به‌طوری که $p(x) \neq 0$.

قضیهٔ هان-باناخ ایجاب می‌کند که به‌ازای هر بردار غیرصفر x، تابعک خطی پیوستهٔ f بر X وجود داشته باشد به‌طوری که به‌ازای هر $x \neq 0$، $f(x) = p(x)$. در نتیجه، اگر تمام تابعکهای خطی پیوسته در نقطهٔ x صفر شوند آنگاه $x = 0$.

۷. یکتایی

در برهان متعارف (برهان باناخ) لم قضیهٔ هان-باناخ، که در آن نشان داده می‌شود که گسترش مغلوبی از یک تابعک با همان نرم بر زیرفضای خطی $[M \cup \{x\}]$ به‌ازای $x \notin M$ وجود دارد، عددی چون c به دلخواه بین دو عدد دیگر انتخاب می‌شود. در اینجاست که نایکتایی گسترش پنهان است. تیلر [۸۵] و فگوئل [۱۶] تمام فضاهای نرمدار Xای را مشخص کردند که در مورد آنها هر تابعک خطی پیوسته بر هر زیرفضای X گسترش خطی یکتایی با همان نرم دارد. این فضاها Xهایی هستند که دوگان اکیداً محدب دارند. اگر توجه خود را فقط بر یک زیرفضای M از X متمرکز کنیم آنگاه فرمهای خطی پیوسته بر M گسترشهای یکتایی با همان نرم دارند اگر و تنها اگر پوچساز $M^\perp$ از M دارای بهترین تقریب یکتا در X' باشد، یعنی،

قضیهٔ ۱. اگر M زیرفضایی خطی از فضای نرمدار X باشد آنگاه $f \in M'$ (M' دوگان پیوستهٔ M است) یک گسترش یکتا با همان نرم متعلق به X' دارد اگر و تنها اگر به‌ازای هر $g \in X'$ فقط یک

$$h \in M^\perp = \{u \in X' : u|_M = 0\}$$

وجود داشته باشد به‌طوری که

$$||g - h|| = \inf\{||g - u|| : u \in M^\perp\}.$$

این قضیه در [۶۱] تعمیم یافته است.

۸. اصل موضوع انتخاب

بی‌مناسبت نیست که در اینجا چندکلمه‌ای دربارهٔ اصل انتخاب (AC) صحبت کنیم زیرا در بسیاری از اثباتهای قضیهٔ هان-باناخ ازگونهٔ لم تسورنی این اصل استفاده می‌کنند. با این حال چند استثنای قابل توجه وجود دارد. گارنی، دوویلد و اشمتس [۲۴] برای اثبات قضیهٔ هان-باناخ برای فضاهای جداشدنی فقط اصل زیر را به‌کار می‌برند

> اصل انتخاب وابسته (ADC). اگر مجموعهٔ ناتهی X و زیرمجموعهٔ $R \subset X \times Y$ داده شده باشند، به‌طوری که به‌ازای هر $x \in X$، $\{y \in X : (x, y) \in R\} \neq \emptyset$، آنگاه به‌ازای هر $w \in X$ دنبالهٔ (x_n) در X وجود دارد به‌طوری که $x_1 = w$ و $(x_n, x_{n+1}) \in R$ به‌ازای هر $n \in \mathbb{N}$.

(گارنی و همکارانش ادعا می‌کنند که فقط اصل انتخاب شمارا را به‌کار برده‌اند. اما بلر [۸] نشان می‌دهد که آنها واقعاً از ADC استفاده کرده‌اند.) ADC از AC ضعیف‌تر است اما اصل انتخاب شمارا را ایجاب می‌کند. ضمناً ADC آنقدر قوی هست که بتوان لم اوریسون و قضیهٔ رستهٔ بئر را با استفاده

از آن ثابت کرد[۸]. یک صورت «ساختنی» دیگر متعلق به ایشیها را[۳۸] است.

یک ایراد غیرفلسفی به کاربرد AC در اثبات قضیهٔ هان-باناخ آن است که دلخواه بودن تابعک حاصل ممکن است اطلاعاتی را که از آن به‌دست می‌آید محدود کند. مالوی و پلتیه[۵۴] چارچوبی را مطرح می‌کنند که در آن می‌توان وابستگی به AC را از بین برد. مفهوم مواضع تعمیمی از مشبکهٔ مجموعه‌های باز فضا بدون توجه به نقاط آن است. مالوی و پلتیه با استفادهٔ روشمند از مواضع، صورتی از قضیهٔ هان-باناخ را در هر توپوس[۱] گروتندیک دلخواه ثابت می‌کنند.

آیا قضیهٔ هان-باناخ (HB) مانند قضیهٔ تیخونوف اصل انتخاب را نتیجه می‌دهد؟ همان‌طور که می‌دانیم، اصل انتخاب قضیهٔ فراپالایه (UT) را که می‌گوید هر پالایه در یک فراپالایه قرار دارد، نتیجه می‌دهد. (ضمناً، (UT) معادل با وجود فشرده ساخت استون-چخ برای هر فضای تیخونوف است.) هالپرن[۲۹] ثابت کرد که قضیهٔ فراپالایه اصل انتخاب را ایجاب نمی‌کند. لوش و ریل-ناردزوسکی[۴۹] و لوگزامبورگ ([۵۰]، [۵۱]، [۵۲]) ثابت کردند که قضیهٔ فراپالایه برای اثبات قضیهٔ هان-باناخ کفایت می‌کند. پینکوس ([۶۶]، [۶۷]) ثابت کرد که قضیهٔ هان-باناخ قضیهٔ فراپالایه را نتیجه نمی‌دهد. بنابراین، سلسله‌مراتب غیربازگشتی $\mathrm{AC} \Rightarrow \mathrm{UT} \Rightarrow \mathrm{HB}$ برقرار است.

