میراث آبل در هندسهٔ جبری•

فیلیپ گریفیث*

ترجمهٔ حمید هزاری

- مقدمه
- ریشه‌های قضیهٔ آبل
- قضیهٔ آبل و چند پیامد آن
- عکسهای قضیهٔ آبل
- میراث در هندسهٔ جبری ــ دو حدس
  - ــ بافته‌ها
  - ــ معادلات دیفرانسیل آبل برای نقاط روی یک رویه
- بازگویی

این مقاله برگرفته از یک سخنرانی است که در بزرگداشت دویستمین سال تولد نیلس هنریک آبل در ماه ژوئن ۲۰۰۲ در اسلو ایراد شد. اهداف این سخنرانی این بود که: اولاً، قضیهٔ آبل در شکل کمابیش اصلی آن بازگو شود. ثانیاً، دو مورد از عکسهای قضیه که کمتر شناخته شده‌اند بررسی گردد و ثالثاً به بیان دو مطلب (از میان چندین مطلب) مهم و جالب از هندسهٔ جبری امروزی بپردازیم که لااقل ریشهٔ بخشی از آنها را می‌توان در کارهای آبل یافت. در بخش بازگویی نیز من این نظر را مطرح می‌کنم که جنبه‌های حسابی قضیهٔ آبل می‌تواند به‌عنوان مبحثی اساسی در قرن ۲۱ مورد توجه قرارگیرد.

منظور از این سخنرانی ارائهٔ یک بحث مستند نیست بلکه می‌خواهم ــ از دیدگاه خودم ــ ماجرای قضیهٔ شگفت‌انگیز آبل و میراث آن در هندسهٔ جبری را حکایت کنم. در سخنرانی دیگری در این کنفرانس که توسط کریستیان هوزل ایراد شد تاریخچه و تحلیلی عالی از کارهای آبل ارائه شد.

متناسب با سبک توصیفی و غیررسمی این مقاله (تنها برهانی که در این مقاله ارائه می‌شود یکی از برهانهایی است که خود آبل برای قضیه‌اش عرضه کرده است) در آخر مقاله چند مرجع عمومی برای راهنمایی معرفی شده و نباید آن را کتابنامه دانست.

۱. ریشه‌های قضیهٔ آبل

در دورهٔ قبل از آبل و در زمان خود او، ریاضیدانان علاقهٔ بسیاری به محاسبه و بررسی انتگرال توابع جبری داشتند، یعنی انتگرالی به‌صورت

$$\int y(x)dx \qquad (۱.۱)$$

که در آن $y(x)$ «تابعی» است که در معادلهٔ

$$f(x,y(x)) = \circ \qquad (۲.۱)$$

صدق می‌کند، که $f(x,y) \in \mathbb{C}[x,y]$ یک چندجمله‌ای تحویل‌ناپذیر با ضرایب مختلط است و γ مسیر انتگرالگیری، خمی قطعه قطعه هموار در صفحهٔ x است. به نظر می‌رسد این را می‌دانستند که با انتخاب یک شاخهٔ مناسب از جوابهای معادلهٔ (۲.۱) در امتداد یک مسیر انتگرالگیری که از نقاط شاخه‌ای (ریشه‌های تکراری) نمی‌گذرد، (۱.۱) خوش‌تعریف می‌شود، هر چند که این مطلب مدتها به‌طور رسمی و نمادین بیان نشده بود. به زبان امروزی‌تر فرض کنیم خم جبری F° در $\mathbb{C}^۲$ با معادلهٔ زیر داده شده است

$$f(x,y) = \circ$$

فرم دیفرانسیل گویای ω را با تحدید فرم زیر روی F°

$$\omega = ydx$$

در نظر می‌گیریم که روی F، بستار F° در فشرده‌سازی $\mathbb{C}^۲$ به‌وسیلهٔ صفحهٔ تصویری $\mathbb{P}^۲$ یا $\mathbb{P}^۱ \times \mathbb{P}^۱$ تعریف شده است. کمان γ را نیز طوری می‌گیریم که از نقاط تکینگی F و قطبهای ω نگذرد. در این‌صورت (۱.۱) چنین می‌شود

$$\int_\gamma \omega \qquad (۳.۱)$$

البته در عمل ریاضیدانان آن زمان علاقه‌مند به حالتهای کلیتر

$$\int r(x,y(x))dx \qquad (۴.۱)$$

بودند که $r(x,y)$ تابعی گویا از x و y است و $y(x)$ مانند بالاست. تعریف رسمی و امروزی (۴.۱) مانند (۳.۱) است که در آن به‌جای ω تحدید ۱ـفرم دیفرانسیل گویای $r(x,y)dx$ به روی F را قرار می‌دهیم.

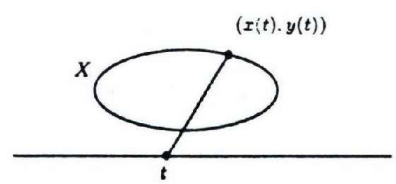
به‌خصوص آنها علاقه‌مند به‌بررسی انتگرالهای ابر بیضوی

$$\int \frac{p(x)dx}{\sqrt{q(x)}} \qquad (۵.۱)$$

به‌ازای چندجمله‌ایهای $p(x)$ و $q(x)$ بودند که

$$q(x)=x^n+q_1x^{n-1}+\cdots+q_n$$

یک چندجمله‌ای درجهٔ n با ریشه‌های متمایز است. در زمان آبل این را می‌دانستند که در حالتهای $n=1,2$ این انتگرالها برحسب توابع مقدماتی (مثلثاتی و لگاریتمی) قابل بیان هستند. دلیل هندسی آن (که آن را هم می‌دانستند) این است که در این حالت خم را می‌توان مانند شکل زیر به‌طور گویا پارامتری کرد.



با جایگذاری توابع گویای $x(t)$ و $y(t)$ در (۵.۱) به انتگرال

$$\int r(t)dt$$

می‌رسیم که $r(t)$ یک تابع گویاست و آن را می‌توان با استفاده از بسط کسری جزئی $r(t)$ محاسبه کرد.

همچنین علاقهٔ خاصی به انتگرالهای ابر بیضوی در حالتهای $n=3,4$ داشتند، ضمن اینکه اندک مطالب مهمی نیز از طریق کارهای اویلر، لژاندر و سایرین دریافته بودند. دلیل اصلی اینکه آنها به‌سراغ حالت عمومی انتگرالهای بیضوی رفتند این بود که: وقتی در محاسبهٔ طول کمانی بر روی یک دایره، به توابعی مثلثاتی که توسط

$$\int\sqrt{dx^2+dy^2}=\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},\quad x^2+y^2=1 \qquad (۶.۱)$$

مشخص می‌شوند، می‌رسیم، طبعاً این علاقه به‌وجود می‌آید که توابعی را که در محاسبهٔ طول کمان کل بیضی ظاهر می‌شوند بررسی کنیم. پس با جایگذاری

$$t=\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)$$

طول کمان بیضی

$$\int\sqrt{dx^2+dy^2},\qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\qquad a>1$$

به انتگرال بیضوی

$$a\int\frac{(1-k^2x^2)dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}},\quad k^2=\frac{a^2-b^2}{a^2}\qquad (۷.۱)$$

در شکل لژاندر آن تبدیل می‌شود.

توجه ویژه‌ای نیز به انتگرالهای (۱. ۴) مبذول می‌شد که تصور می‌رفت این ویژگی خیلی خاص را دارند که دارای معادلات تابعی یا قضایای جمعی هستند. برای مثال با اعمال روش ترسیم بدیهی که در هندسهٔ ترکیبی برای دو برابر کردن طول کمان دایره به‌کار می‌رود، در انتگرال (۱. ۶)، می‌توانیم فرمولهای معروف $\sin 2\theta$ و $\cos 2\theta$ را برحسب $\sin\theta$ و $\cos\theta$ بازیابیم. با این روش حتی می‌توان بسط $\sin(\theta+\theta')$ را نیز بازیافت که آن را می‌توان یک قضیهٔ جمعی برای انتگرال (۱. ۶) دانست. در قرن ۱۸ نیزکنت فاگنانوی ایتالیایی با کشف یک روش ترسیم ترکیبی برای دو برابر کردن طول کمانِ روی یک بیضی، و با به‌کارگیری آن در انتگرال (۱. ۷) توانست یک قضیهٔ جمعی برای انتگرال بیضوی (۱. ۷) ارائه کند. همان‌طور که در بالا اشاره شد، تصور بر این بود که این ویژگی، ویژگی خیلی خاصی باشد، و اواخر قرن ۱۸ و اوایل قرن ۱۹ مطالعات متمرکز و گسترده‌ای روی آن انجام شد.

۲. قضیهٔ آبل و چند پیامد آن

درکارهای آبل دربارهٔ انتگرالهای توابع جبری دو مفهوم اصلی وجود دارد:

- مجموعهای آبلی
- وارون‌سازی

این مفاهیم، آبل را به‌شکلهای بسیار عمومی

- معادلات تابعی

برای انتگرالها رساند. حال به تشریح این ایده‌ها می‌پردازیم.

ابتدا توجه خود را به چیزی که اکنون مجموعهای آبلی نامیده می‌شود معطوف می‌کنیم. انتگرالهای (۱. ۱) و خیلی کلیتر، انتگرالهای (۱. ۴) توابعی «قویاً متعالی*» از حد بالای انتگرال هستند و در نتیجه مطالعهٔ مستقیم آنها در حالت کلی بسیار دشوار است. ایدهٔ آبل این بود که مجموع انتگرالهای وابسته به نقاط متغیری را در نظر بگیرد که از نقاط تقاطع $F=\{f(x,y)=0\}$

* در تعبیر اصطلاح قویاً متعالی باید دقت کرد (به بازگویی (بخش ۵) مراجعه کنید.) آبل بازهم در مقاله‌ای که در سال ۱۸۲۶ منتشر کرد، وجود چند جمله‌ای‌های F و R را به‌طوری که معادلهٔ

$$\int\frac{F\,dx}{\sqrt{R}}=\ln\left(\frac{P+\sqrt{R}Q}{R-\sqrt{R}Q}\right)$$

دارای جواب برای چندجمله‌ای‌های نسبت به‌هم اول Q و P باشد نشان داد. در اینجا R یک چندجمله‌ای از درجهٔ $2n$ با ریشه‌های متمایز و F یک چندجمله‌ای از درجهٔ $n-1$ است. بنابراین تابع زیر انتگرال یک دیفرانسیل از نوع سوم است. این از موارد «استثنایی» است که انتگرال متعالی است ولی برحسب توابع مقدماتی قابل بیان است.

