نشر ریاضی، سال ۸، شمارهٔ ۲، صص ۴ـ۸

روشهای احتمالاتی در بررسی سیالات

فریدون رضاخانلو*

یک مسألهٔ مهم در مکانیک آماری استنتاج معادلات ماکروسکوپی از توصیف میکروسکوپی گازها و سیالات است. مثلاً با استفاده از قوانین بقای جرم، اندازهٔ حرکت و انرژی، می‌توان ۵ معادله برای توصیف ماکروسکوپی یک سیال به‌دست آورد. این معادلات موسوم به معادلات اویلر هستند و یک دستگاه معادلات دیفرانسیل جزئی غیرخطی را تشکیل می‌دهند. توصیف میکروسکوپی یک سیال از قوانین بنیادی مکانیک نتیجه می‌شود. یک سیال شامل حدود 10^{23} مولکول است که اگر نیروی بین مولکولها شناخته شده باشد، می‌توان با استفاده از قانون دوم نیوتن شتاب هر مولکول را حساب کرد. در نتیجه می‌توان دستگاهی از معادلات دیفرانسیل عادی برای مکان و سرعت مولکولها به‌دست آورد. استنتاج معادلات اویلر از توصیف میکروسکوپی ذکر شده هنوز یک مسألهٔ حل نشده است. لیکن حالات ساده‌شده‌ای از این مسألهٔ اخیراً با موفقیت بررسی شده است.

در نظریهٔ معادلات دیفرانسیل، معادلهٔ اویلر متعلق به خانوادهٔ معادلات هذلولوی است زیرا از مرتبهٔ اوّل می‌باشد. برای بعضی سیالات، معادلات ناویر-استوکس توصیف بهتری ارائه می‌دهد. این معادلات از مرتبهٔ دو هستند و متعلق به خانوادهٔ معادلات سهموی‌اند.

به‌عنوان مثال به استنتاج شهودی یک معادلهٔ سهموی از یک مدل ساده شده برای چگالی رنگ در یک سیال راکد می‌پردازیم.

فرض کنید که به یک سیال راکد در لولهٔ باریکی به‌طول l مقداری رنگ، اضافه کنیم. می‌خواهیم یک معادلهٔ دیفرانسیل برای چگالی رنگ در لوله به‌دست آوریم. اگر این چگالی را در نقطهٔ x از لوله و زمان t به $\rho(x,t)$ نمایش دهیم، آنگاه انتگرال $m(t)=\int_a^b \rho(x,t)dx$ جرم کل رنگ در لوله از نقطهٔ a تا b در زمان t را به‌دست می‌دهد. تغییر $m(t)$ فقط در اثر ورود و خروج رنگ در نقاط a و b رخ می‌دهد. اگر $\varphi(x,t)$ شار رنگ را در نقطهٔ x از چپ به راست نشان دهد، آنگاه

$$\int_a^b \rho_t(x,t)dx = \frac{d}{dt}\int_a^b \rho(x,t)dx = \varphi(a,t)-\varphi(b,t) \qquad (۱)$$

$$= -\int_a^b \varphi_x(x,t)dx$$

برای بیان φ برحسب ρ به قانون فیک[1] متوسل می‌شویم. بنابراین قانون، شار از نقاط با چگالی بالا به‌طرف نقاطی با چگالی پایین در جریان است. در اینجا رابطهٔ کیفی زیر برقرار است

$$\varphi(x,t) \propto -\rho_x(x,t)$$

اگر نسبت دو طرف را به $D(\rho)$ نمایش دهیم، داریم

$$\varphi(x,t) = -D(\rho(x,t))\rho_x(x,t) \qquad (۲)$$

از اینجا معادلهٔ (۱) نتیجه می‌شود

$$\rho_t = (D(\rho)\rho_x)_x \qquad (۳)$$

اگر توصیفی میکروسکوپی از مدلمان در دست باشد، می‌توان گفت که مهمترین قدم در استنتاج (۳)، اثبات قانون فیک است.

