مفهوم گونا در توپولوژی و آنالیز مختلط•

فریدریش هیرتسه‌بروخ*، ماتیاس کرک**

ترجمهٔ رحیم زارع نهندی

نام مفهوم مورد بحث این مقاله در زبان انگلیسی [genus] از زیست‌شناسی می‌آید که در آنجا برای رده‌بندی موجودات زنده‌ای که مشخصات مشترکی دارند به‌کار می‌رود. در ریاضیات نیز این کلمه برای دسته‌بندی اشیایی که ویژگیهای مشترک دارند مورد استفاده قرار می‌گیرد. مفهوم گونا در شاخه‌های مختلف ریاضیات مانند نظریهٔ اعداد، توپولوژی، و آنالیز مختلط مطرح می‌شود که در این مقاله به جایگاه آن در دو زمینهٔ اخیر می‌پردازیم. حتی در این دو شاخه هم تعبیرهای مختلفی از گونا وجود دارند که سرآغاز آنها از دید تاریخی، گونای یک رویهٔ جهتدار است. ما با شروع از این ریشه‌ها به بررسی تعمیمها و اصلاحاتی که در این مفهوم صورت گرفته می‌پردازیم. در این مقاله به ریزه‌کاری تعاریف و برهانها کاری نداریم بلکه هدف ما این است که خواننده شناختی شهودی از مفهوم گونا به‌دست آورد.

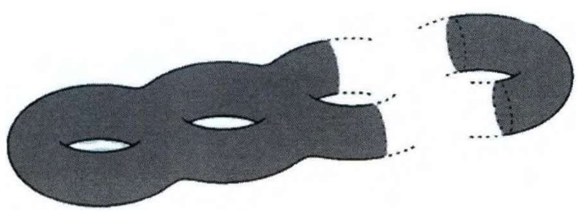
گونای یک رویه

ریمان در مقاله‌ای با عنوان «نظریهٔ توابع آبلی» توپولوژی رویه‌ها را بررسی کرد [۲۰]. وی رویه‌ها را با استفاده از خمهای بستهٔ ساده که با برش رویه در امتداد آنها نمایش ساده‌ای از رویه به‌دست می‌آید، رده‌بندی کرد. او تعداد مینیمال این خمها را $2p$ نامید و نشان داد که این ناوردا رویه را معین می‌کند. چند سال بعد از آن، زمانی که کلِبش[1] رویه‌ها را با دید عمیق‌ترِ هندسهٔ جبری مطالعه کرد، عدد p را das Geschecht «گونا»ی رویه نامید.

دیدگاه ریمان را به‌زبان امروزی می‌توان به‌صورت زیر فرمولبندی کرد: هر رویهٔ همبند، بسته (یعنی فشردهٔ بدون مرز) و جهتدار F، از جمع همبند[2] کرهٔ دوبعدی S^2 و چند چنبرهٔ $T = S^1 \times S^1$ به‌دست می‌آید. تعداد چنبره‌های اضافه‌شده یک ناوردای توپولوژیک است که گونای F نامیده و با $g(F)$ نمایش داده می‌شود. این عدد با عدد pِ کلبش برابر است.

1. Clebsch

۲. مجموع همبند دو خمینهٔ m بعدی خمینه‌ای است که با حذف یک گوی در هر یک از خمینه‌ها و به‌هم چسبانیدن خمینه‌های باقی‌مانده در امتداد مرز دو گوی به‌دست می‌آید. ـ م.



شکل ۱

بیان موجز مفهوم رویه از دیدگاه ریمان به‌آسانی ممکن نیست. چیزی است مشابه پوشش منشعب[1] صفحه، و ریمان به‌طور ضمنی فرض می‌کند که رویه دارای نوعی ساختار دیفرانسیل‌پذیر است که از نظر محاسبات فنی بسیار مفید است. لیکن در واقع گونا یک ناوردای توپولوژیک است. این موضوع را می‌توان با به‌کارگیری گروه بنیادی یا اولین گروه مانستگی[2] $H_1(F)$ ثابت کرد. به‌ویژه داریم $H_1(S^2) = 0$، و فرمول

$$H_1(F\#T) \cong H_1(F) \oplus \mathbb{Z}^2$$

که در آن نماد # برای جمع همبند به‌کار رفته، نتیجه می‌دهد که برای رویهٔ $F = F_n$ که از جمع همبند S^2 و n چنبره به‌دست آمده است داریم

$$H_1(F_n) \cong \mathbb{Z}^{2n}.$$

برای هر خمینهٔ X، رتبهٔ kامین گروه مانستگی، kامین عدد بتی نامیده می‌شود، یعنی

$$b_k(X) := \operatorname{rank}(H_k(X))$$

و بنابراین، فرمول زیر حاصل می‌شود

$$g(F) = \frac{b_1(F)}{2}.$$

1. ramified covering 2. homology group

شکل ۲

برای تعیین گونای F به‌جای عدد بتی می‌توان از مشخصّهٔ اویلر استفاده کرد:

$$e(X) := \sum_i (-۱)^i b_i(X)$$

به این معنی که، $b_۰(F) = b_۲(F) = ۱$، و لذا

$$e(F) = ۲ - b_۱(F) = ۲ - ۲g(F)$$

در نتیجه

$$g(F) = ۱ - \frac{e(F)}{۲}.$$

عدد (مشخّصهٔ) اویلر را می‌توان بدون ارجاع به مانستگی، به‌روش ترکیبیاتی محاسبه کرد. هر رویه دارای یک مثلث‌بندی است (بخش بعد را ببینید)، که می‌توان آن را با قراردادن شبکه‌ای از مثلثها روی F تجسم کرد و داریم:

$$e(F) = \text{تعداد رأسها} - \text{تعداد یالها} + \text{تعداد مثلثها}$$

با این حال، اینکه مشخصهٔ اویلر با تعریف ترکیبیاتی یک ناوردای توپولوژیک است، نیاز به برهان دارد.