با خانواده‌ای از خمهای $G_t=\{g(x,y,t)=0\}$ (که به‌طور گویا به‌پارامتر t وابسته هستند) به‌دست می‌آیند. بدین‌گونه که اگر

$$F\cap G_t=\sum_i (x_i(t),y_i(t))$$

مجموعهٔ جوابهای

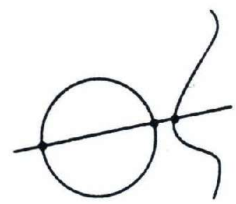
$$\begin{cases} f(x,y)=0 \\ g(x,y,t)=0 \end{cases}$$

باشد که با استفاده از نماد دورهای جبری به‌صورت مجموع نوشته شده است؛ مجموع آبلی وابسته به (۱.۴) به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$u(t)=\sum_i\int_{x_0}^{x_i(t)} r(x,y(x))dx \qquad (۱.۲)$$

در زیر توضیح می‌دهیم که مفهوم این عبارت چیست. یک مثال مهم وقتی به‌دست می‌آید که G_t یک خانواده از خطها مانند اشکال زیر باشد

$F=\{x^2+y^2=1\}$ (۱)



$F=\{y^2=x^3+ax+b\}$ (۲)

در هر دو حالت قرار می‌دهیم $\omega=\frac{dx}{y}$ و در نتیجه انتگرالهای (۱.۴) به‌ترتیب چنین می‌شوند

$$\begin{cases} \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} & (۱) \\ \int \frac{dx}{\sqrt{x^3+ax+b}} & (۲) \end{cases} \qquad (۲.۲)$$

با اینکه عبارتهای تشکیل‌دهندهٔ مجموع آبلی در حالت کلی توابعی قویاً متعالی هستند اما قضیهٔ آبل مجموع آبلی را به‌صورت یک تابع مقدماتی بیان می‌کند.

قضیه: مجموع آبلی (۱.۲) به‌صورت

$$u(t)=r(t)+\sum_\lambda a_\lambda\log(t-t_\lambda) \qquad (۳.۲)$$

است که در آن $r(t)$ تابعی گویا از t است.

در زیر یکی از اثباتهای آبل را می‌آوریم

اثبات: برای کوتاهی برهان، تابع گویای

$$q(x,y)=r(x,y)f_y(x,y)$$

را تعریف می‌کنیم. پس تابع زیر انتگرال که در انتگرالهای مجموع آبلی ظاهر می‌شود عبارت است از تحدید فرم

$$\frac{q(x,y)dx}{f_y(x,y)}$$

به‌خم F. حال با یک محاسبه به‌دست می‌آوریم

$$u'(t)=\sum_i \frac{q(x_i(t),y_i(t))x_i'(t)}{f_y(x_i(t),y_i(t))}$$

از طرفی با توجه به روابط

$$\begin{cases} f(x_i(t),y_i(t))=0 \\ g(x_i(t),y_i(t),t)=0 \end{cases}$$

داریم

$$x_i'(t)=\left(\frac{g_tf_y}{f_xg_y-f_yg_x}\right)(x_i(t),y_i(t))$$

در نتیجه

$$u'(t)=\sum_i s(x_i(t),y_i(t)) \qquad (۴.۲)$$

که $s(x,y)$ تابعی گویاست که به‌وسیلهٔ

$$s(x,y)=\left(\frac{qg_t}{f_xg_y-f_yg_x}\right)(x,y)$$

مشخص می‌شود. (صفر نبودن تابع گویایی که در مخرج ظاهر می‌شود از این نتیجه می‌شود که خمهای F و G_t مؤلفهٔ مشترکی ندارند.) سپس آبل مشاهده کرد که طرف راست (۲.۴) تابعی گویا از t است. (از دیدگاه آنالیز مختلط این واضح است زیرا $u'(t)$ یک تابع تک‌مقداری و برخه‌ریخت[1] از t به‌ازای $t\in\mathbb{P}^1$ است و در نتیجه با انتگرالگیری از بسط کسری جزئی آن، حکم مطلوب حاصل می‌شود.

آبل در «گزارش پاریس» خود و همچنین در نوشته‌های بعدیش، عبارتهایی تقریباً صریح و روشن برای طرف راست (۲.۴) و در نتیجه برای جملاتی که در فرمول $u(t)$ در قضیهٔ او ظاهر می‌شوند، ارائه کرد. برای مثال وقتی خانوادهٔ G_t از خطوط تشکیل می‌شود فرمول درون‌یابی لاگرانژ عبارتی صریح برای $u'(t)$ به ما می‌دهد.

حال کاربردهای قضیهٔ آبل را برای دو انتگرال (۲.۲) بیان می‌کنیم. هر دوی آنها مبتنی است بر ایدهٔ دوم آبل که در بالا به‌آن اشاره شد، یعنی «وارون‌سازی» انتگرال (۱.۴)، بدین‌گونه که مختصات $x(u)$ و $y(u)$ را به‌عنوان توابعی تک مقداری از متغیر u روی خم F چنان در نظر می‌گیریم که

$$u=\int_{(x_0,y_0)}^{(x(u),y(u))}\omega \qquad (۵.۲)$$

1. meromorphic

که در آن ω تحدید $r(x,y)dx$ به خم F است. مثلاً برای انتگرال (۱) در (۲. ۲) به‌وضوح داریم

$$u=\int_{(0,1)}^{(\sin u,\cos u)}\omega$$

اگر طرف راست (۲. ۳) را با استفاده از فرمول درون‌یابی لاگرانژ محاسبه کنیم به‌رابطهٔ

$$\int_0^{x_1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}+\int_0^{x_2}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\int_0^{x_1y_2+x_2y_1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

می‌رسیم که آن را به‌عنوان فرمول مجموع برای تابع سینوس می‌شناسیم.

قبل از اینکه انتگرال دوم در (۲. ۲) را بررسی کنیم، یادآور می‌شویم که آبل درگزارش پاریس خود اشاره به‌دسته‌ای «شایان توجه» از انتگرالهای آبلی (۱. ۴) می‌کند که امروز به آنها «انتگرالهای نوع اول» گفته می‌شود، یعنی انتگرالهایی که برای آنها طرف راست (۲. ۳) ثابت باشد (این آشکارا هم‌ارز است با اینکه انتگرال آبلی موضعاً یک تابع کراندار از حد بالای انتگرالگیری باشد). هم‌چنین آبل صریحاً انتگرالهای نوع اول را برای مثالهای متعددی مشخص می‌کند. مثلاً نشان می‌دهد که برای خمهای ابر بیضوی

$$y^2=p(x)$$

که $p(x)$ یک چندجمله‌ای از درجهٔ $n+1$ با ریشه‌های متمایز است، انتگرالهای نوع اول عبارت‌اند از

$$\begin{cases}\omega=\frac{g(x)dx}{y}\\ \deg(g(x))\leqq\left[\frac{n}{2}\right]\end{cases}$$

به‌خصوص با این فرض که x^3+ax+b ریشه‌های متمایز دارد، عبارت (۲) در (۲. ۲) یک انتگرال نوع اول است. حال قضیهٔ آبل را برای خانوادهٔ خطوطی که این خم درجهٔ سوم را قطع می‌کنند می‌توان با رابطهٔ

$$u_1+u_2+u_3=c \tag{6.2}$$

بیان کرد که c یک مقدار ثابت است و

$$u=\int_{(x_0,y_0)}^{(x(u),y(u))}\frac{dx}{y} \tag{7.2}$$

به‌جای u در (۲. ۷) قرار می‌دهیم u_i که $i=1,2,3$. با مشتق‌گیری از (۲. ۷) داریم

$$1=\frac{x'(u)}{y(u)}$$

و در نتیجه

$$y(u)=x'(u) \tag{8.2}$$

با انتخاب مناسب (x_0,y_0) (مثلاً نقطهٔ عطف $[0,0,1]$ که روی تقاطع F با خط در بینهایت $\mathbb{P}^2$ قرار دارد) داریم

$$\begin{cases}c=0\\ x(-u)=x(u)\end{cases}$$

و (۲. ۶) تبدیل به قضیهٔ جمعی معروف زیر برای انتگرال بیضوی می‌شود

$$x(u_1+u_2)=R(x(u_1),x'(u_1),x(u_2),x'(u_2)) \tag{9.2}$$

که در آن R تابعی گویاست که مختصهٔ x سومین نقطه تلاقی یک خط با F را به‌صورت تابعی گویا از مختصات دو نقطهٔ دیگر بیان می‌کند.

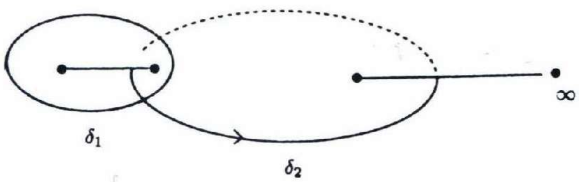
البته $x(u)$ تابع معروف $\wp$ وایرشتراس است و بحث بالا نشان می‌دهد که تابع $\wp$ در معادلهٔ تابعی (۲. ۹) و معادلهٔ دیفرانسیل

$$x'(u)^2=x(u)^3+ax(u)+b$$

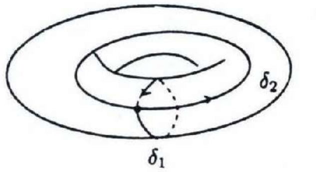
صدق می‌کند. حال با بیان دو نکته، این موضوع را بیشتر تشریح می‌کنیم. اولی این است که برای تعریف انتگرال

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^3+ax+b}} \tag{10.2}$$

صفحهٔ x به‌همراه نقطهٔ بینهایت را در امتداد برشهایی که دو ریشهٔ x^3+ax+b را به‌هم و ریشهٔ سوم را به $x=\infty$ وصل می‌کنند می‌بُریم.



