نشر ریاضی، سال ۷، شمارهٔ ۱، صص ۶ ـ ۱۴

موجنگاشتها یا نگاشتهای همسازِ خمینه‌های لورنتسی

ع. شادی تحویلدارزاده*

۱. مقدمه

با تابعهای همساز در درسهای توابع مختلط و معادلات دیفرانسیل جزئی آشنا شده‌اید. تابع $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ را همساز می‌نامند در صورتی‌که $\Delta f = 0$ که در آن، Δ عملگر لاپلاس است یعنی $\Delta = \frac{\partial}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_n^2}$.
می‌توان مفهوم عملگر لاپلاس را به خمینه‌های ریمانی تعمیم داد و توابع همساز روی خمینه‌های ریمانی را در نظر گرفت. در این‌صورت، همساز بودن f در واقع معادل می‌شود با آنکه f نقطهٔ بحرانی انتگرال دیریشلهٔ $D(f) = \frac{1}{2}\int_M |\nabla f|^2 dx$ باشد.

حال فرض کنید (M^m, g) و (N^n, h) دو خمینهٔ ریمانی و U نگاشتی از M به N باشد. یکی از ساده‌ترین کمیتهای ناوردای هندسی که می‌توان ساخت عبارت‌است از ردّ پسکشِ[1] h تحت U:

$$L = Tr_g U^* h = g^{\alpha\beta}\partial_\alpha U^a \partial_\beta U^b h_{ab}$$

با انتگرالگیری از لاگرانژی L روی M می‌توان تابعکی کنشی به شکل زیر تعریف نمود

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\int_M L \, d\mu_g$$

نقاط بحرانی این تابعک را نگاشتهای همساز می‌نامند. U یک نقطهٔ بحرانی است هرگاه وردش $\mathcal{A}$ در U برابر صفر باشد

$$\frac{\delta \mathcal{A}}{\delta U} = \frac{d}{d\varepsilon}|_{\varepsilon=0} \quad \mathcal{A}(U + \varepsilon\delta U) = 0 \quad \forall \delta U : M \xrightarrow{C^\infty} N$$

باید توجه کرد که برد نگاشت U یک فضای خطی نیست بلکه یک خمینه است؛ بنابراین در تعریف وردش فوق باید دقت بیشتری کرد چراکه $U + \varepsilon\delta U$ بی‌معنی است. چاره آن است که با استفاده از قضیهٔ نش‌ـموزر[2] خمینهٔ N را در یک فضای اقلیدسی E با بعد بالاتر به‌طور طولپا بنشانیم و سپس برای تعریف نقطهٔ بحرانی کنش $\mathcal{A}$ به یکی از دو ترفند زیر متوسل شویم: یا نگاشت وردش‌یافتهٔ $U + \varepsilon\delta U$ را پیش از جایگزینی در $\mathcal{A}$ با استفاده از افکنش قائم هموار π_N که در یک همسایگی لوله‌ای[1] N قابل تعریف است به روی خمینهٔ N بازگردانیم، و یا اصلاً با استفاده از دستگاه مختصات تعریف‌شده روی فضای محیط E، نگاشت همساز را به‌عنوان یک مسالهٔ وردشی مقید تعریف کنیم [۴]. در هر صورت دیده می‌شود که معادلات اویلرـلاگرانژ برای نقاط بحرانی تابعک $\mathcal{A}$ عبارت‌اند از

$$\Delta_M U^i + {}^N\Gamma^i_{jk}\partial_\alpha U^j \partial^\alpha U^k = 0 \qquad (1)$$

که در آن Δ_M عملگر لاپلاس‌ـبلترامی است: $\Delta_M = \frac{1}{\sqrt{g}}\partial_i(\sqrt{g}g^{ij}\partial_j)$، و ${}^N\Gamma^i_{jk}$ نمادهای کریستوفل برخاسته از متریک h برای خمینهٔ N می‌باشند. رابطهٔ (۱) نشان‌دهندهٔ دستگاهی از معادلات دیفرانسیل جزئی بیضوی با جملهٔ غیرخطی درجهٔ دوم برحسب گرادیان نگاشت مجهول است. می‌بینیم که غیرخطی بودن این معادلات منشأ هندسی دارد و فی‌المثل اگر خمینهٔ هدف N تخت باشد جملهٔ غیرخطی برابر با صفر خواهد بود.

نگاشتهای همساز را از سی سال پیش تاکنون ریاضیدانانِ بسیاری در رشته‌های آنالیز، هندسه و توپولوژی بررسی کرده‌اند و امروزه نتایج بسیاری دربارهٔ وجود و یگانگی، همواری، طبقه‌بندی تکینه‌های ممکن، بعد هاوسدورف زیر مجموعه‌های تکین، ساختمان هندسی و توپولوژیک جوابها و فضاهای تشکیل‌شده از جوابها در دست است [۵].

خمینهٔ $m+1$بعدی $\mathcal{M}$ را که مجهز به متریک لورنتسی g باشد *خمینهٔ لورنتسی* می‌خوانند. متریک g را *لورنتسی* می‌نامند هرگاه به‌عنوان یک فرم درجهٔ دومِ تعریف‌شده روی کلاف مماس $T\mathcal{M}$ دارای شاخص یک و یا علامت $(+,\cdots,+,-)$ باشد. اگر در مطالب بالا به‌جای خمینهٔ ریمانی M^m خمینهٔ لورنتسی $\mathcal{M}^{m+1}$ را بگذاریم خواهیم دید که کلیهٔ مفاهیم بالا باز هم قابل تعریف‌اند. نقاط بحرانی تابعک کنش حاصل را موجنگاشت می‌خوانیم چراکه در اینجا عملگر دالامبری $\Box_{\mathcal{M}}$ ظاهر می‌شود که بیضوی نیست بلکه هذلولوی است و در حالت خاص $\mathcal{M} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$

1. pullback 2. Nash-Moser

1. tubular neighbourhood

و $g = \operatorname{diag}(-1,1,\cdots,1)$ که $(\mathcal{M},g)$ فضای مینکوفسکی خوانده می‌شود، داریم $\Box_{\mathcal{M}} = \partial_t^2 - \Delta_{\mathbb{R}^m}$ که همان عملگر موج است و دستگاه معادلات حاصل دستگاهی از معادلات موج خواهد بود

$$\partial_t U^i - \Delta U^i + {}^N\Gamma^i_{jk}\partial_\alpha U^j \partial^\alpha U^k = 0 \qquad (2)$$

در مقایسه با نگاشتهای همساز، موجنگاشتها تقریباً ناشناخته‌اند. نخستین‌بار در اوایل دهۀ شصت دو فیزیکدان نامی، گلمان و لوی، مدلی برای برهمکنش پایونها (ذرات π) به‌نام مدل سیگما ارائه کردند که در آن میدان مزونی مورد بحث به‌جای آنکه مقادیر خود را در $\mathbb{R}^3$ (متناظر با سه نوع مختلف ذرۀ π) اختیار کند و بنابراین به نظریۀ خطی میدانها منجر شود، مقادیر خود را در $S^3 \subset \mathbb{R}^4$ اختیار می‌کرد و در نتیجه میدانی بود غیرخطی [۶]. زمانی که توجه ریاضیدانان به این مدل جلب شد بیش از پانزده سال از ارائۀ آن گذشته بود و طی این مدت اولاً معلوم شد که پایونها ذراتی بنیادی نیستند و ثانیاً با رونق گرفتن نظریه‌های پیمانه‌ای در فیزیک، مدل گلمان‌ـلوی که ناوردای پیمانه‌ای نیست به‌تدریج از چشم فیزیکدانان افتاد.

