نشر ریاضی، سال ۱۴، شمارهٔ ۱، صص. ۶ـ۹

ژان پیر سِر و نظریهٔ اعداد

فریدون شهیدی*

ژان پیر سِر[1] دستاوردهای اساسی و متنوعی در نظریهٔ اعداد دارد. چنانکه از جلد سوم (۱۹۷۲ـ۱۹۸۴) و جلد چهارم (۱۹۸۵ـ۱۹۹۵) مجموعهٔ آثار وی پیداست، کار عمدهٔ او در ۳۰ سال اخیر دورهٔ کاری‌اش در این زمینه بوده است. این تحقیقات ادامهٔ طبیعی کار قبلی او در زمینهٔ توپولوژی جبری و هندسهٔ جبری است. در این باره در یکی از مصاحبه‌های سر که اکنون جزو مجموعهٔ مقالاتش (صفحهٔ ۹۵، جلد چهارم) انتشار یافته، توضیح کامل داده شده است.

نمی‌توان از تحقیقات سر در نظریهٔ اعداد یاد کرد و به کار او در کوهومولوژی گالوایی اشاره‌ای نکرد. ولی این دستاورد نسبتاً معروف و تثبیت شده است و بنابراین، من در اینجا به‌بحث دربارهٔ بعضی از مقالات بعدی او در نظریهٔ اعداد می‌پردازم. دست‌کم دومقالهٔ اولی که مطرح می‌کنم، جزو پیشرفتهای اساسی به‌شمار می‌آیند و آخری هم مقالهٔ جدید زیبایی است که در جورنال انجمن ریاضی آمریکا [۵] منتشر شده و مربوط است به توزیع یکسان[2] ویژه‌مقدارهای هکه در چندزمینهٔ متفاوت، که پیامدهای شگفت‌انگیزی دارد.

۱. نخست از مقالهٔ مشترک او با پیر دِلین [۷] شروع می‌کنم که به‌نظر بسیاری از متخصصان یک دستاورد دورانساز در نظریهٔ فرمهای خودریخت[3] است.

فرض کنید H نشان‌دهندهٔ نیمصفحهٔ بالایی اعداد مختلط $z=x+iy$، $y>0$ باشد. همچنین فرض کنید Γ یک زیرگروه همنهشتی از $SL_2(\mathbb{Z})$، ماتریسهای صحیح دو در دویی که دترمینان آنها ۱ است، باشد. این، به‌بیان دقیقتر، بدان معنی است که عدد طبیعی Nای وجود دارد به‌طوری که $\Gamma \supset \Gamma(N)$ که در آن

$$\Gamma(N)=\{\gamma\in SL_2(\mathbb{Z}) \mid \gamma = I\ (\text{پیمانهٔ } N)\}$$

1. Jean-Pierre Serre 2. equidistribution

3. automorphic forms

$\Gamma(N)$ یک زیرگروه همنهشتی اصلی نامیده می‌شود.

فرض کنید k عددی صحیح است و f تابعی مختلط روی H. مرسوم است که به‌ازای هر $\gamma\in SL_2(\mathbb{Z})$ قرار می‌دهند

$$(f|_k\gamma)(z)=(cz+d)^{-k}f(\gamma\cdot z)$$

که در آن به‌ازای $\gamma=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$،

$$\gamma\cdot z=\frac{az+b}{cz+d}$$

(به‌آسانی می‌توان تحقیق کرد که $\mathrm{Im}(\gamma\cdot z)=y/|cz+d|^2$ و نتیجه گرفت: $\gamma.z\in H$.)

تابع f را فرم پیمانه‌ای تمامریخت[1] به‌وزن k نسبت به Γ می‌نامند اگر

۱) به‌ازای هر $\gamma\in\Gamma$، $f|_k\gamma=f$

۲) f روی H تمامریخت باشد، و

۳) با مفروض بودن $\sigma\in SL_2(\mathbb{Z})$، $f|_k\sigma$ بسطی به‌صورت سری توانی برحسب $\exp(2\pi iz/N)$ داشته باشد که در آن هیچ توان منفی‌ای ظاهر نشود، یعنی f روی «تیزه‌ها»[2]ی H، $\mathbb{Q}\cup i\infty$، هم تمامریخت باشد.