در این صورت $\sqrt{x^3+ax+b}$ روی این صفحهٔ برش‌خورده تک‌مقداری می‌شود و می‌توان خم جبری F را پوششی ۲ برگی از صفحهٔ x در نظر گرفت که در برشها یکدیگر را قطع می‌کنند، یعنی F رویهٔ ریمانی وابسته به تابع جبری $\sqrt{x^3+ax+b}$ است. تصویر توپولوژیک F همان چنبرهٔ معروف است.



بدین ترتیب انتگرال (۲. ۱۰) به‌صورت انتگرالی در امتداد یک مسیر روی یک رویهٔ ریمانی تعبیر می‌شود و انتخاب مسیر تنها نسبت به ترکیبات خطی δ_1 و δ_2 خوش‌تعریف است. به‌خصوص با توجه به (۲. ۷) به‌دست می‌آید

$$\begin{cases}x(u+\lambda_i)=x(\lambda_i)\\ y(u+\lambda_i)=y(\lambda_i)\end{cases} \tag{11.2}$$

که
$$\lambda_i = \oint_{\delta_i} \frac{dx}{y}$$

دوره‌های تناوب $\frac{dx}{y}$ هستند. حال اگر Λ شبکهٔ تولیدشده توسط λ_1 و λ_2 درصفحهٔ مختلط باشد، پارامتری‌سازی آشنای

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}/\Lambda & \to & F \\ \downarrow & & \rotatebox[origin=c]{-90}{$\in$} \\ u & \to & (x(u), x'(u)) \end{array}$$

از خم درجهٔ سوم به‌وسیلهٔ تابع $\wp$ و مشتقش به‌دست می‌آید.

آبل در گزارش پاریس خود در حالت کلی به‌ارائهٔ ویژگیهای تحلیلی اساسی آن دسته از توابع بیضوی می‌پردازد که از وارون‌سازی انتگرالی از نوع اول روی یک خم حاصل می‌شوند.

این را هم یادآور شویم که بعد فضای انتگرالهای از نوع اول یک تعریف از گونای یک خم است (یا گونای حسابی در حالتی که F تکین است.) به‌دنبال کار پیشقدمانهٔ آبل، بسط و توسعهٔ مطلب بالا به گونای دلخواه به‌دست ژاکوبی، ریمان و دیگر ریاضیدانان قرن ۱۹ انجام گرفت.

نکتهٔ دوم این است که توابع $x(u)$ و $y(u)$ را که در (۲. ۷) ظاهر می‌شوند می‌توان به‌طور موضعی چنان تعریف کرد که در (۲. ۸) صدق کنند و معادلهٔ تابعی (۲. ۹) در جاهایی که تعریف شده است صادق باشد. اما از این معادلهٔ تابعی می‌توان استفاده کرد و $x(u)$ و $y(u)$ را به توابعی برخه‌ریخت و تام گسترش داد، بدین‌صورت که اگر $x(u)$ برای $|u| < \epsilon$ تعریف شده باشد با استفاده از (۲. ۹) می‌توانیم $x(2u)$ و با ادامهٔ این روش، $x(u)$ را به‌ازای $|u| < 2\epsilon$، $|x| < 3\epsilon$، ... تعریف کنیم. این اصل که با به‌کارگیری یک معادلهٔ تابعی بتوان یک شیء موضعی را به یک شیء فراگیر گسترش داد، در حقیقت یک نتیجهٔ اساسی قضیهٔ آبل است، قضیه‌ای که در ادامه بیشتر به آن خواهیم پرداخت.

در خاتمهٔ این بخش به دو پیامد مستقیم قضیهٔ آبل در هندسهٔ جبری اشاره می‌کنیم:

(۱) سرچشمه‌های نظریهٔ هاج؛ (۲) استفاده از تناظرها

(۱): آبل چیزی را که ما امروز فضای دیفرانسیلهای منظم $H^\circ(\Omega^1_F)$ می‌نامیم از بقیه متمایزکرد و آن‌را به‌عنوان یک ناوردای پایه‌ای یک خم جبری در نظر گرفت. همچنین $h^\circ(\Omega^1_F) = \dim H^\circ(\Omega^1_F)$ را برای مثالهای متعددی محاسبه‌کرد که می‌توان آنها را به‌عنوان اولین مراحل در جهت مرتبط کردن $h^\circ(\Omega^1_F)$ با گونای حسابی تعبیر کرد. بعدها ریمان تعبیر دیگری از $h^\circ(\Omega^1_F)$ به‌صورت نصف اولین عدد بتی عرضه کرد (که حقیقتاً باید آن را از سرچشمه‌های نظریهٔ هاج دانست).

(۲): اثباتی را که از قضیهٔ آبل در بالا ارائه شد می‌توان به‌صورت نموار زیر خلاصه کرد

$$\begin{array}{ccccc} & & I & \subset F \times \mathbb{P}^1 & \\ & \swarrow^{\pi_1} & & \searrow^{\pi_2} & \\ F & & & & \mathbb{P}^1 \end{array}$$

که در آن

$$I = \{(x,y,t) : f(x,y) = g(x,y,t) = \circ\}$$

تناظر وقوع است و نگاشت

$$\omega \to d\left(\sum_i \int_{x_\circ}^{x_i(t)} \omega\right)$$

در اثبات، به‌زبان امروزی همان نگاشت اثر

$$\omega \to (\pi_2)_*(\pi_1^*\omega)$$

است که ۱ـفرمهای گویا روی F را به ۱ـفرمهای روی $\mathbb{P}^1$ می‌برد.

۳. عکسهای قضیهٔ آبل

برای بازگویی شکل فراگیر و متعارف قضیهٔ آبل و عکس آن، در این بخش دو تا از عکسهای این حکم را که کمتر شناخته شده‌اند بیان می‌کنیم. این دو مثالهایی هستند از اصلی که در پیش به آن اشاره شد، یعنی گسترش دادن یک شیء موضعی به یک شیء فراگیر توسط یک معادلهٔ دیفرانسیل.

شکل متعارف قضیهٔ آبل و عکس آن، آنچنان که در مراجع دیده می‌شود، با این پرسش سروکار دارد:

چه‌وقت یک بخشیاب[1]

$$D = \sum_i n_i p_i \qquad (۱.۳)$$

از یک رویهٔ ریمانی X، بخشیاب یک تابع برخه‌ریخت است؟ یعنی چه آزمونی وجود دارد که مشخص کند

$$D = \sum_{p \in X} \nu_p(f) p \qquad (۲.۳)$$

به‌ازای یک تابع $f \in \mathbb{C}(X)^*$؟

جواب بدین‌گونه است: ابتدا باید یادآوری کنیم که برای یک ۱ـفرم منظم $\omega \in H^\circ(\Omega^1_X)$، یک دورهٔ تناوب عبارت است از انتگرال $\int_\delta \omega$ که $\delta \in H_1(X,\mathbb{Z})$. حال دو شرط برای برقراری (۳. ۲) وجود دارد. اولی این است که درجهٔ بخشیاب D چنین باشد

$$\deg D =: \sum_i n_i = \circ \qquad ((۱)\ ۳.۳)$$

اگر این شرط برقرار باشد می‌توانیم بنویسیم $D = \delta\gamma$ برای یک ۱ـزنجیر γ، و در این صورت شرط دوم این است که برای هر $\omega \in H^\circ(\Omega^1_X)$،

$$\int_\gamma \omega \equiv \circ \quad \text{(به‌پیمانهٔ دوره‌های تناوب)} \qquad ((۲)\ ۳.۳)$$

لزوم شرط (۳. ۳(۱)) نتیجه‌ای از قضیهٔ مانده است:

$$\sum_{p \in X} \mathrm{Res}_p \left(\frac{df}{f}\right) = \sum_{p \in X} \nu_p(f) = \circ,\ f \in \mathbb{C}(X)^*$$

اما لزوم (۳. ۳(۲)) اساساً نتیجه‌ای از قضیهٔ آبل است: به‌ازای $t \in \mathbb{P}^1$ قرار می‌دهیم

1. divisor

$$f^{-1}(t) = \sum_t p_i(t) =: D_t$$

حال آرایش نقاط $\sum_i p_i(t)$ با یک پارامتر گویا حرکت می‌کند و $D = D_0 - D_\infty$. چون ω یک دیفرانسیل منظم است پس مجموع آبلی

$$\sum_i \int_{p_i(0)}^{p_i(t)} \omega$$

ثابت است و چون $\int_\gamma \omega$ تنها به‌پیمانهٔ دوره‌های تناوب خوش تعریف است، (۳. ۳(۲)) برقرار است. با روشی دیگر و این بار با استفاده از تناظرها، اگر

$$I \subset X \times \mathbb{P}^1$$

که در آن

$$I = \{(p,t) : f(p) = t\}$$

مانند قبل داریم

$$d\left(\sum_i \int_{p_i(0)}^{p_i(t)} \omega\right) = (\pi_2)_*(\pi_1^*\omega)$$

یک ۱ـفرم منظم روی $\mathbb{P}^1$ است و در نتیجه برابر صفر است.

عکس قضیهٔ آبل در شکل متعارف و فراگیر آن این است که شرایط (۳. ۳(۱)) و (۳. ۳(۲)) برای برقراری (۳. ۲) کافی نیز هستند. این حقیقت را می‌توان بدین‌شکل فرمول‌بندی کرد: نگاشت

$$\mathrm{Div}^0(X) \to J(X)$$

از گروه بخشیابهای درجهٔ صفر به واریتهٔ ژاکوبی

$$J(X) =: H^0(\Omega_X^1)^*/H_1(X,\mathbb{Z})$$

با ضابطهٔ

$$\langle D,\omega\rangle =: \int_\gamma \omega \qquad \text{(به‌پیمانهٔ دوره‌های تناوب)}$$

که در آن $D \in \mathrm{Div}^0(X)$، $\partial_\gamma = D$ و $\omega \in H^0(\Omega_X^1)$، باید یک به یک باشد.