اهمیت توپولوژیک گونا در چیست؟

تا اینجا به رویه یک ناوردای توپولوژیک نسبت داده‌ایم: گونای رویه. این ناوردا چقدر قوی است؟ اهمیت توپولوژیک آن در چیست؟ دیدگاه ریمان را می‌توان چنین تعبیر کرد که هر رویهٔ دیفرانسیل‌پذیر با گونای خود معیّن می‌شود. یک برهان جدید برای این مطلب با استفاده از نظریهٔ مقدماتی مورس به‌دست می‌آید ([۶]، [۷]). لیکن حتی حکمی قوی‌تر برقرار است: گونا نوع همسانریختی را نیز معین می‌کند. این حکم سالها بعد از کار ریمان توسط رادو ثابت شد.

قضیه [۱۹]. هر دو رویهٔ جهتدارِ بستهٔ همبند F و F' همسانریخت‌اند اگر و تنها اگر

$$g(F) = g(F').$$

این یک نتیجهٔ ساده نیست. گام اساسی در برهان رادو این است که نشان دهد هر رویهٔ توپولوژیک با پایهٔ شمارا دارای مثلث‌بندی است؛ آنگاه ادامهٔ برهان در مقولهٔ ترکیبیات چندان دشوار نیست. •

اهمیت آنالیزِ گونا در چیست؟

هدف اصلی بررسیهای توپولوژیک ریمان، مطالعهٔ رویه‌ها به‌عنوان اشیایی در آنالیز مختلط یا به زبان امروزی، به‌عنوان خمینه‌های مختلط از بعد مختلط ۱، یعنی خمهای مختلط بود. هر خمینهٔ مختلط عبارت است از یک خمینهٔ توپولوژیک (یعنی یک فضای توپولوژیک هاوسدورف با پایهٔ شمارا که به‌طور موضعی با $\mathbb{R}^n$ همسانریخت باشد) همراه با یک اطلس که تعویضهای مختصات آن نگاشتهای تمامریخت‌اند. اشاره می‌کنیم که در بعد مختلط ۱، پایهٔ شمارا از وجود ساختار مختلط نتیجه می‌شود [۱۹]. روی یک چنین خم مختلط، ریمان بخشیابهایی[1] مانند D را در نظر می‌گیرد، که ترکیبهای خطی صوریِ متناهیِ نقاطی روی رویه هستند با ضرایب متعلق به $\mathbb{Z}$. هر تابع برخه‌ریخت روی یک رویهٔ بسته (در ادامه فرض خواهیم کرد رویه‌ها بسته‌اند) یک بخشیاب D را معین می‌کند که ترکیب خطی صفرها و قطبهای آن تابع (با احتساب چندگانگی) است. به هر بخشیاب، مجموع ضرایب آن را که درجهٔ D نامیده می‌شود، مربوط می‌کنیم. برای بخشیاب داده شدهٔ D، فضای برداریِ توابع برخه‌ریخت را با این ویژگی که مجموع بخشیاب هر تابع با بخشیاب داده‌شده چندگانگی منفی نداشته باشد، در نظر می‌گیریم. این فضای برداری متناهی‌بعد است و بعد آن با $l(D)$ نمایش داده می‌شود.

ریمان برای هر بخشیاب D، نابرابری خود را ثابت کرد [۲۰]:

$$l(D) \geq deg(D) + ۱ - g.$$

این سرآغاز قضیهٔ معروف ریمان-روخ است [۲۱]، که با به‌کارگیری بخشیاب متعارف K برابری زیر را به‌دست می‌دهد

$$l(D) - l(K - D) = \deg(D) + ۱ - g.$$

چرا این نتیجه مهم است؟ اگر به‌طرف راست برابری توجه کنیم مجموع یک ناوردای سادهٔ یک بخشیاب، درجهٔ آن، و ناوردای توپولوژیک $g - ۱$ را می‌بینیم. در صورتی که طرف چپ، ناوردای آنالیزی پیچیده‌ای است: تفاضل بعدهای دوفضای توابع، یا به بیان دقیق‌تر، فضاهای توابع برخه‌ریخت با شرایطی روی صفرها و قطبهای آنها.

گونای حسابی واریته‌های جبری

باید توجه داشت که گذار از ساختارهای دیفرانسیل‌پذیر به ساختارهای مختلط تغییری عمده است، زیرا در حالت کلّی، ساختارهای مختلط متفاوت متعددی روی یک رویهٔ داده‌شده وجود دارد. درواقع یک فضای پیمانه‌ای از ساختارهای مختلط مطرح است که به‌ازای $g \geq ۲$ خودش خمینهٔ مختلطی است از بعد $۳g - ۳$. به‌ازای $g = ۰$، فضای پیمانه‌ای یک نقطه است، و به‌ازای $g = ۱$، از بعد مختلط ۱ است.

می‌توان گامی فراتر برداشت و ساختارهای حتی ظریف‌تری روی یک رویه وضع کرد، مثل ساختار جبری مختلط. در حالی که مطالعات گسترده‌ای در زمینهٔ خمینه‌های توپولوژیک و هموار در نیمهٔ اول سدهٔ گذشته انجام شد، خمینه‌های مختلط از بعد بیش از ۱ با روشهای آنالیز مختلط چندان مورد بررسی قرار نگرفتند (البته نظریهٔ توابع چند متغیرهٔ مختلط در دامنه‌های

1. divisors

باز در $\mathbb{C}^n$ بسیار مورد توجه بود). در مقابل، واریته‌های جبری، مجموعهٔ صفرهای خانواده‌ای از چندجمله‌ای‌ها، موضوع بررسیهای ریاضی مستمر بودند، دست‌کم در حدِ ساختن مثالهای جالب و مطالعهٔ هندسهٔ آنها. فرمولهای زیادی به‌دست آمد که به سؤالها و حدسیه‌های جالبی منتهی شد.