گوییم f تیزه‌ای[3] است اگر هیچ نمای نامثبتی در هر بسط ظاهر نشود، یعنی f روی همهٔ تیزه‌ها صفر باشد. فرض کنید $M_k(\Gamma)$ و $S_k(\Gamma)$ به‌ترتیب نشان‌دهندهٔ فضاهای برداری مختلط همهٔ فرمهای پیمانه‌ای و فرمهای تیزه‌ای به‌وزن k نسبت به Γ باشند.

1. holomorphic 2. cusps 3. cuspidal

در آنچه در پی می‌آید، بحث را به فرمهایی نسبت به زیرگروه هکهٔ[1] $\Gamma_\circ(N) \subset SL_2(\mathbb{Z})$ که با

$$\Gamma_\circ(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) | c \equiv \circ \, (\text{پیمانهٔ } N) \right\}$$

تعریف می‌شود، محدود می‌کنیم. ولی یک سرشت دیریکله[2] از نوع دلخواه را مجاز می‌داریم. $\Gamma = \Gamma_1(N)$ را به‌صورت

$$\Gamma_1(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) | a \equiv d \equiv 1 \, (\text{پیمانهٔ } N), c \equiv \circ \, (\text{پیمانهٔ } N) \right\}$$

تعریف می‌کنیم و فرض می‌کنیم ε یک سرشت دیریکله به‌پیمانهٔ N باشد یعنی یک همریختی

$$\varepsilon : (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^* \to \mathbb{C}^*.$$

گوییم ε زوج است اگر $\varepsilon(-1) = 1$، و فرد است اگر $\varepsilon(-1) = -1$. توجه کنید که

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \to d \; (\text{پیمانهٔ N})$$

یک یکریختی بین $\Gamma_\circ(N)/\Gamma_1(N) \simeq (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*$ برقرار می‌کند و در نتیجه ε یک سرشت $\Gamma_\circ(N)/\Gamma_1(N)$ را تعریف می‌کند.

یک فرم پیمانه‌ای به‌وزن k نسبت به $\Gamma_1(N)$ از نوع (k, ε) نسبت به $\Gamma_\circ(N)$ نامیده می‌شود اگر به ازای هر $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_\circ(N)$،

$$f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = \varepsilon(d)(cz+d)^k f(z).$$

فرض کنید $M_k(\Gamma_\circ(N), \varepsilon)$ فضای برداری این فرمها باشد.

گروه $\Gamma_1(N)$ یک زیرگروه نرمال $\Gamma_\circ(N)$ است و $\Gamma_\circ(N)/\Gamma_1(N) \cong (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*$. به‌علاوه $\Gamma_\circ(N)$ با عمل کردن بر H، بر $M_k(\Gamma_1(N))$ و $S_k(\Gamma_1(N))$ عمل می‌کند و در نتیجه

$$M_k(\Gamma_1(N)) = \bigoplus_{\Delta\varepsilon \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*} M_k(\Gamma_\circ(N), \varepsilon)$$

و همین‌طور است در مورد $S_k(\Gamma_1(N))$. پس اگر ε را به‌کار ببریم، می‌توانیم مطالعهٔ فرمها نسبت به $\Gamma_1(N)$ را به مطالعهٔ فرمها نسبت به $\Gamma_\circ(N)$ ولی با سرشت دیریکله، تقلیل دهیم.