۹. حالت مختلط

صورت مختلط قضیهٔ هان-باناخ به کشف ارتباط ذاتی بین قسمتهای حقیقی و موهومی تابعک خطی مختلط f، یعنی

$$\operatorname{Re} f(x) = -\operatorname{Im} f(ix)$$

وابسته است. با این تبدیل حالت مختلط به حالت حقیقی، صورت مختلط قضیه نخستین بار به‌وسیلهٔ موری[۵۵] به‌ازای $L_p[a,b]$، $p > 1$، ثابت شد. اما روش اثبات وی کاملاً کلی بود و بوننبلوست و سوبچک[۱۰] با استفاده از این روش، قضیه را در مورد فضاهای نرمدار مختلط دلخواه ثابت کردند. ضمناً آنان نخستین کسانی بودند که قضیه را قضیهٔ هان-باناخ نامیدند. همچنین سوخوملنیف[۸۲] و اونو[۵۹] پس از تحویل قضیه به حالت حقیقی، آن را در مورد فضاهای برداری روی میدان مختلط و کواترنیونها ثابت کردند. در مقابلِ روشهای تحویل به حالت حقیقی، هولبروک[۳۳] آن را به روشی ثابت کرد که به انتخاب میدان اسکالر ارشمیدسی‌مقدار $\mathbb{R}$، $\mathbb{C}$ یا کواترنیونها بستگی نداشت. وی از روش ناخبین، که در بخش بعدی مطرح می‌شود، همراه با یک «ویژگی اشتراک» (لم ۱ هولبروک) که هر سه میدان مشترکاً از آن برخوردارند، استفاده کرد.

۱۰. مسأله‌های وابسته

۱.۱۰ مسأله‌های مربوط به بُرد

توفیق قضیهٔ هان-باناخ باعث تحقیقاتی در مسائل مربوط به گسترش‌پذیری پیوستهٔ نگاشتهای خطی پیوستهٔ کلی‌تر شد. یکی از کارها جایگزین کردن میدان $\mathbb{K}$ با فضای نرمدار Y بود. فرض کنید به‌ازای فضاهای نرمدار حقیقی X و Y، A نگاشتی خطی و پیوسته از یک زیرفضای M از X به Y

1. topos

باشد. یک گسترش خطی پیوسته چون $\overline{A}$ از A به X را با نرمی برابر نرم A پیدا کنید. می‌گوییم Y گسترش‌پذیر است اگر به‌ازای هر زیرفضای M از هر فضای نرمدار حقیقی X، این $\overline{A}$ وجود داشته باشد.

$$\begin{array}{lcccl} \overline{A}: & X & & & \|\overline{A}x\| \le k\|x\| \\ & | & \searrow & & \|\overline{A}\| = \|A\| \\ A: & M & \longrightarrow & Y & \|Ax\| \le k\|x\| \end{array}$$

باناخ و مازور[۷] به سرعت ثابت کردند که مثالهایی وجود دارد که در آنها $\overline{A}$ وجود ندارد. اما حالت خاص $Y = \mathbb{R}^n$، $n > 1$ را با هر یک از نرمهای $\|\cdot\|_p$، $1 \le p \le \infty$ در نظر بگیرید. هر چند توپولوژی $\mathbb{R}^n$ نسبت به تمام این نرمها یکی است، $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ گسترش‌پذیر است اما هیچ‌کدام از $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$ها، $1 \le p < \infty$، گسترش‌پذیر نیست. چنانکه ناخبین[۵۶] و گودنر[۲۵] ثابت کردند، فضای نرمدار حقیقی Y گسترش‌پذیر است، اگر و تنها اگر دارای ویژگی زیر باشد.

ویژگی اشتراک دودویی. هر دسته از گویهای بستهٔ دوبه‌دو متقاطع، اشتراک ناتهی دارد. (ناخبین[۵۶]، گودنر[۲۵]، کلی[۴۰]، ر.ک. [۵۸]).

مثالهایی از فضاهای گسترش‌پذیر. (الف) فضای نرمدار اقلیدسی $\mathbb{R}^2$ ویژگی اشتراک دودویی را ندارد زیرا می‌توانیم سه دایرهٔ دوبه‌دو متقاطع رسم کنیم که اشتراکشان تهی باشد؛ اساساً به همان دلیل، هیچ‌کدام از $\mathbb{R}^n$ها با هیچ‌یک از نرمهای $\|\cdot\|_p$، $1 \le p < \infty$ گسترش‌پذیر نیست.

(ب) $B(T, \mathbb{R})$، فضای توابع کراندار بر مجموعهٔ دلخواه T با نرم زبرینه دارای ویژگی اشتراک دودویی است. می‌توان $T = \mathbb{N}$ یا $T = \{1, 2, \dots, n\}$ را انتخاب کرد و به‌ترتیب ℓ_∞ یا $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ را به‌دست آورد. هر چند ℓ_∞ از ویژگی اشتراک دودویی برخوردار است، زیرفضای بستهٔ c_0 آن متشکل از تمام پوچ دنباله‌های ℓ_∞ این ویژگی را ندارد؛ بنابراین ویژگی اشتراک دودویی ارثی نیست. همچنین این مثال c_0 نشان می‌دهد که نرمهای زبرینه، برخلاف ماهیت «سه‌بعدی» گویهایی که به‌دست می‌دهند، همواره فضاهای گسترش‌پذیر ایجاد نمی‌کنند.