حال به‌توصیف میکروسکوپی خانواده‌ای از مدلهای ساده برای سیالات می‌پردازیم. در این سیالات فقط قانون بقای جرم صدق می‌کند. سیال ما d بعدی است و فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^d$ را با شبکهٔ $\epsilon\mathbb{Z}^d$ تقریب می‌زنیم. تقریب ما به این مفهوم است که مثلاً برای هر تابع پیوستهٔ انتگرال‌پذیر داریم

$$\lim_{\epsilon\to 0}\epsilon^d \sum_{a\epsilon\mathbb{Z}^d} J(a\epsilon) = \int_{\mathbb{R}^d} J(x)dx$$

1. Fick

مدل ما شامل تعداد زیادی ذره است. اگر برای مثال N ذره داشته باشیم، مکان ذرات با $x_1(t)$، ... ، $x_N(t)$ نمایش داده می‌شود. هر x_i متعلق به $\mathbb{Z}^d$ است. اول به تعریف شهودی دینامیک مدلمان می‌پردازیم. هر x_i مثل‌یک قدم تصادفی در روی $\mathbb{Z}^d$ حرکت می‌کند. «سرعت» رفتن از نقطهٔ x_i به $x_i + z$ برابر است با $p(z)$ ولی اگر $x_i + z$ در اشغال یک ذرهٔ دیگر باشد آنگاه x_i از رفتن صرف‌نظر می‌کند.

قبل از اینکه به‌توصیف دقیق مدلمان بپردازیم، با یک مثال ساده شروع می‌کنیم. فرض کنید فقط یک ذره روی شبکهٔ $\mathbb{Z}$ داریم که از یک نقطه به نقطهٔ مجاورش در جهت مثبت حرکت می‌کند. مکان ذره را با $x(t)$ نمایش می‌دهیم و فرض می‌کنیم $x(۰) = ۰$. این ذره یک ساعت پواسونی دارد که با سرعت λ زنگ می‌زند (مفهوم ساعت پواسونی را به‌زودی تشریح خواهیم کرد) و هربار که ساعت زنگ می‌زند یک قدم به‌راست حرکت می‌کند. زمان زنگها را با σ_1، σ_2، ... ، σ_n و زمان بین زنگها را با τ_1، τ_2، ... نمایش می‌دهیم. به‌عبارت دیگر

$$\sigma_n = \tau_1 + \tau_2 + \cdots + \tau_n$$

متغیرهای τ_i از هم مستقل هستند و احتمال اینکه $\tau_i > a$، برابر است با $e^{-a\lambda}$. می‌توان نشان داد که احتمال $\sigma_n \le t < \sigma_{n+1}$ برابر است با $\frac{(\gamma t)^n}{n!}e^{-\gamma t}$.

تعریف ساعت پواسونی با استفاده از نظریهٔ اندازه‌ها به‌صورت ذیل است. فرض می‌کنیم

$$\Omega_۰ = [۰, \infty) \times [۰, \infty) \times \ldots$$

و اندازهٔ Q را روی $\Omega_۰$ یک اندازهٔ حاصلضرب می‌گیریم. به‌بیان دقیقتر اگر f تابعی از $\Omega_۰$ به $\mathbb{R}$ باشد که به k مختصهٔ اول بستگی داشته باشد، آنگاه داریم

$$\int f dQ = \int_۰^\infty \cdots \int_۰^\infty f(\tau_1 \cdots \tau_k)\lambda^k \times \exp\left(-\lambda(\tau_1 + \cdots + \tau_k)\right) d\tau_1 \cdots d\tau_k$$

به‌عبارت دیگر، Q احتمال رخ دادن دنبالهٔ زنگهای σ_1 و σ_2 ... را می‌دهد. با دانستن این زمانها مکان $x(t)$ به‌سادگی حساب می‌شود.

به‌ازای $t \in [\sigma_n, \sigma_{n+1})$ داریم $x(t) = n$.

ما به $x(t)$ به‌عنوان مکان میکروسکوپی ذرهٔ x نگاه می‌کنیم. به یاد آورید که فضای ماکروسکوپی $\mathbb{R}$ را تقریب می‌زند. بنابراین $\epsilon x(t)$ مکان ماکروسکوپی ذره است. چون در هر قدم از لحاظ ماکروسکوپی مسافت کوچکی طی می‌شود، برای یک تغییر مکان محسوس باید زمانی طولانی را طی کرد. به این خاطر قرار می‌دهیم