اگر $f \in M_k(\Gamma_\circ(N), \varepsilon)$، آنگاه بااستفاده از $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \circ & 1 \end{pmatrix} \in \Gamma_\circ(N)$ نتیجه می‌گیریم $f(z) = f(z+1)$ و بنابراین، بسط فوریهٔ

$$f(z) = \sum_{a \geq \circ} a_n q^n$$

را به‌دست می‌آوریم که در آن $q = \exp(2\pi i z)$. حال به‌ازای هر عدد اول p، عملگرهای هکهٔ T_p و U_p را با

$$f|T_p = \sum a_{pn} q^n + \varepsilon(p) p^{k-1} \sum a_n q^{pn}$$

به‌ازای هر $p \nmid N$ و

$$f|U_p = \sum a_{pn} q^n$$

به‌شرط $p|N$ تعریف می‌کنیم. در این صورت، تابع حاصل باز به $M_k(\Gamma_\circ(N), \varepsilon)$ تعلق دارد و تیزه‌ای است اگر f چنین باشد. (توجه: نماد ۱ به‌معنای تحدید نیست.)

عملگرهای T_p نسبت به حاصلضرب داخلی پترسن[1]، ارمیتی هستند و بنابراین می‌توانند همزمان قطری شوند. ما به آن اعضایی از $M_k(\Gamma_\circ(N), \varepsilon)$ علاقه‌مندیم که ویژه‌تابعهای مشترک به‌ازای همهٔ آن عملگرها هستند.

به‌آسانی می‌توان نشان داد که اگر به‌علاوه فرض کنیم $a_1 = 1$، آنگاه به‌ازای هر $p \nmid N$، ویژه‌مقدار λ_p از T_p روی f، که با $T_p f = \lambda_p f$ تعریف می‌شود، همان $\lambda_p = a_p$ است.

یک ایدهٔ جالب توجه، تعمیم تقابل آرتینی است، یعنی اینکه بتوانیم فرمهای پیمانه‌ای را به‌وسیلهٔ اشیای حسابی پارامتری کنیم. نتیجهٔ بنیادی سر در این زمینه در مقالهٔ مشترکش با دُلین این است که اگر $k = 1$ و ε فرد باشد، آنگاه می‌توان نمایشهای مختلطی ازگروه گالوای مطلق به‌عنوان اشیای پارامتری‌کننده انتخاب کرد. در آن صورت، گزاره‌های حسابی از قبیل حدس رامانوجان دربارهٔ ضرایب فوریهٔ فرمهای تیزه‌ای بلافاصله نتیجه می‌شوند. قضیهٔ لافورگ که مدال فیلدز را برایش به‌ارمغان آورد، این مسأله را در مورد میدانهای توابع با بُعد دلخواه حل و فصل کرد؛ قبلاً درینفلد به‌خاطر حل حالت ۲ بعدی آن مدال فیلدز گرفته بود. نوعی از فرمهای پیمانه‌ای که تکلیف مسألهٔ پارامتری‌سازی برای آن روشن نشده است، همتایِ میدان اعدادیِ فرمهایی است که درینفلد بررسی کرد. برنامهٔ لنگ‌لندز شامل مجموعه‌ای از نتایج و حدسها در جهت اثبات کل این ایده، هم در مورد میدانهای توابع و هم در مورد میدانهای اعداد، است.

حال برای بیان دقیق قضیهٔ دُلین‌ـسر، چند کلمه‌ای دربارهٔ نمایشهای گالوا می‌گوییم.

فرض کنید $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ عبارت است از گروه گالوای مطلق $\mathbb{Q}$، حد معکوس گروههای گالوایِ منسوب به همهٔ بسطهای متناهی $\mathbb{Q}$، مجهز به توپولوژی‌کرول[2] که درآن عناصر یک پایه برای مجموعه‌های باز، پایدارساز[3]های بسطهای متناهی $\mathbb{Q}$ هستند. منظور از یک نمایش مختلط $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$، همریختی پیوسته‌ای چون

$$\rho : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \to \mathrm{Aut}(V)$$

است که در آن V یک فضای برداری مختلط است. دراینجا بیشتر با نمایشهای دوبعدی سروکار داریم یعنی حالتی که در آن $\mathrm{Aut}(V) = GL_2(\mathbb{C})$.