در این زمینه گونای دیگری، گونای حسابی، نقش مهمی ایفا کرد. در اوایل دههٔ ۱۹۵۰ چهار تعریف از گونای حسابی روی یک واریتهٔ جبری هموار تصویری V، با بعد مختلط n، شناخته شده بودند. دوتای اول با $P_a(V)$ و $p_a(V)$ نمایش داده می‌شوند. سِوِری[1] حدس زد که این دو عدد یکسان هستند و برحسب $g_i(V)$، بعد فضای برداریِ صورتهای دیفرانسیل تمام‌ریخت از درجهٔ i، قابل محاسبه‌اند:

$$p_a(V) = P_a(V) = g_n(V) - g_{n-1}(V) + \ldots + (-1)^{n-1} g_1(V).$$

عبارت طرف راست، تعریف سوم است که ما آن را به خواننده توصیه می‌کنیم (در واقع به شکلِ اندکی اصلاح‌شده که در ادامه توصیف می‌شود). کودایرا و اسپنسِر [۱۴] با استفاده از نظریهٔ بافه‌ها ثابت کردند که هر سه عبارت یکسان‌اند.

عبارت طرف راست، مشابه مشخصهٔ اویلر است، لیکن با شکلی متفاوت. عدد اویلر «واقعی» عدد اویلر تمام‌ریخت است،

$$\chi(V) := \sum_{i=0}^{n} (-1)^i g_i(V)$$

که گونای حسابی خوانده می‌شود. تعداد مؤلفه‌های V همان $g_0(V)$ است. بنابراین برای یک واریتهٔ همبند، $\chi(V) = (-1)^n p_a(V) + 1$. اغلب $g_n(V)$ گونای هندسی V خوانده می‌شود. برای حالت یک خم (رویهٔ ریمانی) داریم

$$g_1(V) = g(V)$$

و لذا گونای هندسی و گونایِ ریمانی یکسان‌اند.

هر دو گونای حسابی و هندسی ضربی هستند:

$$\chi(V \times V') = \chi(V)\chi(V')$$

و

$$g_{n+m}(V \times V') = g_n(V) g_m(V')$$

که $n = \dim V$ و $m = \dim V'$.

اعداد $g_i(V)$ ناورداهای دوسوگویا هستند [۲۵]، بنابراین، گونای حسابی، یک ناوردایِ دوسوگویاست.

گونای تاد

تعریف چهارم گونای حسابی را تاد [۲۴] به‌دست داد. هر بخشیاب متعارف یک واریتهٔ جبریِ تصویریِ هموار با بعد n، بخشیاب یک nـصورت برخه‌ریخت است. چنین بخشیابی یک دور جبری با متمم‌بعد توپولوژیک ۲ است. تاد دورهای متعارف هندسی برای همهٔ متمم‌بعدها تعریف کرد. وی چندجمله‌ای‌هایی از این دورها را تعریف کرد، که در آنها حاصلضرب توسط اشتراکها مشخص می‌شود. چندجمله‌ای تاد nام دارای متمم‌بعد $2n$ است و برای یک واریتهٔ nبعدی، عددی را که گونای تاد خوانده می‌شود عرضه می‌کند. تاد معتقد بود که این گونا همان گونای حسابی است، لیکن توجیه دقیق این واقعیت خیلی بعد به‌دست آمد.

رده‌های هم‌ارزی متعارف تاد رده‌های مانستگی را نمایش می‌دهند، که با تقریب علامت، دوگان پوانکارهٔ رده‌های چِرن[1] کلاف مماس یک واریته هستند [۱۸]. به‌طورکلی، رده‌های چرن برای کلافهای برداری مختلط تعریف می‌شوند. برخلاف خمینه‌های مختلط که در آنها نگاشتهای تمام‌ریخت نقش تعیین‌کننده دارند، کلافهای برداری مختلط اشیایی کاملاً توپولوژیک هستند؛ به اجمال می‌توان گفت که آنها خانواده‌ای از فضاهای برداریِ مختلطِ kبعدی هستند که توسط نقاط یک فضای توپولوژیک X پارامتری شده‌اند. همچنین یک توپولوژی روی اجتماع مجزای این فضاهای برداری وجود دارد، و نکتهٔ اساسی این است که این خانوادهٔ فضاهای برداری به‌طور موضعی با یک حاصلضرب $U \times \mathbb{C}^k$ همسانریخت است که U یک زیرمجموعهٔ باز X است. تعریف رسمی رده‌های چرن پیچیده‌تر از آن است که در چنین مقاله‌ای مطرح شود، لیکن ایدهٔ اصلی نهفته در پسِ آنها را می‌توان با درنظرگرفتن مورد یک کلاف برداری مختلط دیفرانسیل‌پذیر E روی یک خمینهٔ دیفرانسیل‌پذیر و بستهٔ X توضیح داد. در این حالت، ردهٔ چرن $c_i(E) \in H^{2i}(X;\mathbb{Z})$ اولین مانع برای وجود $k - i + 1$ مقطع مستقل خطی روی E است. اگر، برای مثال، یک مقطع تنها در E انتخاب شود و این انتخاب نوعی[2] باشد، آنگاه مجموعهٔ صفرها یک زیرخمینهٔ X از بعد $\dim X - 2\dim E$ خواهد بود. لذا یک ردهٔ مانستگی به‌دست می‌آید که دوگان پوانکارهٔ آن در $H^{2k}(X)$ می‌نشیند و همان ردهٔ چرن kامِ E، $c_k(E)$ است. اگر X یک خمینهٔ kبعدی مختلط و بسته باشد و E کلاف مماس مختلط آن فرض شود، آنگاه $c_k(E)$ به‌ازای دور اساسی، طبق قضیهٔ پوانکاره‌ـهوپف، مشخصهٔ اویلر X است.

گونای تاد برحسب رده‌های چرنِ کلاف مماس، مقدار یک چندجمله‌ای گویای مشخص از رده‌های چرن $T(c_1, c_2, \ldots)$ روی ردهٔ اساسی است. در توضیح نحوهٔ ساختن این چندجمله‌ای‌ها (که عبارات نسبتاً پیچیده‌ای هستند)، خاطر نشان می‌کنیم که اگر قرار است گونای تاد با گونای حسابی برابر باشد، این دو گونا برای فضای تصویری مختلط (که گونای حسابی آن ۱ است) نیز یکسان خواهند بود. به‌علاوه، گونای تاد باید ضربی باشد، تا به‌نوعی ضربی بودن گونای حسابی را منعکس کند، لذا باید یک دنبالهٔ ضربی به تعبیر [۸] باشد. این استدلال، انگیزهٔ مؤلّف اوّل برای معرّفی مفهوم عمومی دنباله‌های ضربی از چندجمله‌ای‌ها بوده است. وی دنبالهٔ تاد را توسط دنبالهٔ ضربی ویژه‌ای با مقدار ۱ برای هر فضای تصویری مختلط مشخص می‌کند.