$$x^\epsilon(t) = \epsilon x(\frac{t}{\epsilon})$$

یک محاسبهٔ سرراست نشان می‌دهد که

$$\int |x^\epsilon(t) - \lambda t|^۲ dQ = \epsilon\lambda t$$

از این رابطه دو چیز یاد می‌گیریم. اول اینکه مکان میکروسکوپی $x^\epsilon(t)$ با احتمال یک به مکان ماکروسکوپی $\overline{x}(t) = \lambda t$ میل می‌کند. به‌عبارت دیگر آنچه به‌طور ماکروسکوپی رخ می‌دهد یک حرکت آزاد است با سرعت λ. دوم اینکه حدس می‌زنیم $x^\epsilon(t) = \lambda t + O\sqrt{\epsilon}$. در اصل قضیهٔ دانسکر[1] می‌گوید

$$x^\epsilon(t) = \lambda t + \sqrt{\epsilon}\beta(t) + o(\sqrt{\epsilon}) \qquad (۴)$$

که در آن β یک حرکت براونی است با واریانس $\sqrt{\lambda}$. در این مقاله مقصود ما از حرکت براونی یک اندازهٔ احتمال است روی فضای پیوستهٔ $C^*[۰, T]$ که برای $F(\beta) = f(\beta(t_1) \ldots \beta(t_k))$ (قضیهٔ مشابه قضیهٔ ۱)، که در آن f یک تابع پیوستهٔ کراندار است و $t_k < \ldots < t_1$، آنگاه

$$\int F dw = (t_1(t_2 - 1)\cdots(t_k - t_{k-1})(2\pi\lambda)^k)^{-1/2} = \int \cdots \int f(z_1, \ldots, z_k) \exp\left(-\frac{z_1^2}{2\lambda t_1} - \frac{(z_2 - z_1)^2}{2\lambda(t_2 - t_1)} \cdots - \frac{(z_k - z_{k-1})^2}{2\lambda(t_k - t_{k-1})} \right) dz_1 \cdots dz_k$$

حال مفهوم دقیق قضیهٔ دانسکر را شرح می‌دهیم. فرض کنید دنبالهٔ $\tau_1, \tau_2, \ldots$ داده شده است. با استفاده از این دنباله تابع $x(t)$ را می‌سازیم. برای رسیدن به هدفهایمان احتیاج به یک تابع پیوسته داریم. واضح است که می‌توان یک تابع پیوستهٔ $y(t)$ تعریف کرد چنانکه به‌ازای تمام tها

$$|x(t) - y(t)| \le 1$$

سپس تعریف می‌کنیم $y^\epsilon(t) = \epsilon y(\frac{t}{\epsilon})$ و فرض می‌کنیم t متعلق به بازهٔ $[۰, T]$ باشد. بنابراین از یک دنباله در $\Omega_۰$ شروع کردیم و یک تابع پیوستهٔ y^ϵ ساختیم. برای (۴) کافی است که نشان دهیم

$$y^\epsilon(t) = \lambda t + \sqrt{\epsilon}\,\beta(t) + o(\sqrt{\epsilon}) \qquad (۵)$$

زیرا $|x^\epsilon(t) - y^\epsilon(t)| \le \epsilon$. بالاخره قرار می‌دهیم

$$z^\epsilon(t) = \frac{y^\epsilon(t) - \lambda t}{\sqrt{\epsilon}},\ t \in [۰, T]$$

به‌عبارت دیگر تابعی به‌صورت

$$\Phi_\epsilon : \Omega_۰ \to C[۰, T]$$

ساخته‌ایم که به هر دنبالهٔ $\overline{\tau} = (\tau_1 \cdots \tau_n \cdots)$ یک تابع پیوستهٔ z^ϵ نسبت می‌دهد. حال اندازهٔ Q در روی $\Omega_۰$ را به‌اندازهٔ W_ϵ به‌روی $C[۰, T]$ انتقال می‌دهیم. به‌عبارت دقیقتر برای هر تابع پیوستهٔ کراندار

$$F : C[۰, T] \to \mathbb{R} \qquad (۶)$$

داریم

$$\int F dW_\epsilon = \int F.\Phi_\epsilon dQ$$

حال می‌توانیم قضیهٔ دانسکر را به‌طور دقیق تعریف کنیم.