اما اولین عکس موضعی قضیه مبتنی بر چیزی است که ما آن را معادلات دیفرانسیل آبل خواهیم خواند، که صرفاً بیانگر شرایطی هستند که آرایشی از نقاط $p_i \in X$ به همراه بردارهای مماس $\tau_i \in T_{p_i}(X)$ باید در فرم بینهایت کوچک

$$\sum \langle \omega(p_i), \tau_i\rangle = 0, \quad \omega \in H^0(\Omega_X^1) \qquad (۴.۳)$$

از قضیهٔ آبل صدق کنند. این را می‌توان بدین‌گونه نیز بازگو کرد: $\sum_i P_i$ را به‌عنوان نقطه‌ای از حاصلضرب متقارن $X^{(d)}$ در نظر می‌گیریم. هر ۱ـفرم منظم ω روی X یک ۱ـفرم $\mathrm{Tr}\,\omega$ روی $X^{(d)}$ القاء می‌کند که با

$$(\mathrm{Tr}\,\omega)(p_1+\cdots+p_d) = w(p_1)+\cdots+\omega(p_d)$$

مشخص می‌شود. در این صورت (۳. ۴) هم‌ارز است با دستگاه دیفرانسیل

$$\mathrm{Tr}\,\omega = 0, \quad \omega \in H^0(\Omega_X^1) \qquad (۵.۳)$$

روی $X^{(d)}$. از دیدگاه معادلات دیفرانسیل نکتهٔ قابل اشاره این است که خمیده‌های انتگرالی موضعی و ماکسیمال (۳. ۵) مجموعه‌هایی باز در خمینهٔ انتگرالی فراگیر $\mathbb{P}^r \subset X^{(d)}$ هستند. بنابراین معادلهٔ دیفرانسیل (۳. ۵) به‌درستی بیانگر شرط حرکت گویای بینهایت کوچک بخشیابهاست. به‌طور دقیقتر:

> در هر فضای مماس $T_z X^{(d)}$، $z = p_1 + \cdots + p_d$، معادلهٔ (۳. ۵) یك زیرفضای V با ویژگیهای زیر را تعریف می‌کند: (۱)، V بر یك خمینهٔ انتگرالی موضعی (۳. ۵) مماس است؛ و (۲) این خمینه‌های انتگرالی موضعی را می‌توان به یك خمینهٔ انتگرالی فراگیر که با $\mathbb{P}^r$ یکریخت است گسترش داد،

ویژگی (۱) خودبه‌خود برقرار نیست، بلکه نیاز به شرط انتگرال‌پذیری سیستم دیفرانسیل خارجی (۳. ۵) دارد که این امر شرایطی را تحمیل می‌کند اضافه بر اینکه در همسایگیهایی که رتبهٔ معادلهٔ (۳. ۵) می‌پرَد، داشته باشیم $d(\mathrm{Tr}\,\omega) = 0$. ویژگی (۲) نیز منعکس‌کنندهٔ جنبهٔ معادلهٔ تابعی قضیهٔ آبل است که در بالا ذکر شد.

عکس دوم قضیهٔ آبل برای اولین بار توسط هموطن او یعنی سوفوس لی فرمول‌بندی و اثبات شد. ما این را در یک حالت خاص و براساس شکل زیر بیان می‌کنیم: در صفحه تعدادی کمان تحلیلی F_i داریم و روی هر F_i، یک دیفرانسیل منظم ناصفر ω_i. برای خط L، که در یک همسایگی U از خط L_0 در فضای خطوط واقع در صفحه قرار دارد، نگاشت

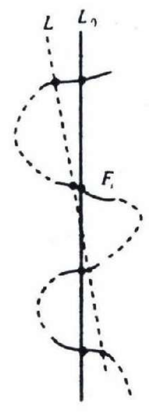
$$L \to F_1 \times \cdots \times F_n \qquad (۶.۳)$$

را با ضابطهٔ

$$L \to (p_1(L), \cdots, p_n(L))$$

تعریف می‌کنیم، که $p_i(L) = L \cdot F_i$. در این شرایط رابطهٔ آبل چنین است

$$\sum_i \omega_i(p_i(L)) = 0 \qquad (۷.۳)$$



یعنی تحت نگاشت (۳. ۶)، پس‌کشی[1] $(\omega_1,\cdots,\omega_n)$ روی $F_1\times\ldots\times F_n$ به U باید صفر باشد. حال نتیجهٔ لی این است:

تحت شرط (۳. ۷)، خم جبری فراگیر F و دیفرانسیل منظم ω روی F موجودند به‌طوری که

$$\begin{cases} F_i \subset F \\ \omega|F_i = \omega_i \end{cases}$$

باز هم می‌بینیم که با استفاده از معادلهٔ تابعی (۳. ۷) مفروضات موضعی (F_i,ω_i) به یک (F,ω) فراگیر گسترش می‌یابند.

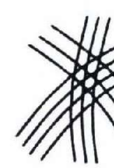
۴. چند میراث قضیهٔ آبل

شاید بتوان گفت «میراث» اصلی قضیهٔ آبل، سلسلهٔ پیشرفتهایی است که به درک ما از واریتهٔ پیکار یا گروه رده‌های بخشیاب یک واریتهٔ جبری انجامیده است. این پیشرفتها حاصل کار ریاضیدانان بسیار از آن زمان تا عصر حاضر است. تأثیر آبل را از این حقیقت می‌توان دریافت که مؤلفهٔ همانی واریتهٔ پیکار یک واریتهٔ آبلی است و لااقل در حالت مختلط، توابع روی آن اصطلاحاً توابعی آبلی هستند. اما در اینجا قصد دارم فارغ از نقل این پیشرفتها و جزئیات آن، دو میراث دیگر از قضیه را مختصراً شرح دهم. یکی از آنها مطلب جالب ولی کمتر شناخته‌شده‌ای است به نام بافته‌ها[2]. دیگری نیز براساس کار مشترک و تازهٔ من با مارک گرین است.

۱.۴ بافته‌ها

در اینجا توجه خود را به‌بافته‌های مسطح محدود می‌کنیم. (هرچند این موضوع در هر بعد و «نقص بعد»ی مورد توجه است.) همچنین با اینکه تعریف را می‌توان به‌طور فراگیر و حتی روی خمینه‌ها ارائه کرد، ولی تاکنون بیشتر هندسهٔ موضعی آن موردنظر بوده است و بنابراین ما در یک مجموعهٔ باز $\mathbb{R}^2$ کار می‌کنیم.

تعریف: یک nـ‌بافتهٔ $\mathcal{W}(n)$ با n تا برگ‌بندی که در وضعیت عمومی قرار دارند مشخص می‌شود.



$F_i(x,y) =$ ثابت

برگهای بافتهٔ iام از مجموعه‌های تراز یک تابع $F_i(x,y)$ تشکیل شده‌اند. منظور از «وضعیت عمومی» نیز این است که خطوط مماس بر برگهایی که از یک نقطه می‌گذرند متمایزند. گاهی مناسب است که این خطوط مماس را با یک معادلهٔ پفافی[3]

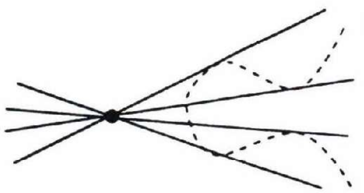
$$\omega_i = 0$$

مشخص کنیم که برای یک تابع ناصفر λ_i، $\omega_i = \lambda_i dF_i$.

1. pullback 2. webs 3. Pfaffian

موضوع هندسهٔ بافته‌ای توسط بلاشکه[1] و همکارانش در هامبورگ در دههٔ ۱۹۲۰ بنیانگذاری شد. مسألهٔ اصلی، پیدا کردن ناورداهای یک بافته بود، به‌خصوص پیدا کردن شرایطی که بافته، خطی شدنی باشد. یعنی بعد از یک وابر‌یختی[2]، برگهای بافته تبدیل به‌خطوطی در صفحه شوند.

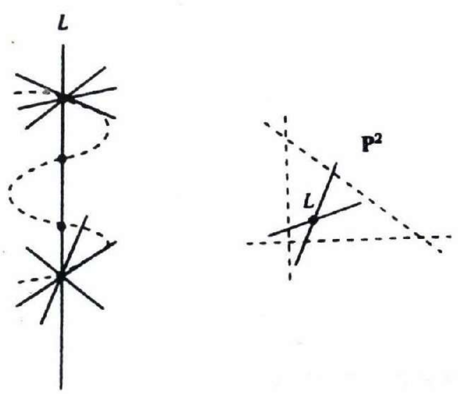
از همان ابتدا معلوم بود که بافته‌ها با هندسهٔ جبری مرتبط‌اند. برای مثال شکلی که در زیر می‌بینید یک بافتهٔ خطی است.



(۱)

در اینجا C یک خم جبری در صفحه است و از یک نقطهٔ عمومی خارج از آن همهٔ مماسهای ممکن بر C رسم شده‌اند. (در اینجا و در ادامه، جهت تصویرنگاری بهتر، همهٔ خطوط مماس را حقیقی در نظر می‌گیریم.) n، درجهٔ بافته نیز همان درجهٔ خم دوگان است که آن را از هندسهٔ جبری می‌شناسیم.

همان‌طور که در شکل (۲) می‌بینیم دوگان تصویری شکل (۱) به یک خم جبری C از درجهٔ n در صفحه یک nـ بافته نسبت می‌دهد که در یک مجموعهٔ باز U از فضای تصویری دوگان قرار دارد (که از خطوط در صفحه تشکیل شده است.)



(۲)

در اینجا هر نقطه از U با خطی چون L در صفحه مشخص می‌شود. خطوطی که از هر یک از n تا نقطهٔ تقاطع C با L می‌گذرند، n دسته خط به ما می‌دهند که با دوگان‌سازی تصویریِ هر یک از این n دسته، یک خط در فضای دوگان به‌دست می‌آید.

منبع دیگری از مثالهای بافته که تنها به آن اشاره می‌کنیم، خمهای جواب معادلهٔ دیفرانسیل معمولی

$$P(x,y,y') = (y')^n + P_1(x,y)(y')^{n-1} + \cdots + P_n(x,y) = 0$$

در صفحه است.