اما این اصلاً بدان معنی نیست که امروزه بررسی موجنگاشتها بی‌فایده باشد. از یک‌سو درست همان‌طور که نگاشتهای همساز به‌دلیل سادگی و طبیعی بودن (یعنی هندسی بودن) تعریفشان توجه بسیاری از ریاضیدانان را در رشته‌های آنالیز، هندسه، توپولوژی و فیزیک ریاضی به‌خود جلب کرده بودند، موجنگاشتها نیز به‌عنوان ساده‌ترین میدانهای هندسی غیرخطی قابل تعریف روی فضاـزمان طبعاً همین ویژگی را دارند. از سوی دیگر امروزه شواهد محکمی در دست داریم که نشان می‌دهند این نظریه سنگ بنایی است برای پی‌بردن به اسرار گرانش و نسبیت عام. برای مثال، نسبیت‌پژوهان از مدتها پیش می‌دانستند [۱۰] که معادلات اینشتین را که مجهول آنها g متریک لورنتسی فضاـزمان است می‌توان با اختیارکردن یک دستگاه مختصات خاص که به‌نام مختصات همساز و یا مختصات موجی مشهور است به‌صورت زیر درآورد

$$g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\beta g + g^{-1}(\partial g)^2 = 0$$

در جملۀ غیرخطی این سیستم هذلولوی، مشتقات اول متریک مجهول با توان دو ظاهر می‌شوند ــ درست مانند موجنگاشتها ــ با این تفاوت که معادلۀ اخیر به‌دلیل وجود ضرایب وابسته به g برای مشتقات مرتبۀ دوم، شبه‌خطی است در حالی‌که معادلۀ موجنگاشت نیمه‌خطی است و در نتیجه بررسی آن آسانتر است. از این دیدگاه، برای درک درست جوابهای معادلات اینشتین ابتدا باید مسالۀ موجنگاشتها را حل کرد. علاوه بر این اخیراً ثابت شده است [۱] که معادلات اینشتین تحت فرض وجود یک تقارن خاص برای فضاـزمان دقیقاً به معادلات یک موجنگاشت تحویل‌پذیرند که خمینۀ هدف آن همه‌جا دارای انحنای [خمیدگی] منفی است. موجنگاشتها همچنین در نظریۀ یانگ‌ـمیلز (به‌صورت جوابهای پیمانه‌ای محض) و در نظریۀ الاستودینامیک نسبیتی ظاهر می‌شوند.

از آنجایی که دستگاه معادلات موجنگاشت یک دستگاه هذلولوی است، مسالۀ مناسب برای آن مسالۀ کوشی است که در آن یک ابررویۀ فضاگونۀ Σ معین می‌شود و تحدید نگاشت U و مشتق زمانی آن به Σ به‌عنوان داده‌های آغازی تجویز می‌گردند

$$U|_\Sigma = U_0 \qquad \frac{\partial U}{\partial t}|_\Sigma = U_1 \qquad (3)$$

و مسأله عبارت است از یافتن نگاشت Uیی که در (۲) و (۳) صدق کند.

۲. قوانین پایستگی و براوردهای انرژی

همچون همۀ نظریه‌های میدان لاگرانژی، موجنگاشتها نیز دارای تانسور انرژیـتکانه هستند. این تانسور را می‌توان با وردش گرفتن از تابعک کنش $\mathcal{A}$ نسبت به متریک فضاـزمان به‌دست آورد

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \frac{1}{2}\int_{\mathcal{M}} L\sqrt{-g}\,dx \\
\frac{\delta\mathcal{A}}{\delta g} &= \frac{1}{2}\int_{\mathcal{M}}\left(\frac{\partial L}{\partial g^{\mu\nu}} + \frac{1}{\sqrt{-g}}L\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial g^{\mu\nu}}\right)\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{\mathcal{M}} T_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}\,d\mu_g
\end{aligned}$$

و در نتیجه $T = Uh - \frac{1}{2}Lg$ و یا

$$T_{\mu\nu} = h_{ab}(\partial_\mu U^a\partial_\nu U^b - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\partial_\alpha U^a\partial^\alpha U^b)$$

ثابت می‌شود که هرگاه U یک نقطۀ بحرانی انتگرال کنش $\mathcal{A}$، یعنی یک موجنگاشت باشد، داریم $\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0$. بسیاری از قوانین پایستگی موجنگاشتها از این رابطه به‌دست می‌آیند. برای ملاحظۀ این مطلب فرض کنید X یک میدان برداری هموار تعریف‌شده روی خمینۀ $\mathcal{M}$ باشد و قرار دهید $P^\mu = T^\mu{}_\nu X^\nu$. آنگاه داریم

$$\begin{aligned}
\nabla_\mu P^\mu &= \nabla_\mu(T^\mu{}_\nu X^\nu) = \nabla^\mu T_{\mu\nu}X^\nu + T^{\mu\nu}\nabla_\mu X_\nu \\
&= 0 + \frac{1}{2}T^{\mu\nu}(\nabla_\mu X_\nu + \nabla_\nu X_\mu) \\
&= \frac{1}{2}T^{\mu\nu}\mathcal{L}_X g_{\mu\nu} \qquad (\text{مشتق لی در جهت } X : \mathcal{L}_X)
\end{aligned}$$

حال اگر X یک میدان برداری کیلینگ، یعنی مولد تقارنی پیوسته برای $\mathcal{M}$، باشد داریم $L_X g_{\mu\nu} = 0$ و در نتیجه $\nabla_\mu P^\mu = 0$، یعنی P یک بردار با واگرایی صفر است و در نتیجه طبق قضیۀ گاوس با انتگرالگیری از این رابطه روی D ناحیۀ مابین دو ابررویۀ Σ_1 و Σ_2 (و فرض صفر بودن داده‌های آغازی در بینهایت) خواهیم داشت

$$0 = \int_D \nabla_\mu P^\mu = \int_{\partial D} P\cdot n\,d\sigma = \int_{\Sigma_2} P\cdot n_2\,d\sigma_2 - \int_{\Sigma_1} P\cdot n_1\,d\sigma_1$$

بدین‌ترتیب به‌ازای هر میدان کیلینگ، یعنی به‌ازای هر تقارن $\mathcal{M}$، یک کمیت پایسته به‌دست می‌آید. این امر در واقع تجلی قضیۀ کلی نوتر است.

به‌عنوان مثال فرض کنید $\mathcal{M}$ فضای مینکوفسکی $\mathbb{R}^{m,1}$ باشد. در واقع از حالا به بعد برای سادگی، خمینۀ دامنه را فضای مینکوفسکی تصور می‌کنیم. فرض کنید (x,t) مختصات سراسری روی $\mathcal{M}$ باشد: $x = (x^1,\cdots,x^m)$ و نیز فرض کنید $X = \partial_t$ که مولد انتقال زمانی است. دیده می‌شود که کمیت پایستۀ متناظر با این تقارن عبارت است از

$$E(U,T) = \frac{1}{2}\int_{t=T}|\frac{\partial U}{\partial t}|_h^2 + |\nabla_x U|_h^2$$

$$=\frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^m\times\{T\}} h_{ab}(\partial_t U^a\partial_t U^b + \sum_{i=1}^m \partial_i U^a \partial_i U^b)dx$$

کمیت فوق را انرژی موجنگاشت U در زمان T می‌خوانیم. قانون پایستگی انرژی بیان می‌کند که برای هر t_1 و t_2 در $\mathbf{R}$

$$E(U,t_1)=E(U,t_2)$$

نکتهٔ دیگری که در مورد تانسور انرژی‌ـ‌تکانه شایان توجه است این است که هرگاه m، بعد فضایی خمینهٔ $\mathcal{M}$، برابر یک باشد، ردّ این تانسور صفر خواهد بود

$$tr_g T = tr_g U^*h - \frac{1}{2}L\ tr_g g = L-\frac{1}{2}L(m+1) = L\frac{1-m}{2}$$

بی‌رد بودن تانسور انرژی‌ـ‌تکانه بدین معنی است که نظریهٔ موجنگاشتها در بعد $m=1$ یک نظریهٔ میدان همدیس است: فرض کنید X یک میدان برداری همدیس باشد، در این‌صورت $L_X g_{\mu\nu}=\Omega g_{\mu\nu}$ و بنابراین براساس محاسبهٔ پیشین اگر $P^\mu = T^\mu{}_\nu X^\nu$ آنگاه $\nabla_\mu P^\mu = \frac{\Omega}{2}T^{\mu\nu}g_{\mu\nu}=0$ و این خود نشان‌دهندهٔ وجود قوانین پایستگی بیشتری برای موجنگاشتها (متناظر با بعد گروه نگاشتهای همدیس فضاـ‌زمان) در این بعد می‌باشد.