(پ) فضای خطی $C(T, \mathbb{R})$ متشکل از تمام نگاشتهای حقیقی‌مقدار پیوسته بر فضای هاوسدورف فشردهٔ T با نرم زبرینه را در نظر بگیرید. اگر T فوق‌العاده ناهمبند باشد [یعنی مجموعه‌های مجزا بستارهای مجزا داشته باشند، یا معادل آن، مجموعه‌های باز بستار باز داشته باشند] آنگاه $C(T, \mathbb{R})$ ویژگی اشتراک دودویی را دارد. ضمناً، ناهمبندی فوق‌العاده مفهومی است که استون هنگام اثبات این گزاره معرفی کرد که هر جبر بولی کامل، یکریختِ جبر بولی با جبر بولی زیرمجموعه‌های باز و بستهٔ[۱] یک فضای هاوسدورف فشردهٔ فوق‌العاده ناهمبند است. چون مجموعهٔ توانی هر مجموعه یک جبر بولی کامل است، بنابراین، فضاهای فوق‌العاده ناهمبند فراوان‌اند.

(ت) بیایید برای لحظه‌ای فضاهای نرمدار را کنار بگذاریم. فرض کنید X یک فضای موضعاً محدب روی $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ یا $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ باشد؛ همچنین فرض کنید S مجموعه‌ای دلخواه و $\mathbb{K}^S$ مجهز به توپولوژی تیخونوف باشد.

1. clopen

هر نگاشت خطی پیوستهٔ A را که دامنه‌اش زیرفضای دلخواه M از X و بردش این حاصلضرب باشد می‌توان به نگاشت خطی پیوسته‌ای بر تمام X گسترش داد. چون حاصلضربهای نامتناهی فضاهای نرمدار[۵۸] هیچوقت نرم‌پذیر نیستند، این نتیجه‌ای از نوع دیگر است. توجه کنید که اگر S متناهی باشد، آنگاه توپولوژی تیخونوف همان توپولوژی ناشی از نرم زبرینه است.

فضای گسترش‌پذیر باید فضای باناخ باشد، زیرا باید بتوان نگاشت همانی $Y \to Y : ۱$ را روی $\overline{Y}$، تکمیل‌شدهٔ نرمی Y، به $\overline{۱}$ گسترش داد. اگر (y_n) یک دنبالهٔ کوشی در Y باشد آنگاه به $y \in \overline{Y}$ همگراست. چون $\overline{۱}$ پیوسته است، $\overline{۱}y_n = y_n \to \overline{۱}y \in Y$ (بنابر تعریف گسترش‌پذیری، Y، برد $\overline{۱}$، برابر است با برد ۱).

ویژگی دیگری که فضای گسترش‌پذیر Y باید داشته باشد قابلیت تصویرشوندگی است. اگر X یک فضای نرمدار خطی دلخواه و شامل Y باشد آنگاه یک تصویر پیوستهٔ E از X بر روی Y و با نرم ۱ باید وجود داشته باشد. به بیان دیگر، Y در هر فضایی که با نرم نشانده شده باشد مکمل توپولوژیک می‌پذیرد. چون هیچ تصویر پیوسته‌ای از ℓ_∞ به روی c_0 وجود ندارد ([۵۸]، مثال ۸.۵ـ۱)، c_0 گسترش‌پذیر نیست.

اصول اصلی گسترش‌پذیری فضاهای باناخ حقیقی در قضیهٔ زیر آمده است:

قضیهٔ ۲. [ناخبین [۵۶]، گودنر[۲۵]، کلی[۴۰]] برای فضای نرمدار حقیقی Y، گزاره‌های زیر هم‌ارزند

(الف) Y گسترش‌پذیر است

(ب) Y تصویرشونده است

(پ) Y دارای ویژگی اشتراک دودویی است

(ت) $Y = C(T, \mathbb{R})$ با نرم زبرینه است، که در آن T یک فضای هاوسدورف فشردهٔ فوق‌العاده ناهمبند است

(ث) Y یک مشبکهٔ برداری مرتب ارشمیدسی شامل واحد ترتیبی است.

حالت مختلط. ویژگی اشتراک دودویی نمی‌تواند گسترش‌پذیری را برای فضاهای مختلط مشخص کند. مثلاً $\mathbb{C}$ گسترش‌پذیر است اما ویژگی اشتراک دودویی را ندارد. هاسومی[۳۰] هم‌ارزی (الف) و (ت) را در مورد فضاهای مختلط ثابت کرد. وی نشان داد که فضای نرمدار مختلط Y گسترش‌پذیر است اگر و تنها اگر Y با $C(T, \mathbb{C})$ یکریخت نرمی باشد، که در آن T یک فضای هاوسدورف فشردهٔ فوق‌العاده ناهمبند است.

۲.۱۰ مسأله‌های مربوط به دامنه

مسألهٔ شناسایی فضاهای نرمدار X را با این ویژگی که هر نگاشت خطی پیوستهٔ A از هر زیرفضای M به هر فضای نرمدار Y گسترشی خطی با همان نرم داشته باشد، در نظر بگیرید.

$$\begin{array}{llcll} \overline{A}: & X & & \text{ثابت} & \|\overline{A}\| = \|A\| \\ & | & \searrow & & \\ A: & M & \longrightarrow & Y & \|Ax\| \le k\|x\| \end{array}$$

این مسأله را کاکوتانی[۳۹] در حالت حقیقی و بوننبلوست[۱۰] در حالت مختلط حل کردند. Xهایی که در این شرایط صدق می‌کنند آنهایی هستند که یا $\dim X \le ۲$ و یا X یک فضای هیلبرت باشد!