قضیهٔ ۱. دنبالهٔ W_ϵ از اندازه‌ها، به‌اندازهٔ W میل می‌کند. به‌عبارت دیگر

1. Donsker

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int FdW_\epsilon = \int FdW$$

قضیهٔ بالا اطلاعات مهمی در مورد ماهیت ماکروسکوپی یک قدم تصادفی می‌دهد. بهیاد بیاورید که هدف ما ساختن مدلی میکروسکوپی است که در آن تعداد زیادی قدم تصادفی وجود دارد.

اگر تعریف کنیم $z(t)=a+x(t)$، آنگاه $z(0)=a$. به‌عبارت دیگر z یک قدم تصادفی است که از نقطهٔ $a\in\mathbb{Z}$ شروع می‌شود. همچنین از علامت امید ریاضی E^a استفاده می‌کنیم:

$$T_tf(a)=E^af(z(t))=\int f(a+x(t))dQ$$

یک محاسبهٔ سر راست نشان می‌دهد که

$$T_{t+s}f=T_t(T_sf),\ E^aE^{x_t}f(x_s)=E^af(x_{t+s})$$

این خاصیت موسوم به خاصیت مارکوفی است و نشان می‌دهد که فرایند $x(t)$ یک فرایند مارکوفی است. در ضمن داریم

$$\frac{d}{dt}T_tf=L(T_tf) \qquad (۷)$$

که

$$Lf(x)=\lambda(f(x+1)-f(x))$$

عملگر L معروف به مولد فرایند $x(t)$ است. از دید آنالیزی، مولد L فرایند $x(t)$ را به‌طور یکتا مشخص می‌کند.

حال آماده‌ایم که مدل میکروسکوپی شهودی را که قبلاً تعریف کردیم، به‌طور دقیق تعریف کنیم. فضای E را در نظر بگیرید:

$$E=\left\{\vec{x}=(x_1\dots x_N)\in(\mathbb{Z}^d)^N : x_i\neq x_j \text{ اگر } i\neq j \text{ آنگاه}\right\}$$

فرایند مارکوفی $\vec{x}(t)$ به‌وسیلهٔ مولدش مشخص می‌شود. به‌عبارت دیگر $\vec{x}(t)\in E$ و مولدش L است.

$$Lf(\vec{x})=\sum_{i=1}^{N}\sum_{z}p(z)(1-\eta(\vec{x};x_i+z))\qquad (۸)$$
$$(f(\vec{x}^{i,z})-f(\vec{x}))$$

که در آن

$$\eta(\vec{x};a)=\begin{cases}1 & \text{اگر } i \text{ به‌ازای یک } a=x_i\\ 0 & \text{اگر } a\neq x_i \text{ به‌ازای تمام‌ها } i\end{cases}$$

$$\vec{x}^{i,z}=(x_1,\cdots,x_{i-1},x_i+z,x_{i+1},\cdots,x_n)$$

به‌عبارت دیگر $\eta(\vec{x};a)$ یک یا صفر است برحسب اینکه a در اشغال یک ذره باشد یا a خالی باشد. از طرف دیگر $\vec{x}^{i,z}$ از $\vec{x}$ با انتقال ذرهٔ x_i به x_i+z به‌دست می‌آید.

با بررسی دینامیک η می‌توان مدل موردنظر را به‌صورت دیگری توصیف کرد. قرار می‌دهیم

$$\hat{E}=\{0,1\}^{\mathbb{Z}^d}=\{\eta:\mathbb{Z}^d\to\{0,1\}\}$$

در این‌صورت فرایند مارکوفی $\eta_t(a)$ دارای مولد ذیل است

$$\hat{L}g(\eta)=\sum_{a\in\mathbb{Z}^d}\sum_{z\in\mathbb{Z}^d}p(z)\eta(a)(1-\eta(a+z))(f(\eta^{a,a+z})-f(\eta)) \qquad (۹)$$

وقتی $\eta^{a,a+z}$ را از روی η با حرکت دادن یک ذره از a به $a+z$ می‌سازیم، داریم

$$\eta^{a,a+z}(b)=\begin{cases}\eta(a+z) & b=a\\ \eta(a) & b=a+z\\ \eta(b) & b\neq a,a+z\end{cases}$$