در واقع شطح نشان داده است [۱۱] که در بعد $m=1$ اثبات وجود و یگانگی جوابهای سراسرْ هموار برای مسألهٔ کوشی (۲ـ۳) با استفاده از این خاصیت بی‌رد بودن $T_{\mu\nu}$ بسیار ساده است زیرا در این حالت داریم

$$T_{\mu\nu}=\begin{pmatrix} e & p\\ p & e\end{pmatrix}\qquad e=\frac{1}{2}(|U_t|^2+|U_x|^2)\qquad p=U_t.U_x$$

و بنابراین رابطهٔ $\nabla^\mu T_{\mu\nu}=0$ نتیجه می‌دهد که

$$\begin{cases}-\partial_t e+\partial_x p=0\\ -\partial_t p+\partial_x e=0\end{cases}$$

و در نتیجه $\partial_t^2 e-\partial_x^2 e=0$ یعنی e در یک معادلهٔ موج خطی یک‌بعدی صدق می‌کند و بنابر براوردهای شناخته‌شده برای این معادله می‌توان اندازهٔ e را به‌طور نقطه‌ای کنترل کرد که بلافاصله C^1 بودن موجنگاشت U را نتیجه می‌دهد. با مشتق گرفتن از معادلهٔ موجنگاشت و به‌کار بردن براوردهای انرژی برای معادلهٔ موج حاصل، همواری بیشتر نتیجه می‌شود. بدین ترتیب مسألهٔ همواری سراسری در زمانِ جواب مسألهٔ کوشی برای موجنگاشتها در بعد $m=1$ حل شده است و هیچ‌گونه قید و شرطی برای اندازهٔ داده‌های آغازی در هیچ نُرم تابعی وجود ندارد. خواهیم دید که این امر در ابعاد بالاتر به هیچ‌وجه صادق نیست و در واقع در بعد $m=2$ هنوز هیچ قضیهٔ کلی در مورد همواری سراسری در زمان موجنگاشتها موجود نیست، همچنانکه هیچ مثال ناقض نیز که امکان بروز تکینگی را برای داده‌های هموار اثبات کند پیدا نشده است. لازم به توضیح است که وجود، یگانگی و همواری یک جواب موضعی مسألهٔ کوشی برای کلیهٔ معادله‌های موج نیمه‌خطی با داده‌های آغازیِ به‌قدر کافی هموار، مدتها پیش اثبات شده است [۱۲] و می‌توان نشان داد که هرگاه داده‌های کوشی برای چنین معادله‌ای در زمان $t=0$ تجویز شوند عدد مثبت T^* وجود دارد چنانکه بازهٔ $(0,T^*)$ بزرگترین بازهٔ زمانی است که در داخل آن، جواب معادله هموار باقی می‌ماند. به‌عبارت دیگر T^* که آن‌را *طول عمر* جواب می‌خوانند زمان بروز نخستین تکینه در جواب معادله است. متأسفانه اثباتهای موجود بجز در چند مورد خاص نشان نمی‌دهد که T^* که طبیعتاً به داده‌های آغازی بستگی دارد، دقیقاً به کدام نُرم تابعی این داده‌ها وابسته است و این خود یکی از مسائل حل‌نشده در زمینهٔ معادلات موج غیرخطی است. روشن است که اگر بتوان نشان داد که T^* تنها به *انرژی* داده‌های آغازی بستگی دارد، از آنجا که انرژی کمیتی است پایسته، اثبات وجود جواب موضعی در زمان را می‌توان بینهایت بار تکرار کرد و به یک جواب سراسری دست یافت، ولی در حال حاضر صحت امر فوق در حالت کلی مورد تردید است.

پرسش دیگری که در همین زمینه می‌توان کرد و احتمال دستیابی به جواب آن بیشتر است، این است که اگر انرژی داده‌های آغازی بسیار ناچیز باشد آیا می‌توان وجود یک جواب سراسر هموار را اثبات کرد یا خیر. به‌عبارت دیگر آیا می‌توان عدد کوچک $\varepsilon>0$ را که تنها به خواص هندسی خمینهٔ هدف N بستگی داشته باشد چنان یافت که هرگاه انرژی یک جفت دادهٔ آغازی هموار (U_0,U_1) یعنی

$$E_0=\frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^2}|U_1|^2+|\nabla U_0|^2$$

کمتر از ε باشد آنگاه مسألهٔ کوشی برای موجنگاشت $U:\mathbf{R}^{2,1}\to N$ دارای جوابی یگانه و سراسرْ هموار باشد. از آنجا که این امر برای داده‌های باانرژیِ دقیقاً صفر به‌وضوح صادق است، مسأله اخیر در واقع خوش‌طرح بودن مسألهٔ کوشی دوبعدی برای موجنگاشتها در فضای تابعی $H^1\times L^2$ را در معرض تردید قرار می‌دهد. علی‌رغم تلاش گروهی از متخصصان رشتهٔ معادلات دیفرانسیل، پرسش اخیر نیز تاکنون بی‌پاسخ مانده است.

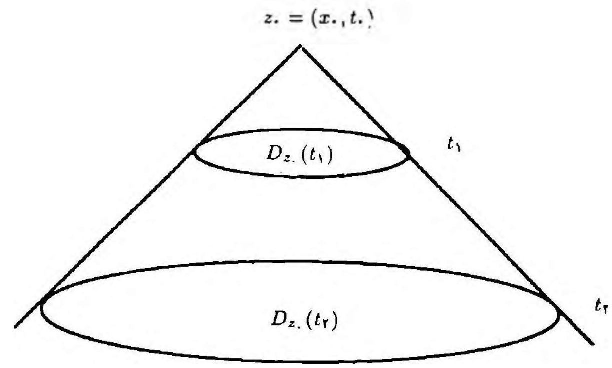
قانون پایستگی انرژیْ صورتی موضعی نیز دارد که با محدود کردن استدلال گذشته به مخروط نوری منتشره از یک نقطهٔ خاص در فضاـ‌زمان به‌دست می‌آید: فرض کنید $z_0=(x_0,t_0)$ نقطه‌ای در فضاـ‌زمان و K_{z_0} مخروط نوریِ گذشته‌سوی منتشره از این نقطه باشد

$$K_{z_0}=\{(x,t)|t\le t_0, |x-x_0|\le t_0-t\}$$

فصل مشترک ابرصفحهٔ $t=T$ با این مخروط را به $D_{z_0}(T)$ نمایش می‌دهیم: $D_{z_0}(T)=\{(x,T)|\,|x-x_0|<t_0-T\}$ و تعریف می‌کنیم

$$E_{z_0}(U,T)=\frac{1}{2}\int_{D_{z_0}(T)}|U_t|^2+|\nabla U|^2dx$$

یعنی $E_{z_0}(U,T)$ انرژی حمل‌شده توسط قرص $D_{z_0}(T)$ است. صورت موضعی قانون پایستگی انرژی چنین است که برای هر t_1 و t_2 با ضابطهٔ $t_2<t_1<t_0$، داریم $E_{z_0}(U,t_1)\le E_{z_0}(U,t_2)$ برای به‌دست آوردن این رابطه کافی است انتگرالگیری پیشین را روی مخروط نوری ناقص مابین t_1 و t_2 انجام دهیم و قضیهٔ گاوس را به‌کار بریم. دیده می‌شود که جملهٔ مرزی ناشی از انتگرالگیری روی سطح جانبی این مخروط همواره نامنفی است و در نتیجه انرژی حمل‌شده توسط قرص بالایی $D_{z_0}(t_1)$ همواره نابیشتر از قرص پایینی $D_{z_0}(t_2)$ خواهد بود. (شکل زیر).



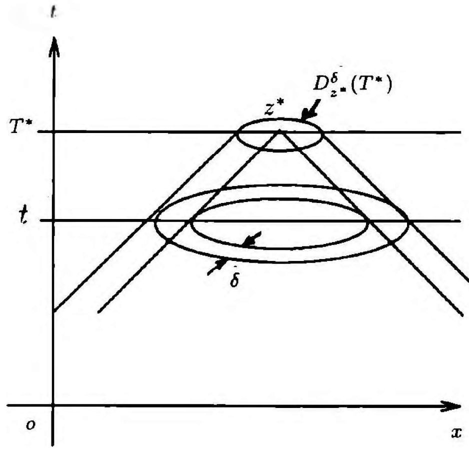
پرسشی که اکنون مطرح می‌گردد این است که اگر t را از پایین به‌سمت $t_\circ$ میل دهیم، آیا انرژی حمل‌شده توسط قرص $D_{z_\circ}(t)$ که براساس مطالب بالا تابعی است ناافزایشی، به‌سمت صفر میل خواهد کرد یا اینکه کران پایین مثبتی خواهد یافت. روشن است که شرط لازم برای همواری نگاشت U در نقطهٔ $z_\circ$ این است که شق دوم که آن‌را پدیدهٔ *تمرکز انرژی* می‌خوانیم روی ندهد.