۳.۱۰ زِبَرفضاها

فضای باناخ M را در نظر بگیرید. به‌ازای چه Mهایی هر نگاشت خطی پیوستهٔ A از M به هر فضای نرمدار Y گسترشی به زِبَرفضای دلخواه X از M دارد؟

$$\begin{array}{llcll} \overline{A}: & X & & X \text{ دلخواه} & \|\overline{A}\| = \|A\| \\ & | & \searrow & & \\ A: & M & \longrightarrow & Y & M \text{ ثابت} \end{array}$$

معلوم شده است که ردهٔ این‌گونه Mها ردهٔ فضاهای گسترش‌پذیر است.

۱۱. تابعکهای زیرخطی مینیمال

رویکرد جالب دیگری به قضیهٔ هان‌ـباناخ در آثار کونیگ ([۴۱]، [۴۲]، [۴۴]، [۴۶])، فوخشتاینر و کونیگ[۲۲] و سیمونز ([۷۸]، [۷۹]، [۸۰]) عرضه شده است. این روش نه تنها برهان متفاوتی از این قضیه به‌دست می‌دهد بلکه راه تعمیم آن را به قضیه‌های کلی‌تر از نوع هان‌ـباناخ نشان می‌دهد. خلاصهٔ این روش را در زیر می‌آوریم.

تعریف ۳. تابعکهای زیرخطی. به‌ازای هر فضای برداری X، نگاشت زیرجمعی و مثبت همگن $p : X \to \mathbb{R}$ را یک تابعک زیرخطی می‌نامیم. $X^\#$ ردهٔ تمام تابعکهای زیرخطی را بر X نشان می‌دهد.

$X^\#$ را نقطه به نقطه مرتب می‌کنیم: $p \le q$ اگر و تنها اگر به‌ازای هر $x \in X$، $p(x) \le q(x)$. هر تابعک زیرخطی مینیمال عضو مینیمالی از $(X^\#, \le)$ است.

- به‌ازای فضای برداری حقیقی X، تابعک زیرخطی p بر X خطی است اگر و تنها اگر مینیمال باشد.

کونیگ و همکارانش جهت اثباتهای معمولی قضیهٔ هان‌ـباناخ را برگرداندند به این ترتیب که در روش آنها دیگر مسألهٔ جستجوی گسترش ماکسیمال مطرح نیست بلکه پیدا کردن تابعک زیرخطی مینیمال مطرح است. در این روش، رشتهٔ استدلالهای زیر در مورد فضای برداری حقیقی X به‌کار می‌رود.

۱. به‌ازای هر $p \in X^\#$ تابعک خطی h بر X وجود دارد به‌طوری که $h \le p$.

۲. به‌ازای هر فرم خطی f که با ضابطهٔ $f \le p$ بر زیرفضای M از X تعریف شده است، $q \in X^\#$ وجود دارد و به‌طوری که بر M، $f \le q$، و بر X، $q \le p$.

۳. بنابر (۱)، فرم خطی F با دامنهٔ X وجود دارد به‌طوری که $F \le q$، که در آن، q مانند qی در (۲) است.

۴. چون بر M داریم $F \le q \le f$ (از مینیمال بودن f) نتیجه می‌شود که بر M، $F = f$.

بنابراین، F همان گسترش مغلوب (یعنی مغلوب p) از f به X است که می‌خواستیم.

۱۲. حالت ناارشمیدسی

به‌جای در نظر گرفتن فضاهای نرمدار روی $\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$، می‌توان یک فضای نرمدار X روی یک میدان F همراه با یک قدرمطلق را در نظر گرفت. این نوع فضاها به‌خصوص وقتی مورد توجه‌اند که نرم و قدرمطلق ناارشمیدسی باشند به این معنی که هر یک از آنها در نابرابری مثلثی قوی یا فرامتریک

$$(۱) \qquad \|x+y\| \le \max(\|x\|, \|y\|) \quad \text{به‌ازای هر } x, y \in X$$

صدق کنند. در نتیجه، هندسهٔ ناارشمیدسی دارای ویژگیهای زیر است:

(الف) هر نقطهٔ متعلق به قرص $\{y \in X : \|y-x\| \le r\}$، $r > ۰$، یک مرکز این قرص است.

(ب) تمام «مثلثها» (یعنی سه‌تاییهای مرکب از نقاط) متساوی‌الاضلاع‌اند و

(پ) اگر دو دایره با هم تلاقی کنند، هم‌مرکزند؛ به‌علاوه، هر گردایهٔ گویهای بستهٔ دوبه‌دو متقاطع کلاً مرتب است.

آنالیز تابعی ناارشمیدسی این فرصت را به ما می‌دهد که از خود بپرسیم آنالیز تابعی بدون قضیهٔ هان‌ـباناخ به چه صورتی می‌بود؟ در اینجا انشعابی پیش می‌آید. آنالیز ناارشمیدسی در مواردی که قضیهٔ هان‌ـباناخ برقرار است کاملاً شبیه آنالیز معمولی است و در موارد دیگر کاملاً متفاوت است. با این حال، تابعک خطی $f : X \to F$ باز هم پیوسته است اگر و تنها اگر بر گوی واحد X کراندار باشد. بنابر (پ) در اینجا ویژگی اشتراک دودویی هم‌ارز است با

کمال کروی. اشتراک هر دنبالهٔ نزولی از گویهای بسته ناتهی است.