1. Hecke 2. Dirichlet character

1. Petersson 2. Krull 3. stabilizer

اگر $\mathfrak{p}$ ایده‌آل اولی از $\overline{\mathbb{Q}}$ بالاسر p باشد، فرض کنید $F_\mathfrak{p} \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ نشان‌دهندهٔ خودریختی فروبنیوس در $\mathfrak{p}$ باشد. به‌بیان دقیقتر، به‌ازای هر $x \in O_\mathfrak{p}$، که $O_\mathfrak{p}$ حلقهٔ اعداد صحیح $\overline{\mathbb{Q}}$ در $\mathfrak{p}$ است،

$$F_\mathfrak{p}(x) \equiv x^p (\text{پیمانهٔ } \mathfrak{p})$$

چون $\mathfrak{p}$های متفاوتی بالاسر p وجود دارند، $F_\mathfrak{p}$ یکتا نیست، ولی ردهٔ مزدوجی آن را باز با F_p نمایش می‌دهیم. گروه اینرسی $I_\mathfrak{p}$ در $\mathfrak{p}$، زیرگروه همهٔ τهای متعلق به $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ است که به‌ازای هر $x \in Q_\mathfrak{p}$ در

$$\tau(x) \equiv x (\text{پیمانهٔ } \mathfrak{p})$$

صدق می‌کنند.

نمایش ρ را بی‌شاخه[1] در p می‌نامند اگر روی $I_\mathfrak{p}$ به‌ازای $\mathfrak{p}$ای بالاسر p، بدیهی باشد. از آنجا که تصویر $\rho(F_p)$ یک ردهٔ مزدوجی در $GL_2(\mathbb{C})$ است، می‌توان

$$Tr(\rho(F_p)) = \mathrm{trace}\ (\rho(F_p))$$

و $\det(\rho(F_p))$ را در نظر گرفت.

قضیهٔ اصلی دُلین‌ـسر در این مقاله، قضیهٔ ۴. ۱، نتیجهٔ مهم زیر را در جهت مسألهٔ پارامتری‌سازی اثبات می‌کند.

قضیه فرض کنید N عددی صحیح و مثبت و ε یك سرشت دیریکلهٔ فرد به پیمانهٔ N باشد یعنی $\varepsilon(-1) = -1$. همچنین فرض کنید f فرم پیمانه‌ای ناصفری به‌وزن ۱ و سرشت دیریکلهٔ ε باشد یعنی عنصری در $M_1(\Gamma_0(N), \varepsilon)$ که ویژه‌تابعی برای T_p با ویژه‌مقدار a_p به‌ازای هر $p \nmid N$ است، در این صورت، نمایشی چون $\rho: \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \to GL_2(\mathbb{C})$ وجود دارد که به‌ازای هر $p \nmid N$ بی‌شاخه است به‌قسمی‌که $Tr(\rho(F_p)) = a_p$ و $\det(\rho(F_p)) = \varepsilon(p)$. به‌علاوه ρ تحویل‌ناپذیر است اگر و تنها اگر f تیزه‌ای باشد.