حال بیایید فرض کنیم در حالتی خاص و با گذاشتن شرطهایی هندسی بر روی خمینهٔ هدف N موفق شده‌ایم برای دو پرسش اخیر پاسخی مثبت بیابیم. به‌عبارت دیگر فرض کنید که تحت شرایطی، دو گزارهٔ زیر برای مسألهٔ کوشی (۲ـ۳) صادق باشند:

۱) داده‌های باانرژی کمتر از $\varepsilon_\circ$، جوابی سراسریِ هموار به‌دست می‌دهند؛

۲) انرژی موضعی در هیچ نقطه‌ای تمرکز نمی‌یابد.

نشان می‌دهیم که با تلفیق دو گزارهٔ بالا به‌سادگی می‌توان وجود و یگانگی جوابی سراسریِ هموار در زمان برای این مسألهٔ کوشی را ثابت کرد، با فرض اینکه داده‌های آغازی دارای انرژی متناهی (و نه لزوماً کوچک) باشند. ابتدا از قضیهٔ وجود و یگانگی جواب موضعی شروع می‌کنیم. بنابر این قضیه، هرگاه داده‌های کوشی در زمان $t=\circ$ تجویز شوند، جوابی یگانه برای مسألهٔ کوشی وجود دارد که تا زمان $t=T^*$ هموار باقی می‌ماند. پس فرض کنید نخستین تکینه در نقطهٔ $z^*=(x^*,T^*)$ روی دهد. بنابر گزارهٔ (۲) داریم $E^*_z(U,t)\xrightarrow[t\nearrow T^*]{}\circ$. پس برای tهای به‌قدر کافی نزدیک T^* داریم $E^*_z(U,t)<\varepsilon_\circ/۲$. از طرف دیگر روشن است که می‌توان قرص $D^*_z(t)$ را فقط کمی بزرگتر کرد، مثلاً به‌اندازهٔ $\delta>\circ$، چنانکه انرژی حمل‌شده توسط قرص بزرگتر $D^\delta_{z^*}(t)$ کمتر از $\varepsilon_\circ$ باشد. این امر ناشی از آن است که انتگرال تعریف‌کنندهٔ انرژی موضعی به‌طور پیوسته به ناحیهٔ انتگرالگیری بستگی دارد. حال از قانون کاهش انرژی موضعی استفاده می‌کنیم. دیده می‌شود که انرژی حمل‌شده توسط قرص $D^\delta_{z^*}(T^*)$ باید کمتر از $\varepsilon_\circ$ باشد. پس بنابر گزارهٔ (۱) اگر از نزدیکی زمان T^* شروع کنیم باید جوابی هموار برای مسأله داشته باشیم، و این مغایر با فرض تکینه بودن z^* است. پس تکینهٔ نخستین نمی‌تواند بروز کند و در نتیجه جواب مسألهٔ کوشی ناگزیر از هموار ماندن در همهٔ زمانهاست.(شکل در ستون مقابل)



حال به شرح شرایطی می‌پردازم که تحت آنها گزاره‌های (۱) و (۲) صادق هستند. اینها نتایجی است که من به اتفاق همکارانم شطح و کریستودولو در سالهای اخیر به‌دست آورده‌ایم. نکته این است که ما تنها با فرض وجود نوعی تقارن در مساله موفق به اثبات این گزاره‌ها شده‌ایم و در نتیجه مسالهٔ موجنگاشتهای غیرمتقارن همچنان حل‌نشده باقی مانده است.

۳. تقارن و یکسانوردی[1]

به‌طور کلی تقارن برای یک نگاشت U مابین دو خمینهٔ M و N به چه معنی است؟ فرض کنید خمینهٔ M دارای گروهی چون G از تبدیلات طولپا باشد که روی آن عمل می‌کنند. G را اصطلاحاً *گروه تقارن* M می‌خوانیم. همین‌طور فرض کنید خمینهٔ N دارای گروه تقارن H باشد. نگاشت پیوستهٔ $U:M\to N$ را *یکسانورد* می‌خوانیم هرگاه همریختی جبری نابدیهی $\rho:G\to H$ موجود باشد چنانکه برای هر $x\in M$ و هر $g\in G$ داشته باشیم

$$U(gx)=\rho(g)U(x)$$

و اگر رابطهٔ بالا به‌ازای همریختی بدیهی $\rho(g)\equiv e$ صادق باشد نگاشت U را *ناوردا* می‌خوانیم. پس نگاشت یکسانورد U مدار یک نقطهٔ x در M تحت گروه G را به مدار نقطهٔ $U(x)$ تحت زیرگروه $\rho(G)$ از H می‌نگارد، و نگاشت U ناورداست اگر روی مدار هر نقطه‌ای در M تحت G مقداری ثابت داشته باشد. روشن است که ناوردا بودن نگاشت U نیازی به متقارن بودن خمینهٔ هدف N ندارد.

به‌عنوان مثالی از یکسانوردی در مورد موجنگاشتها فرض کنید M فضای ۱ + ۲بعدی مینکوفسکی و $G=SO(۲)$ گروه دورانهای فضایی این خمینه باشد. همچنین فرض کنید N کرهٔ دوبعدی $S^۲$ با متریک استاندارد و $H=SO(۳)$ گروه تقارنهای آن باشد. همریختی $\rho_l:G\to H$ را که در آن l یک عدد صحیح است به شکل زیر تعریف می‌کنیم $\rho_l(g)=g^l$. پس $\rho_\circ$ همریختی بدیهی است. می‌پرسیم آیا موجنگاشتی به‌صورت $U:\mathbb{R}^{۲,۱}\to S^۲$ می‌تواند وجود داشته باشد که ρ_lـیکسانورد

1 equivariance

باشد یعنی $U(gx,t) = g^l U(x,t)$ ؛ از آنجا که معادلات موج‌نگاشت یک دستگاه معادلات تحولی[1] است باید دید که آیا این یکسانوردی تحت تحول در زمان پایسته است یا خیر. با استفاده از قوانین پایستگی موج‌نگاشتها می‌توان نشان داد که هرگاه جفت داده‌های کوشی (U_0, U_1) یکسانورد باشند یعنی $U_0(gx) = g^l U_0(x)$ و $U_1(gx) = g^l U_1(x)$ آنگاه U نیز در طول عمر خود یکسانورد باقی خواهد ماند. بنابراین با اتخاذ یک فرض مناسب می‌توان به‌دنبال جوابهای خاص یکسانورد برای مسالهٔ موج‌نگاشت گشت. به‌سادگی دیده می‌شود که فرض مناسب به‌شکل زیر است

$$U(x,t) = e^{Alx/|x|} u(|x|,t) \qquad (۴)$$

که در آن A ماتریس ۳ × ۳ی پادمتقارنی است که بدون کاستن از کلیت موضوع می‌توان آن‌را برابر با

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

گرفت و u برداری است واحد در $\mathbb{R}^3$. با جایگزینی فرض یکسانوردی (۴) در معادلات موج‌نگاشت می‌بینیم که دستگاه مزبور به دستگاه معادلات زیر برای نگاشت u تحویل می‌شود که در آن $r = |x|$.

$$u_{tt} - u_{rr} - \frac{1}{r}u_r + (|u_t|^2 - |u_r|^2)u = \frac{l^2}{r^2}(A^2 u + |Au|^2 u) \qquad (۵)$$

حالت ناوردای مسأله که متناظر با جایگزینی $l = 0$ در معادلهٔ بالاست به حالت *تقارن کروی* شهرت دارد. در این حالت موج‌نگاشت U در زمان t تنها به قدرمطلق بردار مکان x بستگی دارد و نه جهت آن.

با افزودن فرض متقارن بودن داده‌های کوشی، قضایای زیر را در باب همواری سراسری موج‌نگاشتها داریم.