مثلاً $\mathbb{R}$ به‌طور کروی کامل است. اینگلتون [۳۶] با جرح و تعدیل معیار ویژگی اشتراک دودویی ناخبین برای شناسایی فضاهای گسترش‌پذیر نشان داد که فضای باناخ ناارشمیدسی Y گسترش‌پذیر است اگر و تنها اگر به‌طور کروی کامل باشد. کمال کروی به ظاهر شبیه کامل بودن است ــ یعنی اینکه اشتراک هر دنبالهٔ نزولی از گویهای بسته که قطرهای آنها به ۰ میل کنند ناتهی است ــ اما به‌وضوح قوی‌تر از آن است. اونو [۶۰] قضیهٔ اینگلتون را تعمیم داد. بررسی کاملی از ویژگی گسترش هان‌ـباناخ در فضاهای ناارشمیدسی در مقالهٔ پرز‌ـگارسیا [۶۳] انجام شده است.

۱۳. صورتهای قضیه در فضاهای مرتب

فرض کنید فضاهای حقیقی X و Y به‌جای نرمدار بودن مرتب باشند و $p : X \to Y$ تابعکی زیرخطی بر X باشد.

$$\begin{array}{lll} \overline{A} : \ X & & \overline{A} \le p \\ & \searrow & \\ A : \ M & \longrightarrow \ Y & A \le p \end{array}$$

اکنون هدف ما مشخص کردن فضاهای Yای است که به‌ازای آنها گسترشهای خطی $\overline{A}$ که روی سراسر X مغلوب pاند وجود داشته باشند.

به‌طوری که در [۳۷] ثابت شده است، Y به این معنا «گسترش‌پذیر» است اگر و تنها اگر ویژگی کوچکترین کران بالا را داشته باشد، یعنی هر زیرمجموعهٔ Y که از بالا کراندار باشد زبرینه داشته باشد. به زبان رایج در مبحث فضاهای مرتب، این‌گونه فضاها را [مرتب] کامل می‌نامند.

۱۴. صورت هندسی قضیه

هر صفحه $\mathbb{R}^۳$ را به سه بخش محدب تقسیم می‌کند: خود صفحه و دو «طرف» آن. ابر صفحه‌ها (تعریف در زیر) نیز کار مشابهی انجام می‌دهند: آنها یک فضای برداری حقیقی را به زیربخشهای محدب $\{x : f(x) = a\}$، $\{x : f(x) > a\}$ و $\{x : f(x) < a\}$ تجزیه می‌کنند. به‌علاوه (اساساً) تناظرهای ۱ـ۱ زیر برقرارند:

$$\text{تابعک خطی } f \quad \longleftrightarrow \quad f^{-1}(۱) = \text{ابر صفحهٔ } H$$

$$\text{گوی } B \text{ (مجموعهٔ باز محدب)} \quad \longleftrightarrow \quad B = U_p = \{x : p(x) < ۱\}$$

که در آن p یک نیم‌نرم پیوسته است

$$|f| \le p \quad \longleftrightarrow \quad H \cap U_p \emptyset$$

بنابراین، می‌توانیم چشم‌انداز متفاوتی از قضیهٔ هان‌ـباناخ ترسیم کنیم. یعنی آن را نه به‌صورت گزاره‌ای دربارهٔ گسترش‌پذیری بلکه به‌صورت گزارهٔ جداسازی زیر در نظر بگیریم:

> اگر یک خط (زیرفضای خطی) یک گوی (مجموعهٔ محدب) را قطع نکند آنگاه صفحه‌ای (ابرصفحه‌ای) وجود دارد که شامل آن خط (زیرفضای خطی) است و گوی (مجموعهٔ محدب) را قطع نمی‌کند.

مازور صورتی از قضیهٔ هان‌ـباناخ را در این قالب در سال ۱۹۳۳ ثابت کرد، و بعدها بورباکی آن را صورت هندسی قضیهٔ هان‌ـباناخ نامید.

قضیهٔ ۴. صورت هندسی. در هر فضای توپولوژیک X روی $\mathbb{K}$، اگر چندگونای خطی M زیر مجموعهٔ محدب باز G را قطع نکند، آنگاه ابر صفحهٔ بسته‌ای چون H که شامل M است وجود دارد که G را قطع نمی‌کند.

۱.۱۴ قضیه‌های جداسازی

فرض کنید X' دوگان پیوستهٔ فضای موضعاً محدب X باشد. به‌ازای زیر مجموعه‌های محدب مجزای A و B از X، و فرم خطی نابدیهی f بر X، و tای متعلق به $\mathbb{R}$ قرار می‌دهیم $H = f^{-1}(t)$. می‌گوییم A و B به‌وسیلهٔ ابرصفحهٔ H از هم جدا شده‌اند [یا اکیداً از هم جدا شده‌اند] اگر به‌ازای هر $a \in A$ و هر $b \in B$، $f(a) \le t \le f(b)$ [یا $f(a) < t < f(b)$].

(الف) به‌ازای بردارهای متمایز x و y، $f \in X'$ وجود دارد به‌طوری که $f(x) \neq f(y)$؛ اگر x و y خطی‌ٔ مستقل باشند آنگاه fای وجود دارد که $f(x) = ۰$ و $f(y) = ۱$.

(ب) اگر x به زیرفضای بستهٔ M تعلق نداشته باشد، تابعک خطی پیوستهٔ fای بر X وجود دارد که بر M صفر است و بر x صفر نیست.