حال می‌پردازیم به‌مهمترین ناوردای بافته‌ها که آن نیز توسط مکتب بلاشکه تعریف شده است:

1. Blaschke 2. diffeomorphism

تعریف. یک رابطهٔ آبلی به‌وسیلهٔ

$$\sum_i g_i(F_i)dF_i = 0 \qquad (۴.۱)$$

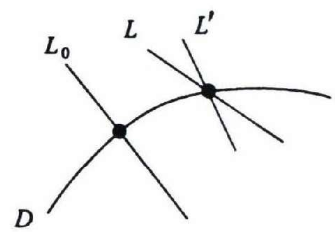
مشخص می‌شود که $g(\xi) = (g_1(\xi),\cdots,g_n(\xi))$ برداری از توابع یک متغیره است، همچنین اگر $A(\mathcal{W})$ فضای برداری همهٔ تابعهای $g(\xi)$ باشد که در (۴. ۱) صدق می‌کنند، رتبهٔ بافته را چنین تعریف می‌کنیم

$$r(\mathcal{W}) = \dim A(\mathcal{W})$$

به‌عنوان مثالی از یک رابطهٔ آبلی فرض کنیم ω یک دیفرانسیل ناصفر نوع اول باشد. ابتدا انتگرال موضعی

$$I(L)=\int_{L_0\cdot D}^{L\cdot D}\omega \qquad (۴.۲)$$

را در نظر می‌گیریم. (شکل زیر را ببینید.)



در اینجا توجه ما به یک کمان D روی C و یک همسایگی باز U از یک خط L_0 که کمان D را در یک نقطه قطع می‌کند، معطوف است. به‌وضوح در شکل بالا

$$I(L)=I(L')$$

یعنی $I(L)$ روی دسته‌ای از خطوط که از یک نقطهٔ ثابت روی C می‌گذرد ثابت است. بنابراین مجموعه‌های تراز I خطوطی در U هستند و خمهای انتگرالی دیفرانسیل $dI(L)$ دقیقاً از این خطوط تشکیل شده‌اند. حال با مراجعه به شکل (۲) و انجام این عملیات روی کمانهای حول هر یک از نقاط تقاطع و با استفاده از قضیهٔ آبل می‌بینیم که هر ω یک رابطهٔ آبلی به ما می‌دهد.

مثلاً اگر C ناتکین باشد و قرار دهیم $h^\circ(\Omega^1_C)=\dim H^\circ(\Omega^1_C)$، آنگاه برای بافتهٔ $\mathcal{W}_C$ که در شکل (۲) به C نسبت داده شد، داریم

$$h^\circ(\Omega^1_C)\leqq r(\mathcal{W}_C) \qquad (۴.۳)$$

یک دستاورد مکتب بلاشکه این است که برای هر nـبافته $\mathcal{W}(n)$،

$$r(\mathcal{W}(n))\leqq \frac{(n-1)(n-2)}{2} \qquad (۴.۴)$$

از طرفی می‌دانیم که برای $\mathcal{W}(n)=\mathcal{W}C$ به‌صورت بالا،

$$h^\circ(\Omega^1_C)=\frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

بنابراین در (۴. ۳) تساوی برقرار می‌شود. در حالت کلی گوییم یک بافتهٔ $\mathcal{W}(n)$ رتبهٔ ماکسیمم دارد اگر در (۴. ۴) تساوی رخ دهد. حال یک مسألهٔ اساسی این است:

(۴. ۵) **مسأله**: همهٔ بافته‌های با رتبهٔ ماکسیمم را بیابید.

قبل از پرداختن به این مسأله، به این نکته به‌عنوان یکی دیگر از روابط هندسهٔ بافته‌ای و هندسهٔ جبری اشاره کنیم که عکس قضیهٔ آبل از سوفولوس لی که در بالا گفته شد نتیجهٔ زیر را در بر دارد:

(۴. ۶) یک بافتهٔ **خطی** با رتبهٔ ناصفر، جبری است.

در اینجا این نکته را باید افزود که رابطهٔ آبلی کامل است یعنی اینکه هر g_i ناصفر است. همچنین منظور از جبری بودن یک بافته این است که این بافته از یک خم جبری با روشی که در شکل (۲) بیان شد، به‌دست آمده است.

نکتهٔ قابل ذکر دیگر این است که گاهی مفید است که یک رابطهٔ آبلی را در شکل «جمع‌شده» آن مانند

$$\sum_i G_i(F_i(x,y)) = \text{ثابت} \qquad (۴.۷)$$

بنویسیم، که $G_i(\xi)$ توابعی از ξ هستند با $G'_i(\xi)=g_i(\xi)$.

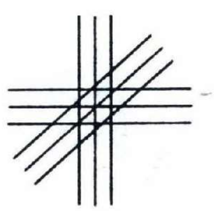
برگردیم به مسألهٔ (۴. ۵)؛ به‌ازای $n=3$ داریم

$$r(\mathcal{W}(3))\leqq 1$$

و بلاشکه ثابت کرده است که اگر تساوی برقرار باشد، آنگاه بافتهٔ ما جبری از نوع (۲) فوق خواهد بود. خلاصهٔ آن به این صورت است که اگر شکل جمع‌شدهٔ (۴. ۷) از رابطهٔ آبلی را در نظر بگیریم، می‌توان آن را به‌صورت معادلهٔ تابعی لگاریتم نوشت:

$$\varphi_1(x)-\varphi_1(y)+\varphi_1\left(\frac{y}{x}\right)=0 \qquad (۴.۸)$$

و با تقریب یک وابریختی موضعی، بافتهٔ ما به‌صورت شکل زیر در می‌آید.



(۳)

به‌ازای $n=4$ داریم

$$r(\mathcal{W}(4))\leqq 3$$

و باز هم اگر تساوی برقرار باشد بافته جبری خواهد بود. این پدیده را با استفاده از (۴. ۶) این‌گونه می‌توان بیان کرد: پایه‌ای برای روابط آبلی مانند

$$\sum_i g_{ij}(F_j)dF_j=0 \quad i=1,2,3 \qquad (۴.۹)$$

در نظر می‌گیریم. حال به ماتریس

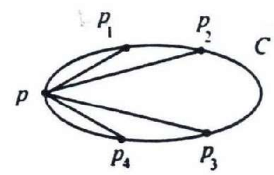
$$\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix}$$

توجه می‌کنیم. سطرهای آن تشکیل یک پایه برای روابط آبلی می‌دهند و ستونهای آن یک نگاشت

$$U \to \mathbb{P}^2 \qquad (10.4)$$

به‌دست می‌دهند که با توجه به (۴. ۹)، $\mathcal{W}(3)$ را به یک بافتهٔ خطی در یک مجموعهٔ باز صفحهٔ تصویری می‌نگارد. حال می‌توانیم از (۴. ۶) استفاده کنیم و حکم مطلوب را نتیجه بگیریم.

در حالت $n = 5$، داریم $r(\mathcal{W}(5)) \leqq 6$. در این حالت یک بافتهٔ خطی‌نشدنی (و در نتیجه ناجبری) با رتبهٔ ماکسیمم توسط بُل[1] پیدا شده است که آن را در زیر به‌تصویر می‌کشیم:



(۴)

در اینجا، p_iها نقاط ثابتی در وضعیت عمومی هستند و p نیز یک نقطهٔ متغیر عمومی است. برگهای برگ‌بندی‌ها عبارت‌اند از خطوط $L_i = \overline{pp_i}$ و مقطع مخروطی C که از نقاط $pp_1 \cdots p_5$ می‌گذرد. پنج تا از شش رابطهٔ مستقل آبلی از به‌کار بردن قضیهٔ آبل در شکل (۴) حاصل می‌شوند. شکل جمع‌شدهٔ رابطهٔ ششم را می‌توان به‌وسیلهٔ

$$\varphi_2(x) - \varphi_2(y) + \varphi_2\left(\frac{y}{x}\right) - \varphi_2\left(\frac{1-y}{1-x}\right) + \varphi_2\left(\frac{x}{y}\frac{1-y}{1-x}\right) = 0 \qquad (11.4)$$

بیان کرد، که ما آن را به‌عنوان شکل آبلی معادلهٔ تابعی مربوط به دی‌لگاریتم می‌شناسیم، و در اینجاست که بار دیگر آبل وارد داستان ما می‌شود! ولی این بار از دیدگاهی کاملاً متفاوت.

در حالتهای $n = 6, 7, 8$، بافته‌های مسطح استثنایی با رتبهٔ ماکسیمم وجود دارند، یعنی بافته‌هایی با رتبهٔ ماکسیمم که از نوع (۲) نیستند. در ضمن همهٔ آنها براساس دی‌لگاریتم هستند. برای مثال وقتی $n = 6$ دو بافتهٔ استثنایی وجود دارد، یکی از آنها شامل رابطهٔ شش جمله‌ای برای دی‌لگاریتم است و دیگری همان رابطهٔ پنج جمله‌ای (۴. ۱۱). در حالت $n = 9$، هنو[2] نشان داده است که این بار تری‌لگاریتم به عنوان یک رابطهٔ آبلی در یک ۹ـبافته با رتبهٔ ماکسیمم ظاهر می‌شود که ترکیبی از بافتهٔ نوع (۲) با بافتهٔ بل نیست. حال این سؤال بدیهی پیش می‌آید:

سؤال: آیا همهٔ بافته‌های با رتبهٔ ماکسیمم که جبری شدنی نیستند از این نوع هستند؟

ما قصد نداریم این سؤال را دقیقاً صورت‌بندی کنیم. اما مضمون شهودی آن این است که آیا به‌ازای هر k، عدد طبیعی $n(k)$ وجود دارد به‌گونه‌ای که یک $n(k)$ـبافتهٔ «جدید» با رتبهٔ ماکسیمم وجود داشته باشد به‌طوری که یکی از رابطه‌های آبلی آن یک معادلهٔ تابعی با $n(k)$ جمله به‌ازای kـامین پلی‌لگاریتم $\mathfrak{L}_{ik}$ باشد یا نه؟ در اینجا منظور از «جدید» اشاره به گسترش کلی پدیدهٔ بالاست که برای لگاریتم یعنی $k = 1$، وقتی که $n(1) = 3$، برای بافتهٔ بل وقتی که $k = 2$ و $n(2) = 5$ و برای بافتهٔ هنو وقتی که $k = 3$ و $n(3) = 9$ اتفاق می‌افتد.