حال به مفهوم اندازهٔ تعادلی برای فرایندهای مارکوفی می‌پردازیم. برای مثال فرایند η_t را در نظر می‌گیریم. **فرض کنید که** η_0 به‌طور تصادفی انتخاب شده است. یعنی اینکه با احتمال $\mu_0(\eta_0)$ فرایند η_t در زمان شروع η_0 است. در اینجا μ یک تابع مفروض است. البته داریم

$$\mu_0:\hat{E}\to[0,1],\ \sum_{\eta\in\hat{E}}\mu_0(\eta)=1$$

یک سؤال طبیعی این است که احتمال $\eta_t=\eta$ را چگونه می‌توان حساب کرد. اگر این احتمال را با $\mu_t(\eta)$ نمایش دهیم، داریم

$$\sum_\eta T_tf(\eta)\mu_0(\eta)=\sum_\eta\mu_0(\eta)E^\eta f(\eta_t)=\sum_\eta f(\eta)\mu_t(\eta) \qquad (۱۰)$$

این فرمول برای محاسبهٔ $\mu_t(\eta)$ مفید است.

می‌گوییم اندازهٔ $\mu_0(\eta)$ یک اندازهٔ تعادلی است اگر به‌ازای تمام tها، $\mu_t(\eta)=\mu_0(\eta)$. طبق فرمول (۱۰) اگر μ_0 یک اندازهٔ تعادلی باشد، آنگاه

$$0=\frac{d}{dt}\sum_\eta T_tf(\eta)\mu_0(\eta)=\sum_\eta LT_tf(\eta)\mu_0(\eta)$$

چون $T_0f=f$، نتیجه می‌گیریم که به‌ازای هر تابع مناسب f،

$$\sum_\eta Lf(\eta)\mu_0(\eta)=0 \qquad (۱۱)$$

فرمول (۱۱) راه مناسبی است برای آزمون تعادلی‌بودن اندازهٔ μ_0. حال خانواده‌ای از اندازه‌های تعادلی برای فرایند η_t می‌سازیم. به‌ازای هر عدد $m\in[0,1]$، اندازهٔ ν^m را یک اندازهٔ حاصلضرب می‌گیریم چنانکه

$$\nu^m(\eta(a)=1)=m$$

به‌عبارت دیگر در هر نقطهٔ $a\in\mathbb{Z}^d$ با احتمال m یک ذره قرار می‌دهیم و با احتمال $1-m$ آن‌را خالی نگه می‌داریم. در ضمن این‌کار را برای aهای مختلف به‌طور مستقل انجام می‌دهیم. تمام ν^mها تعادلی هستند (رجوع کنید به [۱]).

به‌توضیح شهودیِ تعادلی بودن ν^mها می‌پردازیم. اگر a_1، ... ، a_k متفاوت باشند،

$$\nu^m(\eta(a_1)=p_1,\cdots,\eta(a_k)=p_k)= \qquad (12)$$
$$m^{p_1+\cdots+p_k}(1-m)^{(1-p_1)+\cdots+(1-p_k)}$$

با استفاده از این فرمول، فرمول شهودی زیر را داریم

$$\nu^m(\eta)=m^{\sum_a \eta(a)}(1-m)^{\sum_a (1-\eta(a))}$$

این فرمول معنی‌دار نیست زیرا $\sum_a \eta(a)$ اغلب بینهایت است ولی توضیح تعادلی بودن ν^m را ساده می‌کند. قانون بقای ماده در مدل ما صادق است. به‌عبارت دقیقتر، تعداد ذرات با زمان ثابت می‌ماند. چون $\sum_a \eta_t(a)$ و $\sum_a(1-\eta_t(a))$ با زمان تغییر نمی‌کنند، اندازهٔ ν^m یک اندازهٔ تعادلی است. به‌مفهومی، عدد m چگالی ذرات را نسبت به‌اندازهٔ ν^m حساب می‌کند. قبل از اینکه این مفهوم را دقیقتر بکنیم، اوّل خانوادهٔ بزرگتری از اندازه‌ها را تعریف می‌کنیم که نقش مهمی در ارتباط با مدلمان ایفا خواهند کرد. فرض کنید تابع پیوستهٔ کراندار

$$\rho^*:\mathbb{R}^d\to[0,1]$$

داده شده است. برای هر ρ^* یک اندازهٔ μ^{ρ^*} را با استفاده از فرمول ذیل تعریف می‌کنیم

$$\mu^{\rho^*}(\eta(a_1)=p_1,\cdots,\eta(a_k)=p_k)$$
$$=\prod_{i=1}^{k}\rho^*(a_i\epsilon)^{p_i}\cdot\prod_{i=1}^{k}(1-\rho^*(a_i\epsilon))^{1-p_i}$$