(پ) اگر $x \notin \mathrm{cl}\{\circ\}$، تابعک خطی پیوستهٔ f بر X وجود دارد به‌طوری که $f(x) \neq \circ$.

(ت) اگر A و B زیرمجموعه‌های ناتهی مجزای بازِ محدبی از فضای برداری حقیقی X باشند آنگاه A و B به‌وسیلهٔ یک ابرصفحهٔ بسته اکیداً از هم جدا می‌شوند.

(ث) اگر A و B زیرمجموعه‌های ناتهی مجزای محدبی از X باشند به‌طوری که A بسته و B فشرده باشد، آنگاه A و B به‌وسیلهٔ یک ابرصفحهٔ بسته اکیداً از هم جدا می‌شوند.

به‌عنوان مثالی از کاربردهای این دیدگاه، قضیهٔ زیر از جیمز([۳۴]، ص۱۶۱) را می‌آوریم:

یک فضای باناخ حقیقی بازتابی است اگر و تنها اگر هر جفت از زیرمجموعه‌های محدب بستهٔ مجزای آن را، که یکی از آنها کراندار باشد، بتوان با ابرصفحه‌ای اکیداً از هم جدا کرد.

۱۵. نکته‌های پایانی

امروزه خانوادهٔ قضیه‌های هان‌ـباناخ آنچه را امروز در زمینهٔ مطالب مربوطه وجود دارد به شایستگی توصیف می‌کند و تحقیق در این زمینه به یک خط تحقیقاتی پر رونق ریاضی تبدیل شده است. در اینجا فقط چند مورد از دستاوردهای جدید را نام می‌بریم:

- بورگین[۱۱] با استفاده از آنالیز نااستاندارد، مشابه قضیهٔ هان‌ـباناخ را برای «ابرتابعکها» به‌دست آورد.
- دینگ[۱۴] شرایطی برای فضایی که به‌طور غیرموضعی محدب است، نظیر ℓ_p، $\circ < p < ۱$ به‌دست آورد که ویژگی گسترش هان‌ـباناخ را داشته باشد.
- پلونیا[۶۸] این نتیجه را گرفت: فرض کنید C به‌جای اینکه زیرفضای خطی فضای خطی حقیقی X باشد، زیرمجموعهٔ ناتهی محدبی از X باشد. همچنین فرض کنید $p : X \to \mathbb{R}$ تابعی محدب و $f : C \to \mathbb{R}$ تابعی مقعر باشد به‌طوری که روی C، $f(x) \leq p(x)$. دراین‌صورت تابع خطی $g : X \to \mathbb{R}$ و عدد ثابت a وجود دارند به‌طوری که $g(x) + a \leq p(x)$ به‌ازای $x \in X$ و $f(x) \leq p(x) + a$ به‌ازای $x \in C$.
- روان[۶۹] یک قضیهٔ هان‌ـباناخ برای تابعکهای دو زیرخطی عرضه کرد.
- سوریونن[۸۱] یک قضیهٔ هان‌ـباناخ در «فضاهای تعامد خطی»، فضاهای برداری چپ روی یک حلقهٔ تقسیم با یک رابطهٔ تعامدی مجرد عرضه کرد.
- سو[۸۳]، یک قضیهٔ هان‌ـباناخ برای خانواده‌ای از تابعکها روی فضاهای نرم‌دار احتمالاتی عرضه کرد.

آیا این جریان خاتمه خواهد یافت؟ عجیب این است که نمی‌دانیم.

مراجع

1. Bachman, G. and L. Narici [1966] *Functional analysis*, Academic Press, New York.
2. Balakrishnan, A. [1981] *Applied functional analysis*, 2nd ed., Springer-Verlag, New York.
3. Banach, S. [1923a] *Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales*, Fund. Math. **3**, 133-181.
4. Banach, S. [1923b] *Sur le problème de la mesure*, Fund. Math. **4**, 7-33.
5. Banach, S. [1929] *Sur les fonctionelles linéaires*, Studia Math. **1**, 211-216 and 223-229.
6. Banach, S. [1932] *Théorie des opérations linéaires*, Chelsea, New York.
7. Banach, S. and S. Mazur [1933] *Zur Theorie der linearen Dimension*, Studia Math. **4**, 100-112.
8. Blair, Ch. E. [1977] *The Baire category theorem implies the principle of dependent choices*, Bull. Acad. Polon. Sciences XXV, 933-934.
9. Bohnenblust, H. [1942] *A characterization of complex Hilbert spaces*, Port. Math. **3**, 103-109.
10. Bohnenblust, H. and A. Sobczyk [1938] *Extensions of functionals on complex linear spaces*, Bull. Amer. Math. Soc. **44**, 91-93.
11. Burgin, M. [1991] *On the Hahn-Banach theorem for hyperfunctionals* (Russian), Dokl. Akad. Nauk Ukrain. SSR, 9-14.
12. Buskes, G. [1993] *The Hahn-Banach theorem surveyed*, Diss. Math. **327**.
13. Dieudonné, J. [1981] *History of functional analysis*, North-Holland, New York.
14. Ding, G. [1992] *The Hahn-Banach extension property in not locally convex topological linear spaces* (Chinese), Adv. in Math. (China) **21**, 427-431.
15. Dunford, N. and J. Schwartz [1958] *Linear operators, Part I: General theory*, Wiley-Interscience, New York.
16. Foguel, S. [1958] *On a theorem by A. E. Taylor*, Proc. Amer. Math. Soc. **9**, 325.
17. Fréchet, M. [1904] *Generalisation d'un théorème de Weierstrass*, C. R. Acad. Sci. **139**, 848-850.
18. Fréchet, M. [1905] *Sur les opérations linéaires*, Trans. Amer. Math. Soc. **6**, 134-140.
19. Fréchet, M. [1906] *Sur quelques points du calcul fonctionnel*, Rend. Circ. mat. Palermo **22**, 1-74.
20. Fréchet, M. [1908] *Essai de géométrie analytique à une infinité de coordonnées*, Nouv. Ann. de Math. (4) **8**, 97-116 and 289-317.
21. Feinberg, M., and R. Lavine [1983] *Thermodynamics based on the Hahn-Banach Theorem: The Clausius inequality*, Arch. Rat. Mech. and Anal. **82**, 203-293.