۲.۴ معادلهٔ دیفرانسیل آبل برای نقاط روی یک رویه

می‌دانیم که هندسهٔ یک واریتهٔ جبری در آرایش زیرواریته‌های جبری آن منعکس می‌شود. با اقتباس از آبل آموخته‌ایم که زیرواریته‌ها را به‌پیمانهٔ رابطهٔ هم‌ارزی گویا بررسی کنیم، یعنی در یک واریتهٔ جبری مختلط هموار X دو زیر واریتهٔ Z، Z' را به‌طور گویا هم‌ارز می‌گیریم اگر یک خانوادهٔ $\{Z_t\}_{t\in\mathbb{P}^1}$ از زیرواریته‌ها وجود داشته باشد به‌طوری که $Z_0 = Z$ و $Z_\infty = Z'$. و وقتی گروه $Z^p(X)$ از دورهای جبری با نقص بعد p را به‌پیمانه رابطهٔ تولیدشده به‌وسیلهٔ هم‌ارزی گویا در نظر می‌گیریم به گروههای چاو[1] $CH^p(X) = Z^p(X)/Z^p_{\mathrm{rat}}(X)$ می‌رسیم.

وقتی X یک خم جبری است، قضیهٔ آبل و عکس آن یک مجموعهٔ کامل از ناورداهای نظریهٔ هاج برای مؤلفه‌های همانی $CH^1(X)_0$ (که این البته واریتهٔ ژاکوبی است) ارائه می‌کنند. در حالت کلی $CH^1(X)$ واریتهٔ پیکار X است که مؤلفه همانی آن یک واریتهٔ آبلی است، که داستان آن بسیار شبیه حالت خمهای جبری است.

با این حال، در مورد آرایش نقاط روی یک رویهٔ جبری داستان کاملاً متفاوت است. (زیرا بنا بر نتیجه‌ای که مامفرد[2] در دههٔ ۱۹۶۰ به‌دست آورد می‌دانیم که $CH^2(X)$ ممکن است نامتناهی‌بعد باشد.) چند سال پیش، فرمول اسپنسر بلاک[3] برای فضای مماس صوری $T_f CH^2(X)$، این علاقه را در من و مارک گرین به‌وجود آورد که ببینیم چه مضمون هندسی در پس فرمول اسپنسر نهفته است. از اینجا به یک تعریف هندسی برای فضای مماس $TZ^2(X)$ رسیدیم و سپس فضای مماس هندسی را چنین تعریف کردیم

$$T_g CH^2(X) = TZ^2(X)/TZ^2_{\mathrm{rat}}(X) \qquad (12.4)$$

که $TZ^2_{\mathrm{rat}}(X)$ فضای مماس زیرگروه ۰ـدوره‌هایی است که به‌طور گویا با صفر هم‌ارزند و بعد این هم قضیه‌ای است که

$$T_g CH^2(X) \cong T_f CH^2(X) \qquad (13.4)$$

از این پس برای سهولت، هر دوی اینها را با $TCH^2(X)$ نشان می‌دهیم و از این فضای برداری به‌عنوان فضای مماس $CH^2(X)$ یاد خواهیم کرد.

1. Bol 2. Hénaut

1. Chow groups 2. Mumford 3. Spencer Bloch

در (۴. ۱۲) و (۴. ۱۳)، تلویحاً شرایط هندسی بینهایت کوچکی وجود دارد که آرایشی از نقاط را تبدیل به‌اولین مرتبهٔ آن در یک ردهٔ هم‌ارزی گویا می‌کند. یادآور می‌شویم که شرط هم‌ارز گویا بودن یک ۰ـدور Z روی X این است که

$$Z = \sum_{\nu}(f_{\nu})$$

که f_{ν} یک تابع گویا روی یک خم تحویل‌ناپذیر Y_{ν} است و (f_{ν}) بخشیاب آن. حال یک تغییر مرتبهٔ اول در داده‌های (Y_{ν}, f_{ν})، تغییر مرتبهٔ اولی از $\sum_{\nu}(f_{\nu})$ را نتیجه می‌دهد و ما به‌دنبال شرایطی هندسی روی آرایشی از نقاط $p_1 + \cdots + p_d$ (که برای سادگی متمایز فرض شده‌اند) و بردارهای مماس $\tau_i \in T_{p_i}X$ هستیم تا یک تغییر مرتبهٔ اول $\sum_{\nu}(f_{\nu})$ را فراهم سازند.

همان‌طور که دیدیم، برای آرایشهای نقاط روی یک خم جبری، جواب سؤال مشابه توسط معادلهٔ آبل (۵. ۳) داده می‌شود. حال می‌خواهیم به‌شرح جواب این سؤال در حالت رویه‌های جبری بپردازیم. برای این کار ابتدا متذکر می‌شویم که روش آبل برای ساخت تابع اثر را می‌توان به‌هر فرم دیفرانسیل از هر درجه‌ای روی یک واریتهٔ جبری هموار تعمیم داد؛ یعنی فرمول

$$\omega(p_1 + \cdots + p_d) = \omega(p_1) + \cdots + \omega(p_d)$$

یک نگاشت

$$H^{\circ}(\Omega^q_X) \xrightarrow{\mathrm{Tr}} H^{\circ}(\Omega^q_{X(d)})$$

را تعریف می‌کند. وقتی $\dim X \geqq 2$، حاصلضربهای متقارن در امتداد قطر تکین هستند و بدین‌ترتیب فرمهای دیفرانسیل منظم به‌عنوان فرمهای گویایی که روی هر تکینگی‌زدایی[1] X منظم باشند، تعریف می‌شود.

حال فرض می‌کنیم τ_i و p_i مانند بالا باشند، و قرار می‌دهیم

$$\tau = \sum_i (p_i, \tau_i) \in TX^{(d)}$$

اولین مجموعه از شرایط به‌طوری که عنصر

$$\tau \in TZ^2_{\mathrm{rat}}(X) \qquad (۱۴.۴)$$

مانند حالت خم باشد این است که برای همهٔ ۱ـفرمهای منظم $\varphi \in H^{\circ}(\Omega^1_X)$،

$$\langle \mathrm{Tr}\varphi, \tau \rangle = \sum \langle \varphi(p_i), \tau_i \rangle = 0 \qquad (۱۵.۴)$$

معادلهٔ (۴. ۱۵) فقط می‌گوید که τ باید در هستهٔ مشتق نگاشت آلبانیزه[2] باشد.

عنصر سازندهٔ جدید از ۲ـفرمهای روی X می‌آید. از کارهای مامفرد و بلاخ معلوم شده بود که ۲ـفرمها مناسب‌اند؛ در زیر یک شرح هندسی در این باره می‌آوریم. ابتدا به این اشاره کنیم که اگر هر خمینهٔ مختلط n بعدی X، مثلاً یک مجموعهٔ باز در $\mathbb{C}^n$، داشته باشیم و اگر خانواده‌ای از فرمهای $\varphi_d \in H^{\circ}(\Omega^q_{X^{(d)}})$ را که دارای ویژگی موروثی

$$\varphi_{d+1}\Big|_{X^{(d)}} = \varphi_d$$

است در نظر بگیریم که در آن نگاشت شمول $X^{(d)} \to X^{(d+1)}$ با

$$p_1 + \cdots + p_d \longrightarrow p + p_1 + \cdots p_d$$

برای یک نقطهٔ ثابت $p \in X$ داده شده باشد، آنگاه قضیه‌ای هست که می‌گوید:

(۴. ۱۶) فرمهای موروثی به عنوان یک جبر خارجی توسط اثرهای qـفرمهای روی X که $0 \leq q \leq n = \dim X$، تولید می‌شوند؛ و تولید همهٔ این فرمها لازم است.

نکتهٔ هندسی این است: X را نطفهٔ[1] یک همسایگی نقطه‌ای از $\mathbb{C}^n$ بگیریم که $X^{(d)}$ هموار است؛ در این‌صورت ۱ـفرمها، فرمولهای از هر درجه را تولید می‌کنند و تنها در امتداد قطرهاست (که نشان‌دهندهٔ ساختار بینهایت کوچک X هستند) که به همهٔ فرمها از همهٔ درجات (البته نسبت به $\dim X$) نیاز داریم.

دیگر عنصر سازندهٔ جدید این است که

(۴. ۱۷) میدان تعریف $p_i \in X$ وارد شرط (۴، ۱۴) می‌شود.

در توضیح این مطلب، برای سادگی فرض می‌کنیم که رویهٔ جبری X روی $\mathbb{Q}$ (یا روی یک میدان عددی) تعریف شده است. مثلاً فرض می‌کنیم $X \subset \mathbb{P}^N$ به یک $X^{\circ} \subset \mathbb{P}^3$ تصویر شده که X° دارای یک معادلهٔ آفین

$$f(x, y, z) = 0$$

است که در آن $f \in \mathbb{Q}[x, y, z]$. حال فرض کنیم x و y پارامترهای یکنواخت‌ساز موضعی حول $p_i = (x_i, y_i, z_i)$ باشند و می‌نویسیم

$$\tau_i = \lambda_i \frac{\partial}{\partial x} + \mu_i \frac{\partial}{\partial y}$$

توجه کنیم که ۲ـ فرمهای منظم روی X با پس‌کشی

$$\omega = \frac{g(x, y, z)dx \wedge dy}{f_z(x, y, z)}\Bigg|_{X^{\circ}} \qquad (۱۸.۴)$$

به روی X حاصل می‌شوند که $\deg g \leq \deg f - 4$ و g روی خم مضاعف X° صفر است. از طرفی چون X روی $\mathbb{Q}$ تعریف شده می‌توان یک پایه برای $H^{\circ}(\Omega^2_X)$ به‌وسیلهٔ ۲ـفرمهای (۴. ۱۸) یافت که $g \in \mathbb{Q}[x, y, z]$.

