از مثلث تا خمینه*

شینگ شن‌چرن*
ترجمهٔ محمد جلوداری‌ممقانی

۱. هندسه. فکر می‌کنم که انتظار می‌رود هرچه دربارهٔ هندسه می‌دانم بگویم؛ هندسه چیست، پیشرفت آن درطی سده‌ها چگونه بوده است، مسائل جاری آن چیست، و درصورت امکان، نگاهی اجمالی به‌آیندهٔ آن بیاندازم. پرسش اول پاسخ روشن و صریحی ندارد. معنی واژهٔ هندسه برحسب زمان و یا شخصی که از آن سخن می‌گوید تغییرمی‌کند. از دیدگاه اقلیدس، هندسه مجموعه‌ای است از احکام منطقی که از چند اصل نتیجه می‌شوند. روشن است که این دیدگاه با توجه به افقهای همواره درحال گسترش هندسه کافی نیست. از این‌رو در ۱۹۳۲، وبلن[1] و هنری وایتهد[2] هندسه‌دانان بزرگ اظهار داشتند "شاخه‌ای از ریاضیات هندسه نامیده می‌شود زیرا این نام درنظر تعداد زیادی از افراد ذیصلاحیت از لحاظ احساسی و سنتی نام مناسبی است" [۱]. این عقیده را الی کارتان، هندسه‌دان بزرگ فرانسوی نیز با حرارت تأئیدکرده است [۲]. ریاضیدان بزرگ آمریکایی جورج بیرکاف[3] که خود آنالیزدان بود، گفته است "این واهمهٔ پنهانی وجود دارد که ممکن است سرانجام معلوم شود هندسه چیزی نیست مگر پیرایهٔ شهودی پرزرق و برق آنالیز" [۳]. اخیراً دوست من آندره ویل می‌گفت "شاید جنبه‌های روانشناختی شهود هندسی واقعی هرگز روشن نشوند. در گذشته، معنای این شهود، نیروی تجسم درفضای سه‌بعدی بود. اکنون که فضاهای با بعد بیشتر مسائل مقدماتیتر را به‌کنار زده‌اند، این تجسم در بهترین حالت جزئی یا نمادی است. به‌نظر می‌رسدکه نوعی تصور لمس‌کردن نیز تا حدی درکار باشد" [۴].

در اینجا شاید بهتر باشدکه کاری به‌این مطالب نداشته باشیم و به‌برخی مباحث مشخص بپردازیم.

1. O. Veblen 2. J. H. C. Whitehead 3. George Birkhoff

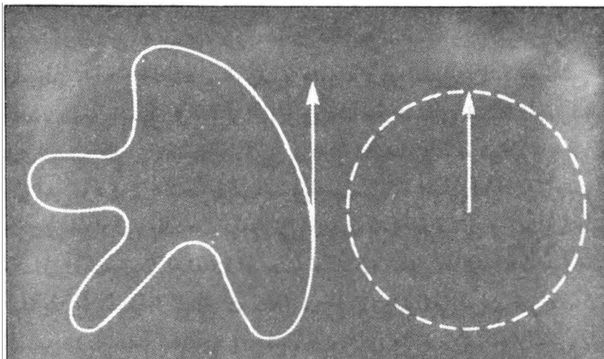
۲. مثلث. مثلث یکی ازساده‌ترین اشکال هندسی است که ویژگیهای بسیار زیبایی دارد. مثلاً مثلث تنها یك دایرهٔ محیطی و تنها یك دایرهٔ محاطی داخلی دارد. در اوایل این‌قرن، تقریباً هرریاضیدانی قضیهٔ دایرهٔ نه نقطه را می‌دانست. اما شگفت‌انگیزترین ویژگی مثلث بامجموع زاویه‌هایش ارتباط پیدا می‌کند. اقلیدس می‌گوید که این مجموع برابر است با 180° یا π رادیان، و این حکم را از اصل بحث‌انگیزی معروف به‌اصل توازی نتیجه می‌گیرد. تلاشهایی که برای اجتناب از این‌اصل می‌شد، به‌شکست انجامید. نتیجهٔ این تلاشها کشف هندسه‌های نااقلیدسی بود که در آنها، مجموع زاویه‌های مثلث برحسب اینکه هندسه هذلولوی یا بیضوی باشد کوچکتر یا بزرگتر از π است. کشف هندسهٔ نااقلیدسی هذلولوی، توسط گاوس، یوهان بویویی و لباچفسکی در سدهٔ هیجدهم، یکی از درخشانترین فصلهای تاریخ تفکر آدمی است.

تعمیم مثلث، یك n ضلعی، یعنی یك چندضلعی با n ضلع است. با تقسیم n ضلعی به $n-2$ مثلث مشاهده می‌کنیم که مجموع زاویه‌های آن $(n-2)\pi$ است. بهتر است مجموع زاویه‌های خارجی این اشکال را نیز اندازه بگیریم! این مجموع، به‌ازای همهٔ n ضلعیها، ازجمله مثلثها، برابر است با 2π.