نتیجه (حدس رامانوجان) $|a_p| \leq 2$

انتظار داریم که هر نمایش دوبعدی $G_\mathbb{Q} = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ یا یک فرم پیمانه‌ای به‌وزن ۱ (ρ فرد) یا یک فرم ماس[2] (ρ زوج) را پارامتری می‌کند. عکس این موضوع به‌وضوح غلط است زیرا حتی τـتابع رامانوجان، فرم تیزه‌ایِ بهنجارِ یکتایِ به‌وزن ۱۲ نسبت به $SL_2(\mathbb{Z})$، گالوایی از هیچ نوع نیست. این فلسفهٔ معکوس به لنگ لندز (و تونل) امکان داده است که حدس آرتین دربارهٔ تمامریختی Lـتابعهای آرتین منسوب به نمایشهای مختلط تحویل‌ناپذیر دوبعدی $G_\mathbb{Q}$ را به‌ازای هر ρ که تصویرش در $PGL_2(\mathbb{C}) = GL_2(\mathbb{C})/\mathbb{C}^*$ حل‌پذیر باشد، ثابت کنند. ریچارد تیلر و همکارانش اکنون توانسته‌اند پارامتری‌سازی معکوس را برای بسیاری از نمایشهای مختلط دوبعدی فردِ گروه گالوایِ از نوع حل‌ناپذیر ثابت کنند. ولی حل و فصل پارامتری‌سازی معکوس و حدس آرتین برای نمایشهای دلخواه ۲ بعدی $G_\mathbb{Q}$ هنوز مورد سؤال است، به‌خصوص برای نمایشهای زوج.

1. unramified 2. Maass

یک پیشرفت چشمگیر جدید در مورد فرمهای ماس در جهت مستقیم (نه‌معکوس) به‌وسیلهٔ پیتر سرنک به‌دست آمده است که اخیراً ثابت کرد فرمهای ماس بهنجاری که ضرایب فوریهٔ آنها، a_pها، به $\mathbb{Z}$ تعلق دارند، در واقع به وسیلهٔ نمایشهای زوج $G_\mathbb{Q}$ پارامتری می‌شوند [۴]. وی در این اثبات از نتایج اخیر کیم‌ـشهیدی [۲] استفاده کرده است.

۲. سر تحقیقاتی اساسی در نظریهٔ نمایشهای پیمانه‌ای گروههای گالوا کرده است. در اینجا فضای نمایش ρ روی میدان $\overline{F}_p$، بستار جبری میدان $F_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ از p عنصر است، که p عددی اول است. ما بیشتر با نمایشهای دوبعدی سر و کار داریم و بنابراین

$$\rho : G_\mathbb{Q} \to GL_2(\overline{F}_p)$$

یک همریختی پیوسته است.

بررسی چنین نمایشهایی بسیار مهم است. مثلاً یک نقطهٔ شروع در اثبات وایلز از حدس شیمورا‌ـتانیاما در مورد خمهای بیضوی نیمه‌پایدار، یعنی ابزار اصلی در اثبات او از قضیهٔ آخر فرما، نمایشی از $G_\mathbb{Q}$ روی نقاط pـبخشی (نقاط از مرتبهٔ p) از $E(\overline{\mathbb{Q}})$ است که در آن E خم بیضوی موردنظر است. پیمانه‌ای بودن این نمایش به‌ازای نقاط ۳ و ۵ـبخشیِ خم بیضوی فرای، نقطهٔ آغاز کار وایلز است.

سر در سال ۱۹۸۷ در مقاله‌ای [۶] چند حدس بسیار دقیق دربارهٔ نمایشهای پیمانه‌ای مطرح می‌کند. به‌بیان دقیقتر، او حدس می‌زند که هر نمایشِ فردِ تحویل‌ناپذیرِ پیوستهٔ

$$\rho : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \to GL_2(\overline{F}_p)$$

پیمانه‌ای است به‌این معنی که فرمی تیزه‌ای نسبت به $\Gamma_0(N)$ وجود دارد با ضرایب فوریهٔ متعلق به حلقهٔ اعداد صحیح $\overline{\mathbb{Z}}$ از $\overline{\mathbb{Q}}$ که تحویل آنها به پیمانهٔ $\mathfrak{p}$، که $\mathfrak{p}$ ایده‌آل اولی از $\overline{\mathbb{Z}}$ بالاسر p است، همنهشت با اثر $(\rho(F_p))$ است؛ و همین‌طور است در مورد دترمینانها.