چهار چندجمله‌ای اول عبارت‌اند از:

$$T_1 := \frac{1}{2} c_1$$

$$T_2 := \frac{1}{12}(c_1^2 + c_2)$$

$$T_3 := \frac{1}{24} c_1 c_2$$

$$T_4 := \frac{1}{720}(-c_4 + c_3 c_1 + 3c_2^2 + 4c_2 c_1^2 - c_1^4).$$

1. Severi

1. Chern classes 2. generic

قضیه [۸]. فرض کنید V یک واریتهٔ جبریِ مختلطِ فشردهٔ ناتکین از بعد n است. آنگاه

$$\chi(V) = \langle T_n(V), [V] \rangle$$

مقدار چندجمله‌ای تادِ T_n به‌ازای ردهٔ اساسی است.

مشاهده می‌کنیم که این نتیجه حال و هوایی مشابه قضیهٔ ریمان-روخ دارد، زیرا اطلاع آنالیزی، عدد اویلر تمامریخت، را با ناوردای گونای تاد که به زبان توپولوژیک تعریف شده، مرتبط می‌سازد.

اگر بعد مختلط V یک باشد، که در مورد رویهٔ ریمانی چنین است، قضیهٔ بالا حالت خاص فرمول ریمان-روخ، یعنی حالت $D = ۰$ خواهد بود. با همین تعبیر، قضیهٔ بالا حالت خاص فرمول هیرتسه‌بروخ-ریمان-روخ برای $D = ۰$ است [۸]. در سال ۱۹۵۷، گروتندیک[1] این فرمول را با در نظر گرفتن شکل پارامتری فرمول ریمان-روخ تعمیم داد [۲]. همهٔ اینها داستانی طولانی دارد، و هر چند به مفهوم گونا مربوط می‌شود، پرداختن به آنها ما را از موضوع اصلی منحرف می‌کند.

بوردیسم[2] و گوناهای تعمیم‌یافته

گفتیم که گونای تاد به شیوهٔ توپولوژیک تعریف می‌شود، ولی این توصیف بیش از حد موجز است. علاوه‌بر خمینهٔ دیفرانسیل‌پذیر زمینه، یک ساختار مختلط به مفهوم ضعیف‌تر مورد نیاز است: یک ساختار مختلط روی مجموع کلاف مماس و کلاف بدیهی. این ساختار یک ساختار تقریباً مختلط پایدار خوانده می‌شود. هر خمینه با یک ساختار تقریباً مختلط پایدار، یک خمینهٔ تقریباً مختلط پایدار نامیده می‌شود. توجه می‌کنیم که با این تعریف، حتی خمینه‌ای از بعد فرد می‌تواند ساختار تقریباً مختلط پایدار داشته باشد.

چون رده‌های چرن ناورداهای پایدار هستند، به این معنی که با افزودن یک کلافِ (مختلط) بدیهی تغییر نمی‌کنند، ساختاری که برای تعریف گونای تاد لازم است یک ساختار تقریباً مختلط پایدار است. برای چنین خمینه‌هایی، گونای تاد ویژگیهای اساسی زیر را داراست:

- جمعی است (یعنی گونای تاد یک اجتماع مجزا، مجموع گوناهای تاد آنهاست).
- ضربی است (یعنی گونای تاد حاصلضرب، حاصلضرب گوناهای تاد است).

این ویژگیهای گونای تاد، نویسندهٔ اول این مقاله را به معرفی مفهوم عمومی گونا برانگیخت. این گونا ناوردایی است مانند Φ برای رده‌هایی از خمینه‌ها، برحسب رده‌های مشخصهٔ کلاف مماس (شاید مجهز به یک ساختار تقریباً مختلط پایدار) با مقادیر متعلق به یک حلقهٔ Λ، که در ویژگیهای بالا نیز صدق کند. توجه داریم که برای رویهٔ ریمانی F، گونای تاد برابر $\frac{c_1(F)}{۲}$ است که

1. Grothendieck

۲. بوردیسم (bordism) واژهٔ جدیدی است که جانشین کوبوردیسم (cobordism) شده است. دو خمینهٔ n بعدی را بوردانت (bordant) گویند هرگاه اجتماع مجزای آنها مرز یک خمینهٔ $n+۱$ بعدی باشد. بوردیسم به مفاهیم و مباحث وابسته به بوردانت اطلاق می‌شود. این دو واژه معادلهای تثبیت‌شده‌ای در فارسی ندارند. شاید بتوان bordant را «مرزوَند» یا «مرزبند» و یا «مرزپوش» و bordism را «مرزوَندی» یا «مرزبندی» و یا «مرزپوشی» ترجمه کرد. ولی فعلاً، تا بررسیهای بیشتر، اصل انگلیسی این اصطلاحات را، هر چند در متن فارسی جالب و مناسب نیستند، به کار می‌بریم.-م.

نصف مشخصهٔ اویلرِ F یعنی $g(F) - ۱$ می‌باشد. لذا در این حالت، گونای تاد اساساً گونای رویهٔ ریمانی است.

یکی از ناورداهای مهم خمینه‌های جهتدار، نشانک [یا امضا[1]ی] آنها $(b_+ - b_-)$ است، که نشانک صورت تقاطعی یک خمینهٔ $۴k$ بعدی جهتدار و بستهٔ M از دیدگاه جبر خطی است (اگر بعد مضرب ۴ نباشد نشانک برابر صفر تعریف می‌شود). نشانک M با

$$sign(M) \in \mathbb{Z}$$

نمایش داده می‌شود.