به‌عبارت دیگر با احتمال $\rho^*(a\epsilon)$، نقطهٔ a را یک ذره اشغال می‌کند. انگیزهٔ ما از تعریف μ^{ρ^*} ساختن اندازه‌ای است که دارای چگالی ماکروسکوپی ρ^* باشد. به‌عبارت دیگر اگر ν^m دارای چگالی ثابت m باشد آنگاه حدس می‌زنیم که μ^{ρ^*} دارای چگالی متغیر $\rho^*(x)$ است زیرا μ^{ρ^*} به‌طور موضعی شبیه ν^mهاست. به‌طور دقیقتر، اگر J یک تابع پیوسته باشد چنانکه $\int_{\mathbf{R}^d}|J(x)|dx$ متناهی باشد، آنگاه یک محاسبهٔ سرراست نشان می‌دهد که

$$\lim_{\epsilon\to 0}\epsilon^{-d}\int[\epsilon^d\sum_a J(a\epsilon)(\eta(i)=\rho^*(a\epsilon)]^2 d\nu$$
$$=\int_{\mathbf{R}^d}J^2(x)\rho^*(x)(1-\rho^*(x))dx \qquad (13)$$

به‌خصوص این نشان می‌دهد که با احتمال یک نسبت به μ^{ρ^*}، داریم

$$\epsilon^d\sum_a J(a\epsilon)\eta(i)\to\int J(x)\rho^*(x)dx \qquad (14)$$

به‌عبارت دیگر چگالی ماکروسکوپی نسبت به μ^{ρ^*}، تابع ρ^* است. به‌طور شهودی می‌توان گفت $\eta([\frac{x}{\epsilon}])=\rho^*(x)+o(1)$ که در آن $[\ ]$ قسمت صحیح یک عدد است. در واقع مثل (۴) می‌توان نتیجهٔ بهتری به‌دست آورد:

$$\eta([\frac{x}{\epsilon}])=\rho^*(x)+\epsilon^{d/2}V(x)+o(\epsilon^{d/2}) \qquad (15)$$

البته $V(x)$ به‌عنوان تابعی از x معنی ندارد ولی برای یک تابع هموار J انتگرال $\int J(x)V(x)dx$ معنی‌دار است و یک متغیر تصادفی نرمال است با واریانس

$$\left(\int J^2(x)\rho^*(x)(1-\rho^*(x))dx\right)^{1/2}$$

این نتیجهٔ فرمول (۱۳) است.

ما انتظار داریم که اگر در زمان اولیه، چگالی ذرات ρ^* باشد آنگاه در زمانهای بعد چگالی $\rho(x,t)$ باشد و این ρ در معادلهٔ مناسبی صدق کند. این معادله همان معادلهٔ اویلر برای سیال سادهٔ ماست. البته به‌همان دلیل که در (۴) زمانْ $\frac{t}{\epsilon}$ در نظر گرفته شده بود، ما چگالی را برای $\eta_{t/\epsilon}$ در نظر می‌گیریم. قضیهٔ ذیل در [R1] اثبات شده است.

قضیهٔ ۲. فرض کنید که η_0 با احتمال μ^{ρ^*} انتخاب شود. در این صورت برای هر تابع پیوستهٔ J با تکیه‌گاه فشرده داریم

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int|\epsilon^d\sum_a J(a\epsilon)\eta_{t/\epsilon}(a)- \qquad (16)$$
$$\int_{\mathbf{R}^d}J(x)\rho(x,t)dx|\mu^{\rho^*}(d\eta_0)=0$$

که در آن ρ جواب یگانهٔ معادلهٔ

$$\begin{cases}\rho_t+\gamma_0(h(\rho))_x=0\\ \rho(x,0)=\rho^*(x)\end{cases} \qquad (17)$$

است. در اینجا $h(\rho)=\rho(1-\rho)$ و $\gamma=\sum_z zp(z)$.