قضیهٔ یک. *فرض کنید خمینهٔ ریمانی N در شرط زیر صدق کند*

$(C1)$ یک کنج سراسری یکامتعامد از میدانهای برداری هموار Ω_A، تعریف‌شده روی N، وجود دارد که توابع ساختاری آن، e^C_{AB} که طبق رابطهٔ زیر تعریف می‌شوند همگی کراندار باشند: $[\Omega_A, \Omega_B] = e^C_{AB}\Omega_C$.

در این‌صورت، $\varepsilon_0 > 0$ وجود دارد چنانکه مسألهٔ کوشی برای موج‌نگاشت U که داده‌های آغازی آن (U_0, U_1) دارای تقارن کروی بوده و انرژی آنها کمتر از ε_0 باشد دارای جوابی یگانه و ناوردا و هموار سراسری است [۳].

توضیح دربارهٔ شرط $(C1)$: از آنجا که وجود چنین کنجی از میدانهای برداری معادل با توازی‌پذیری خمینهٔ N است، ممکن است شرط فوق به‌نظر بسیار محدودکننده برسد ولی درواقع چنین نیست. می‌توان نشان داد که اگر خمینهٔ nبعدی N فشرده باشد می‌توان آن‌را به‌طور کلاً ژئودزیک در خمینهٔ دیگری چون $\bar{N}$ با بعد $2n$ نشاند به‌طوری که $\bar{N}$ در شرط فوق صدق کند. در این‌صورت با استفاده از این حقیقت که ترکیب یک نگاشت همساز با یک نگاشتِ کلاً ژئودزیک، خودنگاشتی است همساز، می‌بینیم که شرط فوق را می‌توان به‌سادگی برقرار کرد.

1. evolution equations

قضیهٔ دو. *فرض کنید خمینهٔ ریمانی N در شرط زیر صدق کند.*

$(C2)$ اگر $K_{AB}(s,p)$ فرم بنیادین دوم متعلق به کرهٔ ژئودزیک به‌شعاع s حول نقطهٔ p در N و λ و Λ به‌ترتیب کوچکترین و بزرگترین مقدار ویژهٔ K_{AB} باشند آنگاه دو ثابت مثبت c و C وجود دارند چنانکه برای هر $s > 0$ و هر $p \in N$ داریم

$$s\lambda \geq c \quad , \quad s\Lambda \leq C(1+s)$$

در این‌صورت برای جواب مسألهٔ کوشی برای موج‌نگاشت U که داده‌های آغازی آن (U_0,U_1) دارای تقارن کروی باشند امکان تمرکز انرژی موضعی در یک نقطه وجود ندارد [۳].

توضیح دربارهٔ شرط $(C2)$: دیده می‌شود که شرط $(C2)$ صادق است هرگاه خمینهٔ N همه‌جا دارای انحنای [خمیدگی] نامثبت و کراندار از پایین باشد. ولی این شرط به‌خودی خود چیزی در مورد انحنا نمی‌گوید. چراکه فرم بنیادین دوم تنها به مشتقات اول متریک ریمانی بستگی دارد. بنابر نیمهٔ اول این شرط، فرم بنیادین دوم K_{AB} مثبت و معین است و بنابراین خمینهٔ N دارای نقطه‌های مزدوج نیست. در صورت لزوم، با صعود به خمینهٔ پوششی کامل $\tilde{N}$ برای N می‌توان نقاط برشی را نیز حذف نمود. در این‌صورت نگاشت نمایی $\exp_p$ در هر نقطهٔ p یک وابربختی [دیفئومورفیسم] خواهد بود و $(C2)$ بیانگر این است که خمینهٔ $\tilde{N}$ محدب ژئودزیکی است. لازم به یادآوری است که تحدب خمینهٔ هدف شرطی کافی برای همواری نگاشتهای همساز، یعنی معادل بیضوی مسالهٔ موردبحث ماست.

قضیهٔ سه. *فرض کنید خمینهٔ ریمانی N^n دارای تقارن دورانی است، بدین معنی که دستگاه مختصات سراسری $(\varphi,\theta) \in \mathbb{R}\times S^{n-1}$ روی N وجود دارد چنانکه عنصر طول N در این مختصات به‌شکل زیر است*

$$ds^2 = d\varphi^2 + G^2(\varphi)\,\gamma_{AB}\,d\theta^A d\theta^B$$

که در آن γ_{AB} متریک استاندارد برای کرهٔ S^{n-1} است و G تابعی است هموار و فرد، $G(0)=0$ و $G'(0)=1$. در این‌صورت، اولاً $\varepsilon_0 > 0$ وجود دارد چنانکه مسألهٔ کوشی برای موج‌نگاشت U که داده‌های آغازی آن (U_0,U_1)، l-یکسانورد باشد و انرژی آغازین آن کمتر از ε_0 باشد، دارای جوابی l-یکسانورد یگانه و هموار سراسری است. ثانیاً هرگاه تابع G در شرط زیر صدق کند جواب مسألهٔ کوشی برای U که داده‌های آغازی آن (U_0,U_1)، l-یکسانورد بوده و انرژی آنها متناهی باشد هرگز دچار تمرکز انرژی موضعی نخواهد شد [۱۲، ۱۳، ۱۴].

$$\text{شرط } (G): \quad \forall s>0, \quad G(s) + sG'(s) > 0$$

توضیح دربارهٔ شرط (G): این شرط که نخستین بار توسط گریلاکیس [۷] عنوان شد از شرط تحدب ژئودزیک ضعیف‌تر است چراکه هرگاه خمینهٔ ریمانی N دارای تقارن دورانی باشد تحدب آن معادل با این است که $G'(s) > 0$، ولی خمینهٔ N می‌تواند محدب نباشد و در عین حال در شرط گریلاکیس صدق کند. قضیهٔ فوق نشان می‌دهد که با فرض این‌گونه تقارنها تحدب ژئودزیک شرط لازم برای همواری سراسری نیست.

۴. بروز تکینه

مسألهٔ موجنگاشت در ابعاد بالاتر از دو به اصطلاح «فرابحرانی» است و نمی‌توان انتظار داشت که مسائل کوشی در حالت کلی دارای جواب سراسرْ هموار باشند. مثال ناقض زیر نشان می‌دهد که با شروع کردن از یک دادهٔ آغازی کاملاً هموار در مدت زمانی متناهی می‌توان تکینه‌ای برای موجنگاشت $U : \mathbb{R}^{3,1} \to S^3$ ایجاد کرد ([۱۱] و [۱۵]). دستگاه معادلات چنین موجنگاشتی را با استفاده از مختصات نشانده در $\mathbf{R}^4$ می‌توان چنین نوشت

$$\square U + (|U_t|^2 - |\nabla U|^2)u = 0, |U| = 1, U \in \mathbf{R}^4$$

حال کافی است شرایط زیر را در زمان $t = -1$ در نظر بگیریم

$$\begin{cases} U(x,-1) = \phi(x) \\ U_t(x,-1) = x^i \partial_i \phi(x) \end{cases}$$

که در آن $\phi : \mathbb{R}^3 \to S^3 \subset \mathbb{R}^4$ به‌شکل زیر است

$$\phi(x) = \left(\frac{2x}{1+|x|^2}, \frac{1-|x|^2}{1+|x|^2} \right)$$

به‌سادگی می‌توان نشان داد که جواب این مسألهٔ کوشی عبارت‌است از

$$U(x,t) = \phi(\frac{x}{-t})$$

و بنابراین U در زمان $t = 0$ دچار تکینگی می‌شود بدین صورت که اگر $t \nearrow 0$، مشتقات فضایی U در $x = 0$ به‌سمت بینهایت میل می‌کنند.

نگاشتی از فضای مینکوفسکی با مختصات (x,t) را که در واقع تنها به $\frac{x}{t}$ بستگی داشته باشد *خودمانند*[1] می‌خوانیم. مثال ناقض فوق را می‌توان به قضیهٔ زیر تعمیم داد.

قضیهٔ چهار. *فرض‌کنید خمینهٔ ریمانی سه‌بعدی N دارای عنصر طولی به‌شکل زیر باشد*

$$ds^2 = d\varphi^2 + G^2(\varphi)\, \partial_{AB}\; d\theta^A d\theta^B$$

که در آن γ_{AB} متریک استاندارد S^2 و G تابعی است هموار و فرد، $G(0) = 0$ و $G'(0) = 1$. همچنین فرض‌کنید عدد $R > 0$ وجود دارد چنانکه $G''(R) \neq 0$ و $G'(R) = 0$. در این‌صورت مسألهٔ کوشی برای موجنگاشت $U : \mathbb{R}^{3,1} \to N$ دارای خانواده‌ای از جوابهاست که در مدت زمان متناهی دچار تکینگی از نوع خودمانند می‌گردند[۱۳].