22. Fuchsteiner, B. and H. König, [1978] *New versions of the Hahn-Banach theorem*, Proc. 2nd International Conference on General Inequalities, Math. Research Institute, Oberwolfach Black Forest, July 30-August 5, 1978, E. Beckenbach, ed., International Series of Numerical Math., **47**, Birkhäuser Verlag, Basel, 255-266.

23. Garabedian, P. and M. Schiffman [1954] *On solution of partial differential equations by the Hahn-Banach theorem*, Trans. Amer. Math. Soc. **76**, 288-299.

24. Garnir, H., M. de Wilde and J. Schmets [1968] *Analyse fonctionelle I*, Birkhäuser, Basel.

25. Goodner, D. [1950] *Projections in normed linear spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **69**, 89-108.

26. Hausdorff, F. [1914] *Grundzüge der Mengenlehre*, Veit, Leipzig.

27. Hahn, H. [1922] *Über Folgen linearer Operationen*, Monatsh. Math. und Phys. **32**, 1-88.

28. Hahn, H. [1927] *Über linearer Gleichungssysteme in linearer Räumen*, J. Reine Angew. Math. **157**, 214-229.

29. Halpern, J. [1964] *The independence of the axiom of choice from the Boolean prime ideal theorem*, Fund. Math. **55**, 57-66.

30. Hasumi, M., *The extension property of complex Banach spaces*, Tohoku Math. J. (2), **10**, 1958, 135-142.

31. Helly, E. [1912] *Über linearer Funktionaloperationen*, Sitzungsber. der math. Naturwiss. Klasse der Akad. der Wiss. (Wien), **121**, 265-297.

32. Helly, E. [1921] *Über Systeme linearer Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten*, Monatsh. fur Math. und Phys., **31**, 60-91.

33. Holbrook, J. [1975] *Concerning the Hahn-Banach theorem*, Proc. A. M. S. **50**, 322-327.

34. Holmes, R. [1975] *Geometric functional analysis and its applications*, GTM 24, Springer-Verlag, New York.

35. Horvath, J. [1973] *Locally convex spaces* in *Summer School on Topological Vector Spaces*, L. Waelbroeck, ed., Lecture Notes in Mathematics 331, Springer-Verlag, New York, 41-83.

36. Ingleton, A. [1952] *The Hahn-Banach theorem for non-Archimedean fields*, Proc. Camb. Phil. Soc. **48**, 41-45.

37. Ioffe, A. [1981] *A new proof of the equivalence of the Hahn-Banach extension and the least upper bound properties*, Proc. A. M. S. **82**, 385-389.

38. Ishihara, H. [1989] *On the constructive Hahn-Banach theorem*, Bull. London Math. Soc. **21**, 79-81.

39. Kakutani, S., [1941] *Concrete representations of abstract (M)-spaces*, Ann. of Math. **42**, 994-1024.

40. Kelley, J. [1952] *Banach spaces with the extension property*, Trans. Amer. Math. Soc. **72**, 323-326.

41. König, H. [1968] *Über das von Neumannsche Minimax theorem*, Arch. Math. **23**, 500-508.

42. König, H. [1970] *On certain applictions of the Hahn-Banach and minimax theorems*, Arch. Math. **21**, 583-591.

43. König, H. [1972] *Sublineare Funktionale*, Arch. Math. **21**, 583-591.

44. König, H. [1978] *Neue Methoden und Resultate aus Funktionalanalysis und konvexer Analysis*, Oper. Res. Verf. **28**, 6-16.

45. König, H. [1980] *Der Hahn-Banach Satz von Rodé für unendlichstellige Operationen*, Arch. Math. **35**, 292-304.

46. König, H. [1982] *On some basic theorems in convex analysis*, in *Modern applied mathematics: Optimization and operations research*, B. Korte, ed., North Holland, New York: 106-144.

47. Krein, M. and M. Rutman [1948] *Linear operators leaving invariant a cone in Banach space*, Uspekhi Mat. Nauk 3, **1** (23), 3-95; see also Trans. Amer. Math. Soc. **26**, 1950.

48. Leigh, J. [1980] *Functional analysis and linear control theory*, Academic Press, New York.

49. Łoś, J. and C. Ryll-Nardzewski [1951] *On the applications of Tychonoff's theorem in mathematical proofs*, Fund. Math. **38**, 233-237.

50. Luxemburg, W. [1962] *Two applications of the method of construction by ultrapowers to analysis*, Bull. Amer. Math. Soc. **68**, 416-419.

51. Luxemburg, W. [1967a] *Beweis des Satzes von Hahn-Banach*, Arch. Math. (Basel) **18**, 271-272.

52. Luxemburg, W. [1967b] *Reduced powers of the real number system and equivalents of the Hahn-Banach theorem*, Technical Report 2, Cal. Inst. Tech.