معادلهٔ (۱۷) باید به‌مفهوم مناسبی تعبیر شود زیرا در حالت کلی (۱۷) جواب مشتقپذیر ندارد. در اصل حتی اگر ρ^* هموار انتخاب شود امکان دارد که نتوانیم جواب پیوسته‌ای برای (۱۷) انتخاب کنیم. در دههٔ ۷۰، ریاضیدان روسی کروژکوف[1] ثابت کرد که (۱۷) دارای جواب یکتای آنتروپیک است. تعبیر فیزیکی جواب آنتروپیک این است که وقتی یک ناپیوستگی رُخ می‌دهد، آنتروپی سیستم کاهش پیدا نمی‌کند. تعریف ریاضی جواب آنتروپیک این است که برای هر تابع محدب φ رابطهٔ زیر به‌طور ضعیف برقرار است

$$(\varphi(\rho))_t+(q(\rho))_x\le 0 \qquad (18)$$

که در آن، رابطهٔ q و φ عبارت است از تساوی $\varphi' f'=q'$. البته اگر تابع ρ یک جواب هموارِ (۱۷) باشد، آنگاه $\varphi(\rho)_t+q(\rho)_x=0$ زیرا می‌توان دو طرف (۱۷) را در $\varphi'(\rho)$ ضرب کرد. امّا وقتی که جواب غیرپیوستهٔ (۱۷) را داریم تعبیر (۱۷) به‌مفهوم ضعیف است و دیگر نمی‌توان به‌راحتی دو طرف معادله را در $\varphi'(\rho)$ ضرب کرد و نتیجهٔ مشابهی به‌دست آورد.

به تقلید از (۴) سؤال دیگری را مطرح می‌کنیم. اگر یکی از ذرات را در مدلمان دنبال کنیم، چه نوع حرکت ماکروسکوپی داریم؟ فرض کنید که در یک سیال هر ذره با سرعت b حرکت کند. به‌عبارت دیگر اگر مثلاً $x(t)$ مسیر یک ذرهٔ نمونه در سیال باشد، آنگاه

$$\frac{dx}{dt}=b(x,t) \qquad (19)$$

1. Kružkov

چنین توصیفی در مکانیک سیالات موسوم به‌توصیف لاگرانژی است. از قانون بقای ماده به‌سادگی نتیجه می‌شود که اگر چگالی چنین سیالی ρ باشد آنگاه ρ در معادلهٔ ذیل صدق می‌کند

$$\rho_t + \mathrm{div}(b\rho) = 0 \qquad (20)$$

البته اگر قانون بقای ماده تنها قانون بقا در سیال ما باشد، باید بتوانیم سرعت b را بر حسب چگالی ρ بیان کنیم. در مدل سادهٔ ما این‌طور است و از مقایسهٔ (۱۷) با (۲۰)، حدس می‌زنیم که

$$b(x,t) = \gamma(1 - \rho(x,t)) \qquad (21)$$

در اصل قضیهٔ زیر را داریم [R۲]:

قضیهٔ ۳. فرض کنید که شرایط قضیهٔ قبل صادق‌اند. در این‌صورت مکان ذرهٔ اول $x_1(t)$ با احتمال یک به‌سوی $\overline{x}(t)$ میل می‌کند و $\overline{x}$ در معادلهٔ دیفرانسیل (۱۹) صدق می‌کند. در ضمن شرط اولیهٔ $\overline{x}(0)$ تصادفی است و

$$(\text{احتمال اینکه } \overline{x}(0) \text{ متعلق به } A \text{ باشد}) = \int_A \rho^*(x)dx$$

چون $\rho(x,t)$ در حالت کلی حتی پیوسته هم نیست، تعبیر مناسبی برای (۱۹) لازم است. مقصود ما از (۱۹) جوابهای فیلیپوف[1] است. برای سادگی، اول فرض کنید که ρ قطعه‌به‌قطعه پیوسته باشد. در نتیجه در هر نقطه می‌توان حد چپ و راست را نسبت به متغیر x تعریف کرد. این حدود را با ρ^- و ρ^+ نشان می‌دهیم. آنگاه می‌گوییم $x(t)$ یک جواب فیلیپوف (۱۹) است اگر $x(t)$ به‌طور مطلق پیوسته باشد و در نقاط مشتقپذیر $\frac{dx}{dt}$ بین $\gamma(1-\rho^-(x,t))$ و $\gamma(1-\rho^+(x,t))$ باشد.