اثبات قضیهٔ فوق بدین شکل است که قرار می‌دهیم $w = \frac{x}{|x|}$. بنابراین $w \in S^2$ و حال فرض زیر را برای موجنگاشتی چون $U : (\varphi, \theta) : \mathbb{R}^{3,1} \to N$ در نظر می‌گیریم

$$\varphi = \varphi(|x|, t), \qquad \theta = \theta(\omega)$$

1. self-similar

سیستم معادلهٔ موجنگاشت حکم می‌کند که θ به‌عنوان نگاشتی از S^2 به S^2 یک نگاشت چندجمله‌ای همساز باشد، یعنی تحدید نگاشتی باشد از $\mathbb{R}^3$ به $\mathbf{R}^3$ که هر مؤلفه آن یک چندجمله‌ای همگن همساز از درجهٔ l باشد [۸]. چنین نگاشتی دارای چگالی انرژی ثابت است یعنی $|\nabla_\omega \theta|^2 \equiv l(l+1)$. از طرف دیگر تابع φ باید در معادلهٔ زیر صدق کند

$$\varphi_{tt} - \varphi_{rr} - \frac{2}{r}\varphi_r + \frac{k}{r^2} f(\varphi) = 0$$

که در آن $k = l(l+1)$ و $f(\varphi) = G(\varphi)G'(\varphi)$.

حال فرض می‌کنیم نگاشت φ خودشبیه باشد یعنی $\varphi = \varphi(r/t)$. در این‌صورت φ جواب یک معادلهٔ دیفرانسیل عادی خواهد بود $\varphi'' + \frac{2}{\rho}\varphi' - \frac{k}{\rho^2(1-\rho^2)} f(\varphi) = 0$.این معادله دو جواب بدیهی دارد: $\varphi \equiv 0$ و $\varphi \equiv R$. به‌سادگی دیده می‌شود که یک جواب هموار نابدیهی برای این معادله باید دارای این مقادیر مرزی باشد: $\varphi(1) = R$ و $\varphi(0) = 0$. اثبات وجود چنین جوابی با روش مستقیم وردشی و از طریق مینیمم‌سازی تابعکی صورت می‌گیرد که معادلهٔ فوق، معادلهٔ اویلر-لاگرانژ برای نقاط بحرانی آن باشد

$$E[\psi] = \frac{1}{2} \int_0^1 \psi'^2 + \frac{k}{\rho^2(1-\rho^2)} G^2(\varphi) \qquad \rho^2 d\rho$$

ولی به‌دلیل وجود تکینگی $\rho = 1$ در مخرج ابتدا «بازبهنجارش[1]» تابعک مزبور لازم می‌آید

$$\bar{E}[\psi] = \frac{1}{2} \int_0^1 \psi'^2 + \frac{k}{\rho^2(1-\rho^2)} [G^2(\psi) - G^2(R)] \qquad \rho^2 ds$$

نشان داده می‌شود که $\bar{E}$ مقدار مینیمم خود را روی فضای تابعی H^1 با مقادیر مرزی داده‌شده اختیار می‌کند. سپس با استفاده از اصل ماکسیمم همواری جواب را به اثبات می‌رسانیم.

به‌همین طریق جستجو برای یافتن موجنگاشتهای خودشبیه در ابعاد بالاتر از سه، $m \geq 4$، **منجر به حل معادلهٔ زیر می‌شود**

$$\theta'' + \left(\frac{m-1}{\rho} + \frac{(m-3)\rho}{1-\rho^2} \right) \theta' - \frac{k}{\rho^2(1-\rho^2)} f(\theta) = 0 \tag{6}$$

دیده می‌شود که **برای $m \neq 3$ مساله پیچیده‌تر از سابق است چراکه از روی** معادله نمی‌توان مقدار θ را به‌ازای $\rho = 1$ حدس زد بلکه تنها یک شرط لازم برای همواری به‌دست می‌آید: $(m-3)\theta'(1) = kf(\theta(1))$.

همین‌طور با مشتق‌گیری متوالی از این معادله و جایگزینی $\rho = 1$ شرطهای لازم دیگری برای همواری θ می‌توان به‌دست آورد. دیده می‌شود که هرگاه m عددی فرد باشد شرطهای فوق‌الذکر یک دستگاه جبری بسته برای مقادیر θ و مشتقات آن تا مرتبهٔ $\frac{m-3}{2}$ در نقطهٔ $\rho = 1$ به‌دست می‌دهند که برای kهای به‌اندازهٔ کافی بزرگ دارای جواب است، و بدین ترتیب با استفاده از روشهای کلاسیک نظریهٔ معادلات دیفرانسیل عادی می‌توان وجود جوابی هموار و نابدیهی برای معادلهٔ بالا را ثابت کرد [۲]. اما اگر m زوج باشد این

1 renormalization

روش دیگر کارساز نیست. در واقع برای $m = 2$ از قبل می‌دانیم که معادلهٔ (۶) دارای جواب دلخواه مانیست (چنانکه گفتیم در بعد $m = 2$ هیچ مثالی از بروز تکینه برای موج‌نگاشتها نداریم.)

حال می‌خواهم چندکلمه‌ای دربارهٔ حالت $m = 4$ این مسأله و برنامه‌ای که برای حل‌کردن آن دارم عنوان کنم. معادلهٔ (۶) را می‌توان به‌صورت یک دستگاه دینامیکی هموار در $\mathbf{R}^3$ درآورد: ابتدا آن‌را به‌شکل یک دستگاه معادلات درجهٔ اول درمی‌آوریم

$$\begin{cases} \theta' = \eta \\ \eta' = \frac{k}{\rho^2(1-\rho^2)} f(\theta) - \frac{m-1-2\rho^2}{\rho(1-\rho^2)}\eta \\ \rho' = 1 \end{cases}$$

و سپس با یک تعویض متغیرّ تکینه‌های $\rho = 0$ و $\rho = 1$ را رفع می‌کنیم (ترفند کانلی)

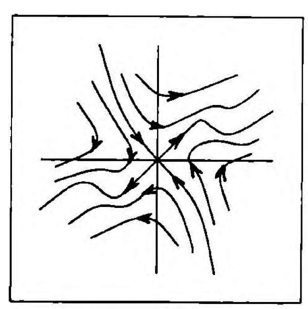
$$\begin{cases} \dot\theta = \eta\rho(1-\rho^2) \\ \dot\eta = \frac{k}{\rho} f(\theta) - (m-1-2\rho^2)\eta \\ \dot\rho = \rho(1-\rho^2) \end{cases}$$

که در اینجا مشتقگیری نسبت به متغیر جدید t است چنانکه $\frac{d}{dt} = \rho(1-\rho^2)\frac{d}{d\rho}$. بالاخره با قراردادن $x = \eta\rho$ از دست آخرین مزاحم در مخرج نیز خلاص می‌شویم

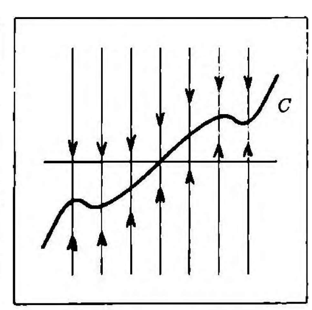
$$\begin{cases} \dot\theta = x(1-\rho^2) \\ \dot x = kf(\theta) + x(\rho^2 - m + 2) \\ \dot\rho = \rho(1-\rho^2) \end{cases}$$

دستگاه فوق دارای سه صفحهٔ ناوردای $\rho = -1$، $\rho = 0$ و $\rho = 1$ است و کلاً نسبت به انعکاس در صفحهٔ $\rho = 0$ نیز متقارن است. بنابراین کافی است توجه خود را به بازهٔ $0 \le \rho \le 1$ محدود کنیم. حال m را مساوی ۴ قرار می‌دهیم. در این‌صورت تحدید نمای فاز[1] این دستگاه به صفحات ناوردای $\rho = 0$ و $\rho = 1$ به‌شکل زیر است

$$\rho = 0 \begin{cases} \dot\theta = x \\ \dot x = kf(\theta) - 2x \end{cases} \qquad \rho = 1 \begin{cases} \dot\theta = 0 \\ \dot x = kf(\theta) - x \end{cases}$$