نویسندهٔ اوّل این مقاله در پی فرمولی بوده است که مشابه فرمول گونای حسابی، نشانک را برحسب رده‌های مشخصه محاسبه کند. این کار زمانی انجام شد که هنوز فرمول ریمان-روخ تنها یک حدسیه بود. در واقع، قضیهٔ نشانک به جزء مهمی از برهان فرمول ریمان-روخ تبدیل شد. چون روی کلاف مماس هیچ ساختار مختلط وجود ندارد، می‌بایست به‌جای رده‌های چرن، از رده‌های پونتریاگین $p_i(M) \in H^{۴i}(M)$ استفاده کرد. این رده‌ها (با تقریب علامت) رده‌های چرن مختلط‌شدهٔ کلاف مماس هستند. مشابه با گونای تاد، نویسندهٔ اول صورتبندی خود در مورد دنباله‌های ضربی را به‌کار گرفت تا چندجمله‌ای‌هایی از رده‌های پونتریاگین بسازد که برای هر فضای تصویری مختلط از بعد زوج، مقدار ۱ یعنی نشانک M را می‌گیرد. اینها L-چندجمله‌ای‌ها هستند. سه L-چندجمله‌ای اول چنین‌اند

$$L_۱ = \frac{۱}{۳} p_۱$$

$$L_۲ = \frac{۱}{۴۵}(۷p_۲ - p_۱^۲)$$

$$L_۳ = \frac{۱}{۹۴۵}(۶۲p_۳ - ۱۳p_۲p_۱ + ۲p_۱^۳).$$

اگر می‌دانستیم که، مانند موردِ گونای حسابی، مقادیر در فضاهای تصویری از بعد زوج، نشانک را معین می‌کنند، فرمول مورد انتظار به‌دست می‌آمد. این وضع پیش می‌آمد اگر، پس از گذار به مضربی از خمینه در صورت نیاز، هر خمینه بوردانتِ ترکیبی خطی از حاصلضربهای فضاهای تصویری بود. دلیل این امر این است که هم نشانک و هم L-چندجمله‌ای‌ها، ناورداهای بوردیسم هستند. در اینجا دو خمینهٔ M و N بوردانت هستند اگر خمینهٔ جهتدار و فشردهٔ W وجود داشته باشد به‌طوری که مرز W اجتماع مجّزای M و $-N$ باشد، که $-N$ همان خمینهٔ N است با جهت مخالف جهت N.

رده‌های بوردیسمِ خمینه‌های nبعدی جهتدار و بسته، تحت عمل اجتماع مجزا یک گروه تشکیل می‌دهند که با Ω_n نمایش داده می‌شود. مجموع $\Omega_* := \sum_n \Omega_n$ نسبت به ضرب دوخمینه یک حلقه است. تام [۲۳]، $\Omega_* \otimes \mathbb{Q}$ را محاسبه کرد. این حلقهٔ چندجمله‌ای‌هاست که مولدهای آن فضاهای تصویری از بعد زوج هستند. این ملاحظات ما را به نتیجهٔ زیر رهنمون می‌شود:

قضیه (قضیهٔ نشانک) [۸]. فرض کنید M یک خمینهٔ جهتدارِ هموار و بسته است. در این‌صورت

$$sign(M) = \langle L(M), [M] \rangle.$$

1. signature

در مورد گونای تاد اشاره کردیم که این گونا برای خمینه‌های بسته با ساختار تقریباً مختلط پایدار تعریف می‌شود. میلنر [۱۶] متناظر با گروههای بوردیسم خمینه‌های جهتدار، گروههای بوردیسم خمینه‌های تقریباً مختلط پایدار را تعریف و محاسبه کرد. پاسخ ساده‌تر از موردِ گروههای بوردیسم جهتدار است: حلقهٔ بوردیسمِ خمینه‌های تقریباً مختلط پایدار، حلقهٔ چندجمله‌ای‌ها روی $\mathbb{Z}$ است با متغیرهای χ_i متناظر با خمینه‌های تقریباً مختلط پایدار از بعد حقیقی $2i$، که میلنر آنها را به‌طور صریح توصیف می‌کند. با ضرب تانسوری در $\mathbb{Q}$، مولّدها توسط فضاهای تصویری $\mathbb{CP}^i$ مشخص می‌شوند.

ارتباط با نشانک

در این بخش ما فقط می‌توانیم به بعضی از جنبه‌های این ارتباط اشاره کنیم (با ترتیبی غیر از ترتیب تاریخی). گونای کلاسیک یک رویهٔ ریمانی نوع همسانریختی آن را به‌طور کامل معین می‌سازد (که برای رویه‌ها با نوع دیفرانسیل‌ریختی یکسان است). به تعبیری، نتیجه‌ای مشابه برای ۴ـ خمینه‌های همبند سادهٔ هموار و بسته وجود دارد.

قضیه ([۵]، [۳]). دو ۴ـخمینهٔ همبند سادهٔ دیفرانسیل‌پذیر بسته همسانریخت‌اند اگر و تنها اگر مشخصهٔ اویلر، نشانک و نوع آنها (زوج یا فردبودن) یکسان باشند.

در اینجا نوع زوج است اگر و تنها اگر همهٔ عددهای خودتقاطعی، زوج باشند، این قضیه نتیجهٔ بسیار عمیقی است که بر پایهٔ قضایای دشواری که فریدمن و دانلدسن آنها را مستقلاً ثابت کرده‌اند، استوار است. فریدمن ۴ـ خمینه‌های توپولوژیک همبند ساده را برحسب صورت تقاطعی و یک ناوردا با مقادیر متعلق به $\mathbb{Z}/2$، که ناوردای کربی‌ـ سیبنمان[1] نام دارد، رده‌بندی کرد. این ناوردا برای خمینه‌های هموار و خمینه‌هایی که با S^4 هم‌ارز هوموتوپیک هستند، صفر است. بنابراین، فریدمن حالت توپولوژیک ۴ بعدی حدسیهٔ پوانکاره را ثابت می‌کند: هر خمینهٔ ۴ بعدی هوموتوپیک با S^4، با S^4 همسانریخت است. هر صورت دوخطی متقارن تک‌پیمانه‌ای[2] صورت تقاطعی یک ۴ـ خمینهٔ توپولوژیک همبند ساده و بسته است، و رده‌بندی چنین صورتهایی شناخته‌شده نیست. لیکن برای خمینه‌های هموار، دانلدسن نظریهٔ پیمانه‌ای[3] را به‌کار می‌برد و نشان می‌دهد صورتهای تقاطعی بسیار خاص‌اند، و بر پایهٔ نتایجی کلاسیک، برحسب رتبه (معادل با مشخصهٔ اویلر)، نشانک، و نوع رده‌بندی می‌شوند.