حالت خاصی از این حدس که ریبت آن را ثابت کرد [۳]، امکان پایین‌آوردن تراز فرم، N، را بدون تغییر نمایش پیمانه‌ای متناظر $G_\mathbb{Q}$ فراهم می‌آورد. چنانکه می‌دانیم، اگر کاهش تراز به‌روش ریبت، به‌وسیلهٔ حدس شیمورا‌ـتانیاما، بر فرم پیمانه‌ای به‌وزن ۲ منسوب به‌خم فرای اِعمال شود، به‌تناقض می‌انجامد و قضیهٔ آخر فرما ثابت می‌شود. فرم پیمانه‌ایِ به‌وزن ۲ منسوب به‌خم بیضوی فرای E با ارتقاء نمایش پیمانه‌ای $G_\mathbb{Q}$ روی نقاط ۳ـبخشی $E(\overline{\mathbb{Q}})$، نخست به یک فرم با وزن ۱ به‌روش لنگ‌لندز‌ـتونل و سپس با ضرب کردن در یک سری آیزنشتاین، به‌دست می‌آید.

۳. مقاله را با بحث مختصری دربارهٔ ایده‌های سر در مورد توزیع یکسان ویژه‌مقدارهای هکهٔ فرمهای تیزه‌ای به‌پایان می‌آوریم. اگر f متعلق به $S_k(\Gamma_0(N))$ باشد، یعنی فرمی تیزه‌ای به وزن k که ویژه تابعی برای همهٔ عملگرهای هکه با ضابطهٔ $a_1 = 1$ است، آنگاه بنا به قضیهٔ دُلین، ضرایب فوریهٔ بهنجار آن، $|a_n|$، نابیشتر از ۲اند. حدس معروف ساتو‌ـتیت دلالت

می‌کند که ویژه‌مقدارهای $a_p \in [-۲, ۲]$ باید روی $[-۲, ۲]$ دارای توزیع یکسان نسبت به اندازهٔ طبیعی

$$\mu_\infty = \frac{۱}{\pi}\sqrt{۱ - \frac{x^۲}{۴}} \qquad dx = \frac{۲}{\pi}\sin^۲ \varphi d\varphi$$

باشند. این حدس بسیار دشوار است و چنانکه سر در کتابش: نمایشهای lـآدیك آبلی توضیح می‌دهد، از ویژگیهای تحلیلی خاصی از Lـتابعهای توانی متقارن $GL(۲)$ نتیجه می‌شود. هرچند در پرتو پیشرفت جدید در مورد ویژگیهای تحلیلی این Lـتابعها [۱] شواهد جدیدی در جهت تأیید حدس به‌دست آمده، تا حل و فصل آن راه زیادی مانده است.

سر در مقاله‌ای [۵] مسأله‌ای ساده‌تر ولی مرتبط با مطلب فوق را بررسی می‌کند و اندازهٔ ساتوـتیت μ_∞ را به مفهومی به‌مکانهای p آدیک تعمیم می‌دهد؛ به این منظور، یک اندازهٔ μ_p به‌ازای هر p به‌صورت

$$\mu_p = \frac{p+۱}{\pi} \cdot \frac{(۱ - x^۲/۴)^{۱/۲} \cdot dx}{(p^{۱/۲} + p^{-۱/۲})^۲ - x^۲}$$

معرفی می‌کند که به‌وضوح برابر با اندازهٔ ساتوـتیت μ_∞ است وقتی $p \to \infty$، در حالی که $\mu_۱ = d\frac{\varphi}{\pi}$. سپس یکسان بودن توزیع ویژه‌مقدارهای هکهٔ بهنجار در $[-۲, ۲]$ را ثابت می‌کند. برای اینکه تصوری از این حکم (و حتی از موضوع یکسانیِ توزیع) به‌دست آورید، یکی از نتایج آن را بیان می‌کنیم:

فرض کنید α و β دو عدد حقیقی صادق در $-۲ \le \alpha \le \beta \le ۲$ باشند، همچنین فرض کنید N_λ و k_λ عددهای صحیح مثبتی باشند که p، N_λ را عاد نکند و k_λ زوج باشد، به‌علاوه فرض کنید $k_\lambda + N_\lambda \to +\infty$ وقتی $\lambda \to +\infty$. در این صورت، چگالی مجموعهٔ ویژه‌مقدارهای هکهٔ بهنجارشده (a_p بخش بر $p^{(k_\lambda - ۱)/۲}$) از فرمهای تیزه‌ای در $S_{k_\lambda}(N_\lambda)$ که بین α و β قرار دارند، وقتی $\lambda \to +\infty$ به $\int_\alpha^\beta \mu_p(x)$ میل می‌کند،

این دستاورد، کاربردهای بسیاری از جمله شناختِ بهتر درجات ممکنِ میدانهای تعریف فرمهای تیزه‌ای (یعنی درجات توسیعهای $\mathbb{Q}$ با الحاقِ ضرایب فوریه)، توزیع ویژه‌مقدارهای فروبنیوس برای خمهای روی میدانهای توابع، و مسائل مربوط به توزیع در مورد گرافهای رامانوجان دارد.

مراجع

1. Henry H. Kim and Freydoon Shahidi, "Cuspidality of symmetric powers with applications", *Duke Math. J.*, (1) **112** (2002) 177-197.

2. Henry H. Kim and Freydoon Shahidi, "Functional products for $GL_2 \times GL_3$ and the symmetric cube for GL_2", with an appendix by Colin J. Bushnell and Guy Henniart, *Ann of Math.*, (3) **155** (2002) 837-893.

3. K. A. Ribet, "On modular representations of Gal $(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ arising from modular forms", *Invent. Math.*, (2) **100** (1990) 431-476.

4. P. Sarnak, "Mass cusp forms with integer coefficients", *A Panorama of Number Theory of the View from Baker's Garden*, G. Wustholz, ed., Cambridge University Press (2002) 121-128.

5. Jean-Pierre Serre, "Répartition asymptotique des valeurs propres de l'opérateur de Hecke Tp", (French) ["Asymptotic distribution of the eigenvalues of the Hecke operator T_p"], *J. Amer. Math. Soc*, (1) **10** (1997) 75-102.

6. Jean-Pierre Serre, "Sur les représentations modulaires de degré 2 de Gal $(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$", (French) ["on modular representations of degree 2 of Gal $(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$"], *Duke Math. J.*, (1) **54** (1987) 179-230.

7. Jean-Pierre Serre and Pierre Deligne, "Formes modulaires de poids 1", *Ann. Sci. Ec. Norm. Sup.*, (**7**) (1974) 507-530.

* * * * * *

* فریدون شهیدی، دانشگاه پردو، آمریکا

shahidi@math.purdue.edu

کاربرد ساده‌ای از قضیهٔ آخرفرما

اندرو وایلز ثابت کرد که معادلهٔ $x^n + y^n = z^n$ به‌ازای $n \ge ۳$ هیچ جواب نابدیهی در اعداد صحیح ندارد.
به‌کمک این قضیه می‌توان قضیهٔ زیر را به‌صورتی ساده‌تر نتیجه گرفت.

قضیه. به‌ازای $n \ge ۳$، $\sqrt[n]{۲}$ گویا نیست.

اثبات. به خلاف، فرض کنیم $\sqrt[n]{۲} = q/q$ که p و q اعدادی صحیح و مثبت هستند و نسبت به هم اول‌اند. بنابران $\frac{p^n}{q^n} = ۲$ و یا $p^n = q^n + q^n = ۲q^n$. اما بنابر قضیهٔ فوق، معادلهٔ اخیر به‌ازای $n \ge ۳$ هیچ جواب نابدیهی ندارد. بنابراین تساویِ فرض ممکن نیست و به این ترتیب حکم قضیه نتیجه می‌شود.

* * * * * *

اثبات از ویلیام هنری شولتز (William Henry Schultz)
دانشجوی کارشناسی ریاضی دانشگاه کارولینای شمالی در شارلوت.

مجلهٔ مانتلی، شمارهٔ مه ۲۰۰۳