این را هم یادآوری می‌کنیم که دیفرانسیلهای کهلر[2]

$$\Omega^1_{\mathbb{C}/\mathbb{Q}}$$

عبارت‌اند از فضای برداری مختلط تولیدشده به‌وسیلهٔ عبارات δa، $a \in \mathbb{C}$ به‌پیمانهٔ روابط

$$\begin{cases} \delta(a+b) &= \delta a + \delta b \\ \delta(ab) &= a\delta b + b\delta a \\ \delta a &= 0 \quad \text{برای } a \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

1. desingularization 2. Albanese

1. germ 2. Kähler

حال تعریف می‌کنیم

$$\langle\omega(p_i),\tau_i\rangle=\frac{g(x_i,y_i,z_i)}{f_z(x_i,y_i,z_i)}(\mu_i\delta y_i-\lambda_i\delta x_i)\in\Omega^1_{\mathbb{C}/\mathbb{Q}} \quad (۱۹.۴)$$

و

$$\langle\operatorname{Tr}\omega,\tau\rangle=\sum_i\langle\omega(p_i),\tau_i\rangle \quad (۲۰.۴)$$

در این صورت معادلهٔ دیفرانسیل آبل برای ۲ـفرمها با معادلهٔ $\Omega^1_{\mathbb{C}/\mathbb{Q}}$ـ مقداری

$$\operatorname{Tr}\omega=0 \quad (۲۱.۴)$$

تعریف می‌شود که ω مانند بالاست، و قضیه‌ای هم هست حاکی از اینکه معادلات (۴. ۱۵) و (۴. ۲۱) تغییر گویای بینهایت کوچکی را که در بالا شرح داده شد، تعریف می‌کنند.

(۴. ۲۲) **نتیجه.** اگر $\omega(p_i)\neq 0$ و x_i و y_i عناصر متعالی مستقلی باشند، آنگاه (۴. ۲۰) دارای جواب ناصفر نیست.

به‌عبارت دیگر هر قدر d بزرگ باشد، ۰ـدور $z=p_1+\cdots+p_d$ در ردهٔ هم‌ارزی گویایش «صلب» می‌باشد. (که این شامل تغییرات مجاز $(z+z')-z'$ برای هر $z'\in X^{(d')}$ نیز می‌شود.) این نتیجه علاوه بر اینکه اثباتی برای قضیهٔ مامفرد می‌دهد، معنای نسبتاً دقیقی به‌کاربرد مفهوم «نوعی» می‌دهد که در بحث مامفرد و گسترشهای بعدی آن توسط رویتمن[1]، و وازن[2] و دیگران، آمده است. و در آخر نیز داریم

(۴. ۲۳) **نتیجه.** اگر $x_i,y_i\in\overline{\mathbb{Q}}$، آنگاه (۴. ۲۰) برای هر انتخاب از τ_i ها صفر است.

این یک حالت بینهایت کوچک حدس معروف بیلینسن و بلاک است (که یک حکم وجودی هندسی به‌دست می‌دهد، گرچه تنها برای مرتبهٔ اول). به‌هرحال فهم انتگرالگیری از معادلات دیفرانسیل آبل (۴. ۱۵) و (۴. ۲۱) یک مسألهٔ عمیق و اساسی است.**

حال این پرسش منطقی به‌نظر می‌رسد که چگونه شیء اساساً حسابی $\Omega^1_{\mathbb{C}/\mathbb{Q}}$ وارد یک مسألهٔ هندسی محض می‌شود که دربارهٔ مماسهای کمانهایی در فضای ۰ـدوره‌هایِ روی یک رویهٔ جبری است. مثال زیر چگونگی این امر را نشان می‌دهد.

مثال. از آنجا که این مسألهٔ موضعی است، پس فضای کمانهای $z(t)$ در $Z^2(\mathbb{C})$ را در نظر می‌گیریم که منظور از کمان، یک ترکیب خطی متناهی با ضرایب صحیح از نگاشتهای تحلیلی از tـقرص به‌حاصلضرب متقارن $(\mathbb{C}^2)^{(d)}$ است. سپس می‌توانیم یک رابطهٔ هم‌ارزی $\sim$ روی فضای کمانها تعریف کنیم، و فضای مماس، فضای برداری مختلط زیر است

$$TZ^2(\mathbb{C}^2)=\{Z^2(\mathbb{C})^2_{\cdot}\ \text{کمانها در}\}/\sim$$

رابطهٔ هم‌ارزی $\sim$ نیز به‌وسیلهٔ ویژگیهای زیر مشخص می‌شود:

(۱) $z_i(t)\sim\widetilde{z}_i(t)$ $\quad i=1,2$
$\Rightarrow z_1(t)\pm z_2(t)\sim\widetilde{z}_1(t)\pm\widetilde{z}_2(t)$

(۲) $z(\alpha t)\sim\alpha z(t)$ $\quad \alpha\in\mathbb{Z}$

(۳) $\alpha z(t)\sim\alpha\widetilde{z}\Rightarrow z(t)\sim\widetilde{z}(t)$ $\quad \alpha\in\mathbb{Z}^*$

(۴) و اگر $z(t)$، $\widetilde{z}(t)$ کمانهایی در $\operatorname{Hilb}_\cdot(X)$ با بردارهای مماس برابر در $T\operatorname{Hilb}_\cdot(X)$ باشند، آنگاه $z(t)\sim\overline{z}(t)$.

حال قرار می‌دهیم

$$z_{\alpha\beta}(t)=\operatorname{Var}(x^2-\alpha y^2,xy-\beta t),\quad \alpha\neq 0$$

و F را گروه آزاد تولید شده به‌وسیلهٔ ۰ـدورهای

$$w_{\alpha\beta}(t)=z_{\alpha\beta}(t)-z_{1\beta}(t)$$

می‌گیریم. در این صورت نتیجهٔ زیر را داریم:

(۴. ۲۴) **نگاشت**

$$F/\sim\to\Omega^1_{\mathbb{C}/\mathbb{Q}}$$

که با

$$w_{\alpha\beta}(t)\to\beta\frac{\delta\alpha}{\alpha}$$

تعریف می‌شود، یک یکریختی خوش‌تعریف است.

به‌عنوان یک نتیجه هندسی نابدیهی می‌بینیم که اگر α ریشه واحد باشد آنگاه

$$z_{\alpha\beta}(t)\sim z_{1\beta}(t)$$

و این بیانگر یک رابطهٔ بسیار جالب و ظریف بین هندسه و حساب در نقص‌بعدهای بالاتر است.

در مجموع می‌توان گفت معادلات دیفرانسیل آبل (۴. ۲۱) برای حرکت گویای آرایشهای نقاط روی یک رویه، دارای خصلتی حسابی‌ـهندسی هستند. (انتگرالگیری از این معادلات چالش بزرگی در پیش می‌نهد. (نگاه کنید به پانوشت (**).)

۵. بازگویی

بحث را با انتگرال (۱. ۱)

$$\int y(x)dx$$

1. Roitman 2. Voisin

** انتگرالگیری از یک معادلهٔ دیفرانسیل به‌معنی پیدا کردن جواب به‌وسیلهٔ یک فرایند تکرار است. از آنجا که $\mathbb{Q}$ مشتق ندارد روشهای حساب و دیفرانسیل عملی نیست. باید مسأله را با وسایل دیگری به مسألهٔ «نموها» تبدیل کنیم، شاید با یک فرایند تکرار که در هر مرحله از «پیچیدگی حسابی» ۰ـدور بکاهد، یا با تحلیل معادله‌های دیفرانسیل (۴. ۱۰) و (۴. ۲۰) در کامل‌سازیهای $\mathbb{Q}$ تحت همهٔ ارزه‌ها(valuations).

از یک تابع جبری شروع کردیم. در آنجا دیدیم که در زمان آبل چنین انتگرالهایی به‌عنوان توابعی «قویاً متعالی» از حد بالای انتگرالگیری در نظر گرفته می‌شدند و بینش عمیق آبل در پیدا کردن دستورالعملی بود که با آن بتوان از میان آنها روابط ساده‌ای بیرون کشید. در سالهای اخیر علاقهٔ مجددی به انتگرالهای (۱. ۱) به‌وجود آمده است که دقیقاً به‌خاطر متعالی بودن آنها در حالت کلی است. روابطی از نوع آبلی، چه همهٔ چنین روابطی را تولید کنند و چه نکنند، پیامد آنها یکی از عمیقترین مسائل در هندسهٔ جبری حسابی است. اکنون این را به‌طور خلاصه تشریح می‌کنیم.

فرض کنیم معادلهٔ جبری

$$f(x, y(x)) = 0$$

که $y(x)$ در آن صدق می‌کند، روی $\mathbb{Q}$ (یا روی یک میدان عددی) تعریف شده باشد، یعنی $f(x, y) \in \mathbb{Q}[x, y]$. برای $\xi_0, \xi \in \mathbb{Q}$ قرار می‌دهیم

$$u(\xi) = \int_{\xi_0}^{\xi} y(x)dx \qquad (۱.۵)$$

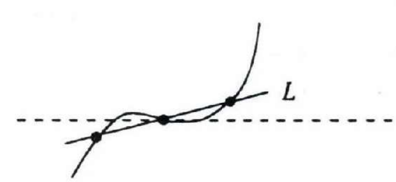
ویژگیهای تعالی اعداد $u(\xi)$ طی سالهای متمادی توسط ریاضیدانان بسیاری همچون انریکو بامبیری[1] مطالعه شده است. بامبیری در سال ۱۹۸۱ توانست نتیجه‌ای را که ابتدا در ۱۹۲۹ زیگل[2] اعلام کرده بود اثبات کند که به‌طور غیررسمی می‌توان آن را چنین بیان کرد:

(۵. ۲) فرض می‌کنیم $u(\xi)$ یك تابع جبری از ξ نباشد و برای سهولت می‌گیریم $\xi_0 = 0$ که به‌عنوان مقداری منظم از $y(x)$ در نظر گرفته شده است، در این صورت برای هر عدد طبیعی l، ثابت $C(l)$ وجود دارد که اگر

$$|\xi| < C(l)$$

آنگاه $u(\xi)$ در هیچ معادلهٔ جبری روی $\mathbb{Q}$ از درجهٔ l صدق نمی‌کند،

این نتیجه همچنین برای انتگرالهای کلیتر (۱. ۴) نیز صادق است، به‌خصوص در مورد انتگرال یک دیفرانسیل نوع اول. فرض کنیم F یک خم درجهٔ سوم و ξ_0 مختصهٔ x یک نقطهٔ عطف باشد، که خط مماس بر نقطهٔ عطف لغزشهای کوچکی دارد:



و با استفاده از قضیهٔ آبل به روابط خطی

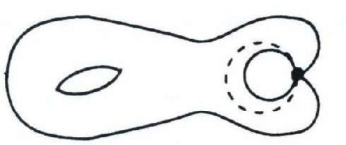
$$u(\xi_1) + u(\xi_2) + u(\xi_3) = 0 \qquad (۳.۵)$$

به‌ازای $|\xi_i|$ به‌اندازهٔ دلخواه کوچک، می‌رسیم. پس اگر به $u(\xi_i)$ها به‌عنوان اعدادی تقریباً متعالی به‌مفهوم (۵. ۲) بنگریم، به‌خاطر دلایل هندسی که از قضیهٔ آبل ناشی می‌شود، آنها باید در معادلات جبری (عملاً معادلاتی خطی) روی $\mathbb{Q}$ صدق کنند.