53. Minkowski, H. [1896], *Geometrie der Zahlen*, Teubner, Leipzig.

54. Mulvey, C. and J. Pelletier [1991], *A globalization of the Hahn-Banach Theorem*, Adv. Math. **89**, 1-59.

55. Murray, F. [1936] *Linear transformations in $L_p, p > 1$*, Trans. Amer. Math. Soc. **39**, 83-100.

56. Nachbin, L. [1950] *A theorem of Hahn-Banach type for linear transformations*, Trans. Amer. Math. Soc. **68**, 28-46.

57. Narici, L., E. Beckenstein and G. Bachman [1971] *Functional analysis and valuation theory*, Marcel Dekker, New York.

58. Narici, L. and E. Beckenstein [1985] *Topological vector spaces*, Marcel Dekker, New York.

59. Ono, T. [1953a] *On the extension property of normed spaces over fields with non-Archimedean valuations*, J. Math. Soc. Japan **5**, 1-5.

60. Ono, T. [1953b] *Uniqueness of Hahn-Banach extension and unique best approximations*, Nagoya Math. J. **6**, 171-176.

61. Park, S. [1993] *A little generalization of the Hahn-Banach extension property*, J. Korean Math. Soc. **30**, 139-150.

62. Peano, G. [1888] *Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di H. Grassmann preceduto dalle operazioni della logica deduttiva*, Torino.

63. Pérez-Garcia, C. [1992] *The Hahn-Banach extension property in p-adic analysis*, in *P-adic functional analysis*, Lecture Notes in Pure and Appl. Math. **137**, Marcel Dekker, New York, 127-140.

64. Phelps, R. [1960] *A generalization of the Hahn-Banach theorem*, Trans. Amer. Math. Soc. **95**, 238-255.

65. Pincherle, S. [1954] *Opere scelte*, 2 vol., Cremonese, Roma.

66. Pincus, D. [1972] *Independence of the prime ideal theorem from the Hahn-Banach theorem*, Bull. Amer. Math. Soc. **78**, 766-770.

67. Pincus, D. [1974] *The strength of the Hahn-Banach theorem*, Proc. Victoria Symposium on Nonstandard Analysis, Springer-Verlag, New York, 203-208.

68. Plewnia, J. [1993] *A generalization of the Hahn-Banach theorem, Ann. Polon. Math.* **58**, 47-51.

69. Ruan, G. [1992] *The dual Hahn-Banach theorem* (Chinese), Natur. Sci. J. Zingtan Univ. **14**, 52-57.

70. Rodriguez-Salinas Palero, B. [1971] *Algunos problemas y teoremas de extensión de aplicaciones lineales, Rev. Real Acad. Ci Exact. Fis. Natur. Madrid* **65**, 677-704.

71. Riesz, F. [1910] *Sur certain systèmes d'équations fonctionelles et l'approximation des fonctions continues*, Académie des Sciences, Paris, Comptes Rendus **150**, 674-677.

72. Riesz, F. [1911] *Sur certain systèmes singuliers d'équatıons intégrales*, Ann. Sci. École Norm. Sup. **28**, 33-62.

73. Riesz, F. [1913] *Les Systèmes d'équations Linéaires à une infinité d'inconnues*, Gauthier-Villars, Paris.

74. Riesz, F. [1960] *Oeuvres complètes*, 2 vol., Gauthier-Villars, Paris.

75. Rolewicz, S. [1987] *Functional analysis and control theory*, uthiePWN-Reidel, Warsaw.

76. Saccoman, J. [1992] *Extension theorems and the problem of measure*, Riv. Mat. Univ. Parma (5) **1**, 287-293.

77. Schmidt, E. [1908] *Über die Auflösung linearer Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten*, Rend. Palermo XXV, 53-77.

78. Simons, S. [1970a] *Minimal sublinear functionals*, Studia Math. **37**, 37-56.

79. Simons, S. [1970b] *Formes souslinéaires minimales*, Sém. Choquet 1970/71, no. 23.

80. Simons, S. [1975] *Convergence theorems, Hahn-Banach and Choquet theorems, minimax theorem and James's theorem*, in *Analyse fonctionelle et applications*, (Proceedings of a conference in Rio de Janeiro, August 1972), L. Nachbin, ed., Hermann, Paris, 271-276.

81. Sorjonen, P. [1992] *Hahn-Banach extension properties in linear orthogonality spaces*, Funct. Approx. Comment. Math. **20**, 21-28.

82. Soukhomlinov, G. A. [1938] *On the extension of linear functionals in complex and quaternion linear spaces*, Matem. Sbornik **3**, 353-358 [Russian with German summary].

83. Su, Y. F. [1990] *The Hahn-Banach theorem for a class of linear functionals in probabilistic normed spaces and its applications* (Chinese), Neimenggu Shida Xuebao Ziran Kexue Ban, 16-22.

84. Volterra, V., *Opere matematiche*, 5 vol., Acc. dei Lincei, 1954-1962.

85. Taylor, A. [1939] *The extension of linear functionals*, Duke Math. J. **5**, 538-547.

86. Weber, H. *Lehrbuch der algebra*, 2nd ed., 3 vol., Braunschweig, Vieweg, 1898-1908.

87. Wiener, N. [1922] *Limit in terms of continuous transformation*, Bull. Soc. Math. Fr. **50**, 119-134.

* * * * * *

• Lawrence Narici and Edward Beckenstein, "The Hahn-Banach theorem: The life and times", *Topology and its Applications*, (2,3) **77** (1997) 193-211.

* لارنس ناریچی، دانشگاه سینت‌جان، آمریکا
ادوارد بکنشتاین، دانشگاه سینت‌جان، آمریکا