برخلاف رویه‌های ریمانی، مشابه نتیجهٔ رده‌بندی با تقریب دیفرانسیل‌ریختی، در بعد ۴ کاملاً متفاوت است. ۴ـ خمینه‌های همبند سادهٔ متعدد M وجود دارند که ساختار هموار غریب[4] دارند، یعنی خمینهٔ دیگری وجود دارد که با M همسانریخت است لیکن با M دیفرانسیل‌ریخت نیست. اولین مثال توسط دانلدسن پیدا شد [۴]. بعداً، با به‌کارگیری شیوه‌های وی، نشان داده شد که ۴ـ خمینه‌های همبند سادهٔ زیادی وجود دارند که تعداد ساختارهای هموار روی آنها نامتناهی است، مانند رویهٔ $K3$ $\{\chi \in \mathbb{CP}^3 | \sum \chi_i^4 = 0\}$ (که رویه‌ای مختلط است، لذا بعد حقیقی آن ۴ است).

1. Kirby-Siebenman invariant

۲. صورت دوخطی را تک‌پیمانه‌ای گویند هرگاه دترمینان آن ± 1 باشد.ـ م.

3. gauge theory 4. exotic smooth structure

مسألهٔ ذیل یکی از مسائل حل‌نشدهٔ مهم در توپولوژی دیفرانسیل است: آیا ۴ـ خمینهٔ بسته‌ای بدون ساختار غریب وجود دارد؟ جالب‌ترین مثالها صفحهٔ تصویری مختلط $\mathbb{CP}^2$ یا ۴ـ کرهٔ S^4 است. اگر S^4 ساختار هموار یکتا داشته باشد، این حدسیهٔ پوانکاره در حالت ۴ بعدی و هموار است، که می‌توان آن را به‌صورت ذیل فرمول‌بندی کرد: هر ۴ـ خمینهٔ همبند سادهٔ هموار و بسته با مشخصهٔ اویلر ۲ دیفرانسیل‌ریخت است با S^4 (عدد بتی دوم آن خودبه‌خود صفر است لذا نشانک صفر است؛ در نتیجه طبق قضیهٔ بالا با S^4 همسانریخت است).

وجود تعدادی نامتناهی ساختار هموار روی خمینهٔ بسته چیزی است که منحصراً در بعد ۴ اتفاق می‌افتد. در همهٔ ابعادِ دیگر این عدد متناهی است. این نتیجه ارتباط نزدیکی با Hauptvermutung [حدسیهٔ اصلی] (در توپولوژی هندسی) دارد، که می‌گوید اگر یک خمینهٔ توپولوژیک مثلث‌بندی داشته باشد این مثلث‌بندی با تقریب تظریف، یکتاست. این مطلب درست نیست (اولین مثالهای نقض را میلنر به‌دست داد [۱۷])، ولی در بعد بزرگ‌تر از ۴ کار کربی و سیبنمان در مورد حدسیهٔ اصلی [۱۳] نشان می‌دهد که هر خمینهٔ توپولوژیک از بعد بیشتر از ۴ حداکثر تعداد متناهی ساختار تکه‌ای‌ـ خطی دارد. با استفاده از نظریهٔ جراحی، می‌توان نشان داد که هر خمینهٔ تکه‌ای‌ـ خطی از بعد بیش از ۴ حداکثر تعدادی متناهی ساختار هموار دارد. با ترکیب این دو نتیجه، می‌توان دید که هر خمینهٔ توپولوژیک از بعد بیش از ۴ حداکثر تعدادی متناهی ساختار هموار دارد.

در همین نتیجهٔ اخیر، رده‌بندی ساختارهای هموار روی کره‌ها نقشی اساسی ایفا می‌کند (در مورد اولین مثالهای میلنر، ر.ک. [۱۵]؛ در مورد رده‌بندی کلی در بعد بزرگ‌تر از ۴ توسط کرورِ و میلنر، ر.ک. [۱۲]). مفهوم نشانک و به‌ویژه قضیهٔ نشانک همان‌قدر که ابزارهای اساسی برای وجود ساختارهای غریب روی کره‌ها هستند، ابزارهایی برای رده‌بندی این ساختارها نیز می‌باشند. ما این را در مورد وجود نشان می‌دهیم. میلنر خمینه‌های هموار فشرده‌ای مانند W می‌سازد که مرز آنها با S^{4n-1} همسانریخت باشد. وی سپس اجتماع W را با مخروط رویِ مرز آن در نظر می‌گیرد. اگر این مرز با S^{4n-1} همسانریخت باشد، آنگاه این یک خمینهٔ هموار است و لذا می‌توان نشانک آن را به کمک قضیهٔ نشانک برحسب Lـ چندجمله‌ای‌ها محاسبه کرد. به‌استثنای عبارت ردهٔ بالای پونتریاگین یعنی ردهٔ p_n، بقیه عبارت Lـ چندجمله‌ای‌ها را می‌توان برحسب رده‌های پونتریاگین W محاسبه کرد. بنابراین می‌توان فرمول نشانک را برای محاسبهٔ عبارات در p_n در Lـ چندجمله‌ای به‌کار برد. ضریب p_n در Lـ چندجمله‌ای عددی است گویا،

$$\frac{2^{2n}(2^{2n-1}-1)}{2n!}(-1)^{n-1}b_{2n}$$

که در آن b_{2n} عدد برنولی است. اگر مرز W با S^{4n-1} دیفرانسیل‌ریخت باشد، این واقعیت که p_n عددی صحیح است، نوعی همنهشتی بین تفاضل نشانک اجتماع W با مخروط روی مرز و عبارتهای دیگر در Lـ چندجمله‌ای، نتیجه می‌دهد (ما به مثال ویژهٔ ساده‌ای خواهیم پرداخت). اگر این همنهشتی برقرار نباشد، مرز W با کره دیفرانسیل‌ریخت نیست. با این روال، می‌توان مثالهایی از ساختارهای غریب روی کره‌هایی از بعد $4n-1$، $n > 1$ تولید کرد (همچنین ر.ک. [۱۷]).