انتگرالهای به‌شکل

$$\int_{(\xi_0, \eta_0)}^{(\xi, \eta)} r(x, y(x))dx \qquad (۴.۵)$$

که $(\xi_0, \eta_0), (\xi, \eta) \in F(\overline{\mathbb{Q}})$، به‌همراه همتاهای تحلیلی آنها در بعدهای بالاتر، توسط کونتسویچ[1] و تساگیر[2] دوره‌های تناوب نامیده شده‌اند. دوره‌ها شامل حالتی که $(\xi, \eta) = (\xi_0, \eta_0)$ نیز می‌شوند؛ یعنی انتگرال در امتداد یک دور بستهٔ $\gamma \in H_1(F, \mathbb{Z})$. در حقیقت با یکی گرفتن (ξ, η) و (ξ_0, η_0) انتگرال (۵. ۴) تبدیل به انتگرالی بر یک دور بسته روی خمی تکین می‌شود.



دوره‌های تناوب یک میدان شمارای $\prod$ تولید می‌کنند که

$$\overline{\mathbb{Q}} \subset \Pi \subset \mathbb{C}$$

کونتسویچ و تساگیر همچنین خاطرنشان می‌کنند که هیچ مثال صریح و شناخته‌شده‌ای از یک عدد متعالی که دورهٔ تناوب نباشد در دست نیست.

اصل کلی این است:

(۵. ۵) روابط Π روی $\overline{\mathbb{Q}}$ باید با شرایطی هندسی تعریف شوند،

یک مثال از این اصل در بالا داده شد. برای مثال دیگر، اگر دیفرانسیلهای از نوع اول ω_1، $\cdots$ ، ω_g را که روی $\overline{\mathbb{Q}}$ تعریف شده‌اند چنان در نظر بگیریم که یک پایه برای $H^0(\Omega_F^1)$ نیز باشند، همچنین اگر $\gamma_1, \cdots, \gamma_{2g} \in H_1(F, \mathbb{Z})$ یک پایهٔ متعارف برای اولین هومولوژی انتگرالی باشد، آنگاه دوره‌های

$$\pi_{\alpha j} = \int_{\gamma_j} \omega_\alpha$$

در اولین رابطه‌های دوخطی ریمان صدق می‌کنند:

$$\sum \pi_{\alpha i} Q_{ij} \pi_{\beta j} = 0 \qquad (۶.۵)$$

که در اینجا $Q = ||Q_{ij}||$ وارون ماتریس تقاطع است. به‌طور هندسی، این رابطه از ردهٔ قطر $\Delta \subset F \times F$ می‌آید. از این کلیتر، هر تناظر تعمیم یافتهٔ $T \subset \underbrace{F \times \cdots \times F}_{n}$ یک رابطهٔ چندجمله‌ای از درجهٔ n روی $\mathbb{Q}$

---

1. Enrico Bombieri 2. Siegel

1. Kontsevich 2. Zagier

به‌دست می‌دهد. یک حدس زیبا و عمیق از گروتندیک این است که همهٔ رابطه‌های $\pi_{\alpha j}$ روی $\mathbb{Q}$ با چنین روشی به‌دست می‌آیند. در حقیقت حدس گروتندیک حکم مشابهی برای واریته‌های هموار از بعد دلخواه روی $\overline{\mathbb{Q}}$ و همهٔ کوهومولوژی‌های دورام جبری تعریف شده روی $\overline{\mathbb{Q}}$ است.

من فرمولبندی دقیق و غیرمبهمی از (۵. ۵) مشتمل بر حدس گروتندیک (که از لحاظی فراگیر است) و رابطه‌های از نوع آبل (که از لحاظی موضعی‌اند، گرچه از شرط فراگیر تساوی $h^0(\Omega^1_{\mathbb{P}^1}) = 0$ ناشی می‌شوند) نمی‌شناسم. اما با در نظر گرفتن جنبه‌های حسابی معادلات دیفرانسیل آبل که در بخش قبل مطرح شد و پرسشهای حسابی مربوط به دوره‌ها که در بالا آمد، معتقدم که تقریباً با اطمینان می‌توان گفت جنبه‌های حسابی قضیهٔ آبل و میراث آن، در قرن سوم بعد از آبل یك مبحث اساسی و عمیق برای ریاضیدانان خواهد بود.

۶. راهنمایی در بارهٔ نوشتگان این مبحث

«گزارش پاریس» (Paris memoiré) معروف آبل مقاله‌ای است با عنوان

Memoiré sure une propriété genérale d'une class trés entendue des fonctions transcendantes

که در سال ۱۸۲۶ به آکادمی علوم پاریس تسلیم شد و در جلد هفتم «گزارش» در ۱۸۴۱ انتشار یافت. این مقاله در مجموعهٔ آثار آبل:

Oeuvres complétes de Niels Henrik Abel, pages 145-211

نیز آمده است.

مقاله‌ای که در پانوشت (*) به آن ارجاع داده شده،

sur l'integration de la formule differentielle $pdx/\sqrt{R}, R$ *and* ρ *étant des fonctions entières*, Oevres complétes, pages 104-144

است. مقالهٔ جدید مالیشف (V. A. Malyshev)،

Abel equations, St. Petersburg Math. J., vol. 13 (2002), pages 1-45

حاوی گسترشی از قضیهٔ آبل و راهنمایی بیشتری در مورد نوشتگان است.

روایت معمولی قضیهٔ آبل و عکس (فراگیر) آن در کتابهای متعارف مربوط به رویه‌های ریمانی آمده است، مثلاً در کتاب معروف

Die idee der Riemannischer flächen

اثر هرمان وایل.

عکسهای موضعی، ازجمله قضیهٔ سوفوس لی و گسترشهای آن به‌وسیلهٔ داربو و دیگران، در مقاله‌ای به قلم این مؤلف:

Variations on a theorem of Abel, Inventiones Math., vol. 35 (1976), pages 321-390

مورد بحث قرار گرفته است. مقالهٔ جدید

G. Henkin, *Abelian differentials on singular varieties and variations on a theorem of Lie-Griffiths*, Invent. Math., vol. 135 (1991), pages 297-328

نتایج و مراجع جدیدی را که پس از مقالهٔ فوق‌الذکر انتشار یافته‌اند معرفی می‌کند.

نظریهٔ بافته‌ها برای نخستین بار در کتاب

Geometrie der Geube. Topologische Frogen der Differentialgeometrie, Springer, Berlin (1938)

اثر بلاشکه (W. Blaschke) و بُل (G. Bol) عرضه شد. دو اثر جدید، یکی

Analytic web geometry, in Web Theory and Related Topics, World Sci. Publishing, Toulouse (1996), 6-47

اثر هنو (A. Hénaut) و دیگری

Differential geometry of webs in Handbook of differential geometry, vol. I, pages 1-152, North-Holland (2000)

اثر اکیویس (M. Akivis) و گُلدبرگ (V. Goldberg) حاوی مروری بر آثار جدید و راهنمایی بیشتر در مورد نوشتگان است.

صورت آبلی معادلهٔ تابعی برای دی‌لگاریتم در مقاله‌ای از آبل:

Note sur la fonction $\psi x = x + \frac{x^2}{x^2} + \frac{x^3}{3^2} + \cdots + \frac{x^n}{n^2} + \cdots$, Oeuvres complétes, pages 189-193

آمده است.

فرمول بلاک (Bloch) برای $T_f CH^2(X)$ را می‌توان در منبع زیر یافت

Lectures on algebraic cycles, Duke Univ. Math. Ser. IV (1980).

بحثی در بارهٔ گسترش قضیهٔ آبل به آرایه‌های نقاط روی یک رویهٔ جبری در نوشته‌ای به قلم مارک گرین و این مؤلف با مشخصات زیر

Abel's differential equations, Houston J. of Math. (volume in honor of S. S. Chern), vol. 28 (2002), pages 329-351

آمده است.

در مقاله‌ای از کونتسویچ (M. Kontsevich) و زاگیر (D. Zagier):

Periods, Mathamatics unlimited–2001 and beyond, Springer, Berlin (2001), pages 771-808

یک بررسی کلی از ویژگیهای حسابی انتگرالهای جبری انجام شده است. قضیهٔ بومبیری-زیگل (Bombieri-Siegel) در مقاله‌ای از بومبیری با مشخصات زیر شرح داده شده است

On G-functions, Recent progress in analytic number theory, Vol. 2, Durham (1979), pages 1-67.

کتاب

G-functions and geometry, Aspects of mathematics, E/3, Friedr. Vieweg and Sohn, Brandenberg (1989)

اثر اندره (I. André) شامل «تعمیم»ی از این موضوعات، ازجمله بحثی در بارهٔ حدس گروتندیک است.

* * * * * *

• Phillip Griffiths, "The legacy of Abel in algebraic geometry", *Legacy of Neils Henrik Abel: The Abel Bicentennial Oslo, June 3-8 2002*, by R. Piene and O. A. Lauda (eds.), Springer (2003).

* فیلیپ گریفیث، دانشگاه پرینستن، آمریکا