$\rho = 0$



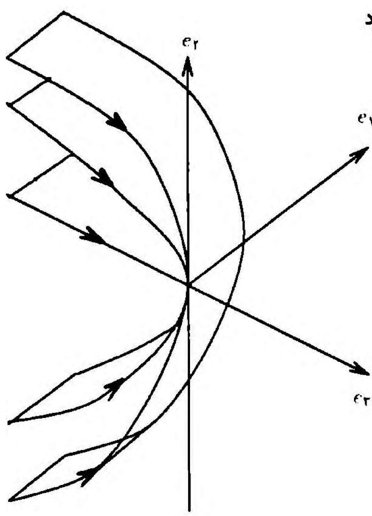
$\rho = 1$

1. phase potrait

می‌بینیم که جواب موردنظر برای معادلهٔ (۶) در اینجا یک اتصال هتروکلینیک [دگرتخت] از نقطهٔ $(0,0,0)$ روی صفحهٔ $\rho = 0$ به نقطه‌ای نامعلوم روی خم C است با معادلهٔ $x = kf(\theta)$ در صفحهٔ $\rho = 1$. نکته اینجاست که خم C برای دستگاه فوق کاملاً جاذب است یعنی کلیهٔ مسیرهایی که صفحهٔ $\rho = 0$ را ترک می‌کنند سرانجام روی C خواهند نشست ولی با نگاه‌کردن به مقادیر ویژهٔ قسمت خطی سیستم در $\rho = 1$ می‌بینیم که اغلب این مسیرها با مماس‌شدن بر صفحهٔ $\rho = 1$ به خم C می‌رسند و در نتیجه به‌عنوان جواب معادلهٔ اصلی ما در نقطهٔ $\rho = 1$ دارای تکینه‌اند. این مقادیر ویژه و بردارهای ویژهٔ متناظر با آنها در نقطهٔ $(a, kf(a), 1)$ به‌شرح زیرند

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 0 & e_1 &= (1, kf'(a), 0) \\ \lambda_2 &= -1 & e_2 &= (0, 1, 0) \\ \lambda_3 &= -2 & e_3 &= (-kf(a), kf(a)(kf'(a)+2), -1) \end{aligned}$$

و بنابراین تصویر فاز قسمت خطی دستگاه در همسایگی این نقطه به شکل زیر خواهد بود



$\rho = 1$

و از آنجا که $\frac{1}{2} = \frac{\lambda_2}{\lambda_3}$، در طول کلیهٔ مسیرهای منتهی به نقطهٔ $(a, kf(a), 1)$، بجز یکی، داریم $x \sim C\sqrt{1-\rho}$ و برای مسیر استثنایی داریم $x \sim C(1-\rho)$. بنابراین، جواب موردنظر ما جزء مسیرهای استثنایی است. برای مجزا کردن این مسیرهای استثنایی از سایر مسیرها، به‌جای x مختص دیگری اختیار می‌کنیم که در واقع یک همسایگی کوچک خم C را می‌شکافد. قرار می‌دهیم

$$v = \frac{kf(\theta) - x}{1-\rho^2}$$

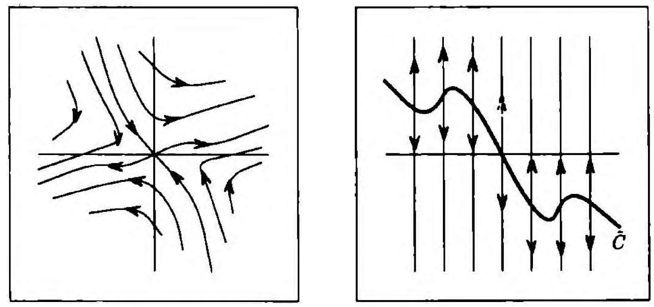
و در مختصات جدید داریم

$$\begin{cases} \dot\theta = [kf(\theta) - v(1-\rho^2)](1-\rho^2) \\ \dot v = (2\rho^2 - 1)v + (kf'(\theta) + 1)[kf(\theta) - v(1-\rho^2)] \\ \dot\rho = \rho(1-\rho^2) \end{cases}$$

تحدید نمای فاز این دستگاه به صفحات ناوردای $\rho = ۰$ و $\rho = ۱$ به‌گونهٔ زیر است

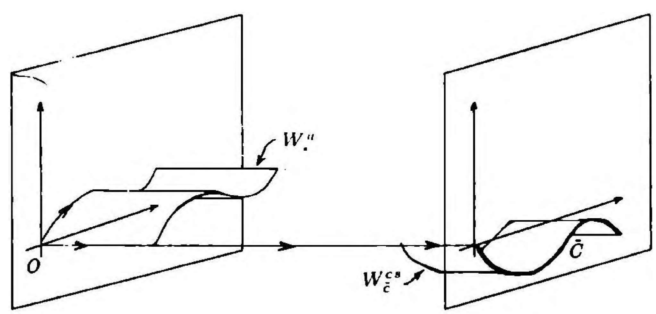
$$\rho = ۰ \begin{cases} \dot{\theta} = kf(\theta) - v \\ \dot{v} = -v + (kf'(\theta) + ۱)(kf(\theta) - \dot{v}) \end{cases}$$

$$\rho = ۱ \begin{cases} \dot{\theta} = ۰ \\ \dot{v} = v + (kf'(\theta) + ۱)kf(\theta) \end{cases}$$



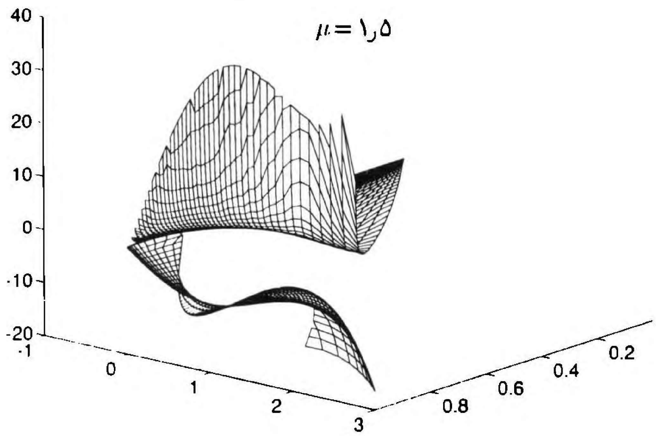
$\rho = ۰$ $\rho = ۱$

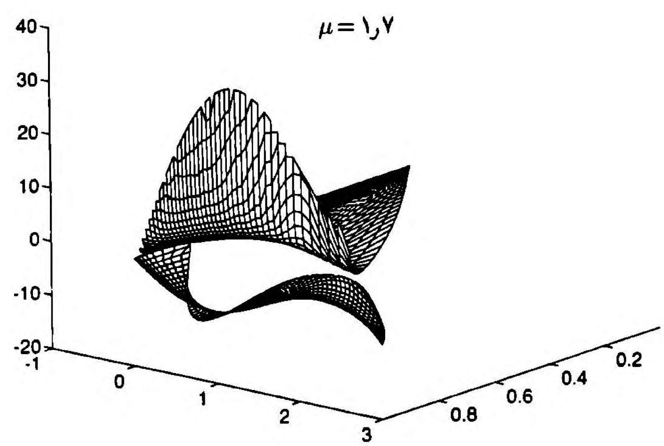
و بنابراین دیده می‌شود که در مختصات جدید نقاط واقع بر خم ناوردای $\bar{C}$ نقاط زینی هستند و نه چاهکی. حال می‌توانیم برنامهٔ پیشین خود را مبنی بر یافتن اتصالی هتروکلینیک بین نقطهٔ $(۰,۰,۰)$ و نقطه‌ای نامعلوم روی خم $\bar{C}$ به‌اجرا گذاریم: با محاسبهٔ مقادیر ویژهٔ قسمت خطی دستگاه حول $\rho = ۰$ و $\rho = ۱$ می‌بینیم که یک خمینهٔ ناپایدار دوبعدی $W_\circ^u$ برای نقطهٔ $(۰,۰,۰)$ و یک خمینهٔ مرکزی-پایدار دوبعدی $W_{\bar{C}}^{cs}$ برای خم $\bar{C}$ می‌توان ساخت و وجود اتصال هتروکلینیک موردنظر معادل با این است که دو رویهٔ مزبور یکدیگر را در طول مسیری (بجز مسیر $\theta = v = ۰$ که متناظر با جواب بدیهی معادله است) قطع کنند.