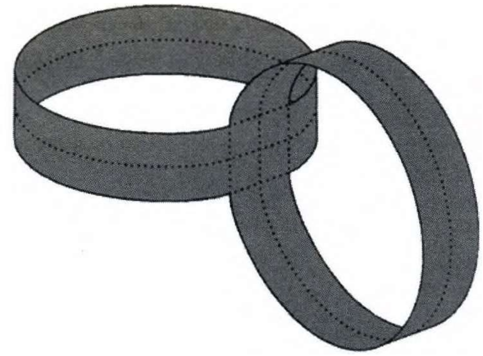
حال می‌خواهیم فرایند «لوله‌کشی» [۹] را مشابه شیوهٔ ساخت مورد استفادهٔ میلنر به‌کار ببریم تا مثالهایی صریح از کره‌های با ساختار غریب و هم‌زمان، شیوهٔ ساخت یک خمینهٔ توپولوژیک بدون ساختار هموار ارائه کنیم (وجود چنین خمینه‌هایی را اولین بار کرور ثابت کرد [۱۱]). گراف E_8 را در نظر می‌گیریم:

با به‌کاربردن E_8، خمینه‌ای می‌سازیم با مرزِ ۱۲ بعدی، به این ترتیب که برای هر یال یک نسخهٔ کلاف قرصِ کلاف مماس S^6 را در نظر گرفته و طبق دستور زیر آنها را به‌هم می‌چسبانیم. اگر دو رأس توسط یالی به‌هم وصل شده باشند، شکل بدیهی‌شدهٔ کلاف قرص روی قرص D^6 از S^6 را در نظر می‌گیریم تا نشانندهٔ $D^6 \times D^6$ در کلاف قرص حاصل شود که در آن مؤلفه اول به S^6 و مؤلفهٔ دوم به تارها نگاشته می‌شوند. سپس (x,y) در حاصلضرب اول را با (y,x) در حاصلضرب دوم یکی می‌کنیم، نتیجه یک خمینهٔ ۱۲ بعدی فشردهٔ $W(E_8)$ است با مرز و گوشه‌ها، که می‌توان آن را هموار کرد. این خمینه بنا به ساخت خود با حاصلضرب گوه‌ای هشت نسخهٔ S^6 هم‌ارز هوموتوپیک است. با ملاحظهٔ وضعیت عمومی، گروه بنیادی آن بدیهی است. با استفاده از ویژگی تک‌پیمانه‌ای‌بودن (به این معنی که صورت تقاطعی، دترمینانی برابر ± 1 دارد) در مورد صورت E_8، از رشتهٔ مِیِر-ویتوریس[1] نتیجه می‌شود که مرز $W(E_8)$ یک هوموتُوپیِ کره است. با استفاده از بخشی از حدسیهٔ پوانکاره که توسط اسمِیل ثابت شده است [۲۲]، نتیجه می‌گیریم که این مرز با S^{11} همسانریخت است. حال قضیهٔ نشانک را به‌کار می‌بریم تا نشان دهیم مرز فوق با S^{11} دیفرانسیل‌ریخت نیست. اگر دیفرانسیل‌ریختی $f : \partial W(E_8) \to S^{11}$ وجود داشت، می‌توانستیم $M := W(E_8) \cup_f D^{12}$ را در نظر بگیریم و خمینهٔ همواری به‌دست آوریم که مانستگی آن بدیهی است مگر در درجه‌های ۰، ۶، و ۱۲. صورت تقاطعی این خمینه بنا به شیوهٔ ساخت آن همان صورت E_8 است، که نشانک آن برابر ۸ است. حال قضیهٔ نشانک را به‌کار می‌بریم تا نتیجه بگیریم

$$8 = \frac{62}{945}\langle p_3(M), [M]\rangle$$

که تناقض است (توجه کنید که تنها ردهٔ پونتریاگین که می‌تواند نابدیهی باشد $p_3(M)$ است، که یک ردهٔ همانستگی انتگرال[2] است). لذا $\partial W(E_8)$ یک کرهٔ غریب است. اگر به‌جای دیفرانسیل‌ریختی، همسانریختی به‌کار ببریم، یک خمینهٔ توپولوژیک M به‌دست می‌آید که با همان استدلال بالا نمی‌تواند ساختار هموار داشته باشد.

1. Mayer-Vietoris 2. integral cohmology class



شکل ۳

استفاده از گراف E_8 از این واقعیت الهام گرفته شده که حاصل از تکین‌زدایی $z_1^2 + z_2^3 + z_3^5 = 0$ در نقطهٔ $(0,0,0)$ هشت خم گویای ناتکین با عدد خودتقاطعی -2 که رفتار تقاطعی آن توسط E_8 مشخص می‌شود تشکیل یافته است.

قضیهٔ اندیس اتیا-سینگر و گوناهای دیگر

به استثنای نشانک، طرفهای چپ فرمولهای مربوط به‌گونا طبیعت آنالیزی دارند که به‌وسیلهٔ بعدهای بعضی از فضاهای برداری توابع یا صورتهای دیفرانسیل مشخص می‌شوند. در واقع نشانک را نیز می‌توان از طریق نظریهٔ هاج[1] به‌صورت یک ناوردای آنالیزی تعبیر کرد که اندیس یک عملگر دیفرانسیل، به‌نام عملگر نشانک است. بنابراین، قضیهٔ نشانک یک قضیهٔ اندیس است که اندیس یک عملگر دیفرانسیل بیضوی را با عبارتهای توپولوژیک بیان می‌کند.