حال چند کلمه‌ای در مورد معادلاتی از نوع (۳) در توصیف ماکروسکوپی مدلمان ذکر می‌کنم. به‌عنوان مثال فرض کنید p یک تابع زوج است، یعنی $p(z) = p(-z)$. آنگاه داریم $\gamma = 0$. در چنین حالتی معادلهٔ (۱۷) جوابی بدیهی دارد. به‌بیان دقیقتر $\rho(x,t) = \rho^*(x)$. به‌عبارت دیگر در زمان $\frac{t}{\epsilon}$ هیچ تغییر ماکروسکوپی مشاهده نمی‌شود. در حقیقت برای مشاهدهٔ تغییرات ماکروسکوپی باید زمانهای طولانیتری را در نظر گرفت. قضیهٔ نه‌چندان دشوار زیر را می‌توانید در [S] پیدا کنید:

قضیهٔ ۴. فرض کنید که شرایط قضیهٔ قبل صادق‌اند و p زوج است. در این صورت

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int \Big| \epsilon^d \sum_a J(a\epsilon)\eta_{t/\epsilon^2}(a) - \int_{\mathbb{R}^d} J(x)\hat{\rho}(x,t)dx \Big| \mu^{\rho^*}(d\eta_\cdot) = 0 \qquad (22)$$

که در آن $\hat{\rho}$ جواب یگانهٔ معادلهٔ

$$\begin{cases} \hat{\rho}_t = \sum_{i,j=1}^d D_{ij} \frac{\partial^2 \hat{\rho}}{\partial x_i \partial x_j} \\ \hat{\rho}(x,0) = \rho^*(x,0) \end{cases} \qquad (23)$$

است. در اینجا ثوابت D_{ij} عبارت‌اند از

$$D_{ij} = \sum_z z_i z_j p(z)$$

حال فرض کنید که $\gamma = 0$ امّا p زوج نباشد. باز هم (۲۲) درست است امّا $\hat{\rho}$ی مربوطه در معادلهٔ پیچیده‌تری صدق می‌کند. در حقیقت، خو اثبات می‌کند که $\hat{\rho}$ معادلهٔ غیرخطی به شکل

$$\hat{\rho}_t = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(D_{ij}(\hat{\rho}) \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial x_i} \right)$$

است که در آن $D_{ij}(\hat{\rho})$ همیشه غیرنابت‌اند.

اگر $\gamma \neq 0$ آنگاه مسأله پیچیده‌تر است. انتظار می‌رود که معادله‌ای از نوع

$$\rho_t + \gamma.(\rho(1-\rho))_x = \epsilon \frac{\partial}{\partial x_j}\left(D_{ij}(\rho) \frac{\partial \rho}{\partial x_i} \right) \qquad (24)$$

توصیف بهتری از سیال ما به‌دست بدهد اگر بعد d حداقل ۳ باشد. مسأله در بعد یک و دو به مراتب پیچیده‌تر است زیرا برای توصیف بهتر سیال باید یک جملهٔ تصادفی با ضریب $\epsilon^{d/2}$ هم اضافه کرد که البته در بعد ۳ یا بیشتر، از ϵ کوچکتر است و می‌توان از آن صرف‌نظر کرد. برای استنتاج (۲۴) از مدل مورد بحث به [LOY] رجوع کنید.

مراجع

[K] Kružkov, S. N., "First order quasilinear equations in several independent variables", *Math. USSRSb.*, **10** (1970) 217-243.

[LOY] C. Landim, S.Olla and H.T. Yau, "First order correction for the hydrodynamic limit of asymmetric simple exclusion processes in dimension d $\geq$ 3", *Comm. Pure Appl. Math.*, **50** (1997) 149-203.

[L] T. Liggett, *Interacting Particle Systems*, Springer-Verlag, New York (1985).

[R1] F. Rezakhanlou, "Hydrodynamic limit for attractive particle systems on $\mathbb{Z}^d$", *Comm. Math. Phys.* **140** (1990) 417-448.

[R2] F. Rezakhanlou, "Evolution of tagged particles in non-reversible particle systems", *Comm. Math. Phys.* **165** (1994) 1-32.

[S] H. Spohn, *Large Scale Dynamics of Interacting particles*, Springer-Verlag, New York (1991).

[X] L. Xu, *Diffusion limit for the lattice gas with short range interactions*, Ph. D. Thesis, NewYork University (1993).

* * * * * *

* فریدون رضا خانلو، دانشگاه کالیفرنیا در برکلی، آمریکا

rezakhan@math.berkeley.edu

1. Filippov