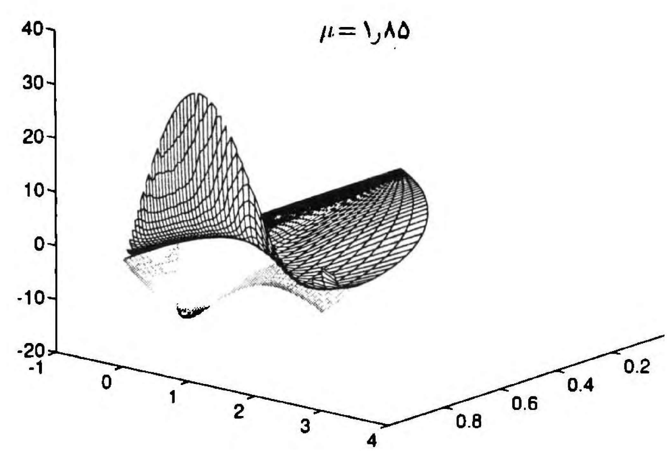


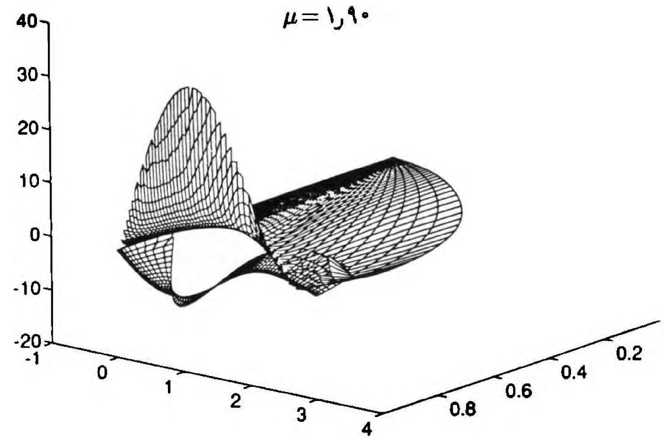
$$W^{cs} \begin{cases} \lambda_۱ = ۱ \\ \lambda_۲ = ۰ \\ \lambda_۳ = -۲ \end{cases} \qquad W^u \begin{cases} \lambda_۱ = -l - ۲ \\ \lambda_۲ = l \\ \lambda_۳ = ۱ \end{cases}$$

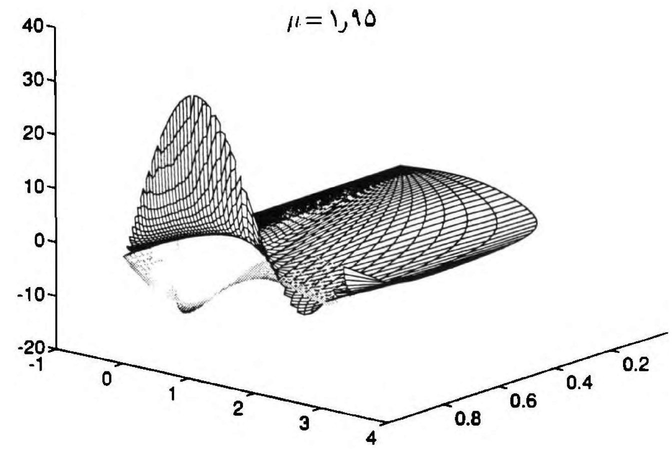
در پایان، نتایج آزمایشهای عددیِ انجام‌گرفته روی دستگاه بالا را به‌اطلاع خوانندگان می‌رسانیم. برای این آزمایشها جملهٔ غیرخطی f را به این شکل در نظر گرفته‌ایم: $f(x) = x - \mu x^۳ + x^۵$ و پارامتر μ را بین ۱٫۵ تا ۲ تغییر داده‌ایم. همچنین $l = ۱$ و در نتیجه $k = ۲$ اختیار شده‌اند. محاسبات عددی مربوطه و رسم رویه‌ها در سه بعد همگی توسط برنامهٔ MATLAB انجام گرفته‌اند. دیده می‌شود که برای $\mu < ۱٫۸$ دو خمینهٔ ناوردای فوق‌الذکر یکدیگر را اصلاً قطع نمی‌کنند و برای $\mu > ۱٫۹$ این دو خمینه یکدیگر را در دو جا قطع می‌کنند که متناظر با وجود دو جواب نابدیهی برای معادلهٔ (۶) است. شکل رویه‌ها به‌ازای چند مقدار μ در زیر و در صفحهٔ بعد دیده می‌شود.

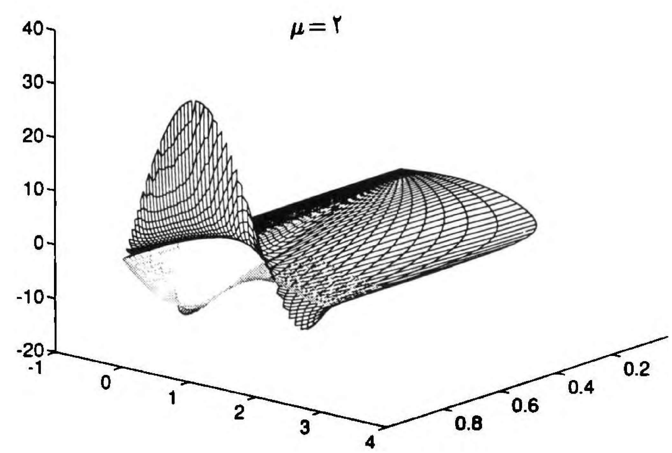












مراجع

1. B.K. Berger, P. Chrusciel, and V. Moncrief, "On asymptotically flat space-times with G_2-invariant Cauchy surfaces", submitted to *Annals of Physics*.
2. T. Cazenave, J. Shatah, and A. Tahvildar-Zadeh, "Harmonic maps of the hyperbolic space and development of singularities in wave maps and Yang-Mills fields", *manuscript in preparation* (1995).
3. D. Christodoulou and A. Tahvildar-Zadeh, "On the regularity of spherically symmetric wave maps", *Comm. Pure Appl. Math.*, **46** (1993) 1041-1091.
4. J. Eells and L. Lemaire, "A report on harmonic maps", *Bull. London Math. Soc.*, **10** (1978) 1-68.
5. J. Eells and L. Lemaire, "Another report on harmonic maps", *Bull. London Math. Soc.*, **20** (1988) 382-524.
6. M. Gell-Mann and M. Levy, "The axial vector current in beta decay", *Nuovo Cimento*, **16** (1960) 705-726.
7. M. Grillakis, "Classical solutions for the equivariant wave map in 1+2- dimensions", *preprint* (1991).
8. H. Karcher and J.C. Wood, "Nonexistence results and growth properties for harmonic maps & forms", *J. Reine Angew. Math.*, **353** (1989) 165-180.
9. T. Kato, "Nonlinear equations of evolution in Banach spaces", *Proc. Sympos. Pure Math.*, (2) **45** (1986) 9-23.
10. C.W. Misner, "Harmonic maps as models for physical theories", *Phys. Rev. D.*, (12) **18** (1978) 4510-4524.
11. J. Shatah, "Weak solutions and development of singularities in the $SU(2)\sigma$-model", *Comm. Pure. Appl. Math.*, **41** (1988) 459-469.
12. J. Shatah and A. Tahvildar-Zadeh, "Regularity of harmonic maps from the Minkowski space into rotationally symmetric manifolds", *Comm. Pure Appl. Math.*, **XLV** (1992) 947-971.
13. J. Shatah and A. Tahvildar-Zadeh, "On the Cauchy problem for equivariant wave maps", *Comm. Pure Appl. Math*, **47** (1993) 719-754.
14. J. Shatah and A. Tahvildar-Zadeh, "On the stability of stationary wave maps", *preprint* (1994).
15. N. Turok and D. Spergel, "Global texture and the microwave background", *Phys. Rev. Lett.*, (23) **64** (1990) 2736-2739.

* * * * * *

* ع. شادی تحویلدارزاده، دانشگاه پرینستون، آمریکا