طی دههٔ ۱۹۶۰، اتیا و سینگر [۱] یک قضیهٔ کلی اندیس برای عملگرهای دیفرانسیل بیضوی روی خمینه‌های هموار ثابت کردند که مثلاً قضیهٔ نشانک را تعمیم می‌دهد. علاوه‌بر نشانک، مهم‌ترین عملگرها عبارت‌اند از عملگر لاپلاس که اندیس آن مشخصهٔ اویلر است، و عملگر دیراک روی خمینه‌ای با ساختار اسپین. جنبهٔ توپولوژیک فرمول اندیس برای عملگر دیراک، $\hat{A}$-گونا، در [۸] بررسی شد. در دههٔ ۱۹۸۰ اُشانین[2] و ویتن گوناهایی بسیار جالب برای خمینه‌های اسپین و خمینه‌های ریسمان، به‌ترتیب به‌نامهای گونای اوشانین و گونای ویتن تعریف کردند. ویژگی برجستهٔ این گوناها این است که مقادیر خود را در حلقهٔ صورتهای پیمانه‌ای می‌گیرند (برای مثال، مقایسه کنید با [۱۰]). می‌توان حدس زد که این گوناها فقط سایه‌ای از نظریه‌های مانستگی (همانستگی) جدیدی هستند که به همانستگی بیضوی مربوط می‌شوند. و بالاخره، انتظار می‌رود همانستگی بیضوی نقشی اساسی در نظریهٔ اندیس فضای طوقهٔ یک خمینه ایفا کند، همانند نقشی که نظریهٔ K در نظریهٔ اندیس خمینه‌های هموار داشته است.

مراجع

1. Michael F. Atiyah and I. M. Singer, The index of elliptic operators. I, *Ann. of Math.* (2) **87** (1968), 484-530; The index of elliptic operators. III, *Ann. Math.* (2) **87** (1968), 546-604.

2. Armand Borel and Jean-Pierre Serre, Le théorème de Riemann-Roch, *Bull. Soc. Math. France* **86** (1958), 97-136.

1. Hodge theory 2. Ochanine

3. S. K. Donaldson, An application of gauge theory to four-dimensional topology, *J. Differential Geom.* **18** (1983), 279-315.

4. ———, Irrationality and the h-cobordism conjecture, *J. Differential Geom.* **26** (1987), 141-168.

5. Michael Hartley Freedman, The topology of four-dimensional manifolds, *J. Differential Geom.* **17** (1982), 357-453.

6. André Gramain. *Topologie des surfaces*, Collection SUP: "Le Mathématicien", 7, Presses Universitaires de France, Paris, 1971.

7. Morris W. Hirsch, *Differential topology*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 33, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1976.

8. F. Hirzebruch, *Neue topologische Methoden in der algebraischen Geometrie*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 9, Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1965.

9. ———, *Gesammelte Abhandlugen. Band I, Zur Theorie der Mannigfaltigkeiten*, Springer-Verlag, Berlin, 1987.

10. Friedrich Hirzebruch, Thomas Berger, and Rainer Jung, *Manifolds and modular forms* (translated by Peter S. Landweber), Aspects of Mathematics, E 20, Vieweg, Wiesbaden, 1992.

11. M. A. Kervaire, A manifold which does not admit any differentiable structure, *Comment. Math. Helv.* **34** (1960), 257-270.

12. Michel A. Kervaire and John W. Milnor, Groups of homotopy spheres. I, *Ann. of Math.* (2) **77** (1963), 504-537.

13. Robion C. Kirby and Laurence C. Siebenmann, *Foundational essays on topological manifolds, smoothings and triangulations*, Annals of Mathematics Studies, 88, Princeton University Press, Princetion, NJ, and University of Tokyo Press, 1977.

14. K. Kodaira and D. C. Spencer, On arithmetic genera of algebraic varieties, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **39** (1953), 641-649.

15. John W. Milnor, On manifolds homeomorphic to the 7-sphere, *Ann. of Math.* (2) **64** (1956), 399-405.

16. ———, On the cobordism ring Ω^* and a complex analogue. I, *Amer. J. Math.* **82** (1960), 505-521.

17. ———, *Collected papers of John Milnor. III. Differential topology*, American Mathematical Society, Providence, RI, 2007.

18. I. R. Porteous, Todd's canonical classes, *Proceedings of Liverpool Singularities Symposium I*, (1969/70), pp. 308-312. Lecture Notes in Math., Vol. 192, Springer, Berlin, 1971.

19. T. Rado. Über den Begriff der Riemannschen Fläche, *Acta Szeged* **2** (1925), 101-121.

20. B. Riemann, Theorie der Abel'schen Functionen, *J. Reine Angew. Math.* **54** (1857), 101-155.

21. G. Roch. Ueber die Anzahl der willkürlichen Constanten in algebraischen Functionen, *J. Reine Angew. Math.* **64** (1865), 372-376.

22. Stephen Smale, Generalized Poincaré's conjecture in dimensions greater than four, *Ann. of Math.* (2) **74** (1961), 391-406.

23. René Thom. Quelques propriétés globales des variétés différentiables. *Comment. Math. Helv.* **28** (1954), 17-86.

24. J. A. Todd, The arithmetical invariants of algebraic loci, *Proc. London Math. Soc.* (2), Ser. 43, 1937, 190-225.

25. Bartel. L. van der Waerden, Birational invariants of algebraic manifolds, *Acta Salmanticentsia. Ciencias: Sec. Mat.*, no. 2 (1947); Birationale Transformation von linearen Scharen auf algebraischen Mannigfaltigkeiten, *Math. Z.* **51** (1948), 502-523.

* * * * * *

• Friedrich E. P. Hirzebruch and Matthias Kreck, "On the concept of genus in topology and complex analysis", *Notices Amer. Math. Soc.*, (6) **56** (2009) 713-719.

* فریدریش هیرتسه‌بروخ، استاد بازنشستهٔ مؤسسهٔ ریاضی ماکس پلانک، بن، آلمان
hirzebruch@mpin-bonn.mpg.de

** ماتیاس کرک، استاد مؤسسهٔ پژوهشی ریاضیات هاوسدورف در دانشگاه بن، آلمان
kreck@him.uni-bonn.de