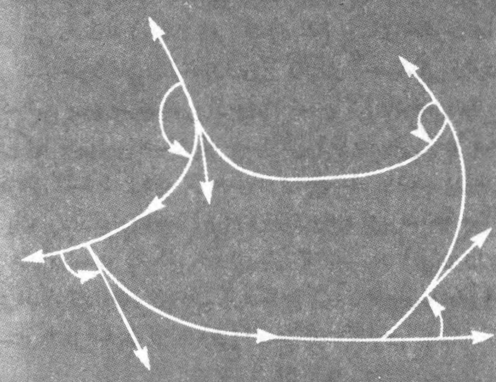
۳. خمهای مسطح؛ شاخص دوران[1] و هموتوپی منظم[2]. با استفاده از حساب دیفرانسیل و انتگرال می‌توان خمهای هموار، یعنی خمهایی را که درهرنقطه خط مماسی دارندکه به‌طور پیوسته تغییر می‌کند، و خمهای هموار بسته را مطالعه کرد. هنگامی که نقطه‌ای روی خم هموار (جهتدار) بسته‌ای چون C یك‌دور بزند، خطوط ماربر نقطهٔ ثابتی چون O و موازی با خطوط مماس بر C به‌اندازهٔ $2\pi n$ رادیان یا به تعداد n دور حول O دوران می‌کنند. عدد صحیح n، شاخص دوران C نامیده می‌شود (ر.ك. شکل ۱) قضیهٔ مشهوری درهندسهٔ دیفرانسیل می‌گویدکه اگر C خمی ساده باشد، یعنی اگر خود را قطع نکند، آنگاه $n=\pm 1$.

روشن است که باید قضیه‌ای، قضایای مجموع زاویه‌های خارجی یك n ضلعی و شاخص دوران یك خم سادهٔ بستهٔ هموار را به‌هم پیوند دهد. به‌این قضیه می‌توان با مطالعهٔ ردهٔ وسیعتری از خمها موسوم به خمهای سادهٔ بستهٔ قطعه‌ـقطعه هموار دست یافت. شاخص دوران خمی از این نوع را می‌توان به روشی طبیعی با چرخاندن خط مماس دریك گوشه، به‌اندازهٔ زاویهٔ خارجی مربوط به آن گوشه، تعریف کرد (ر.ك. شکل ۲). در این صورت، قضیهٔ شاخص دوران فوق، در مورد خمهای سادهٔ بستهٔ قطعه‌ـقطعه هموار نیز معتبر است. درحالت خاص n ضلعی، حاصل از قطعه خطهای مستقیم، این‌قضیه به‌این گزاره که مجموع زاویه‌های خارجی n ضلعی مساوی با 2π است، بدل می‌شود.

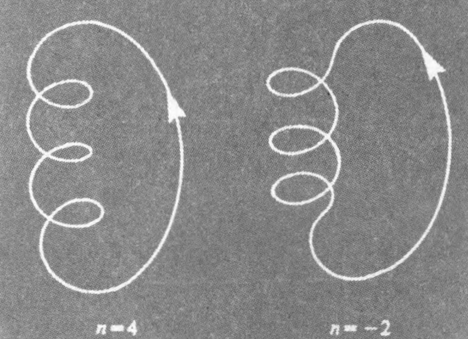
1. rotation index 2. regular homotopy



شکل ۱



شکل ۲



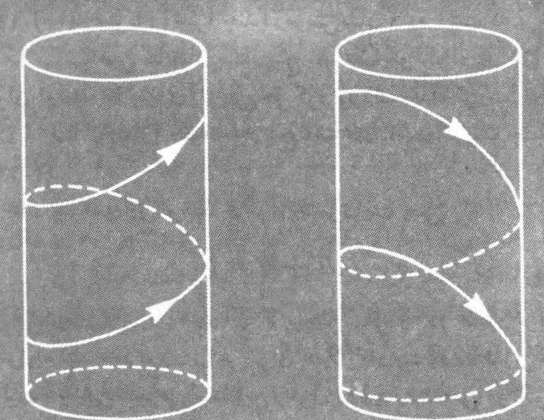
شکل ۳

این قضیه را از این هم بیشتر می‌توان تعمیم داد. به‌جای خمهای سادهٔ بسته، می‌توانیم خمهایی را درنظر بگیریم که خود را قطع می‌کنند. به‌هر نقطهٔ نوعی تقاطع خم با خودش می‌توان یك علامت نسبت داد. دراین‌صورت، اگر خم به‌طور مناسبی جهت‌دار شده باشد، شاخص دوران آن مساوی است با یك به‌علاوهٔ مجموع جبری تعداد نقاط تقاطع خم با خودش (ر.ك. شکل ۳). مثلاً شاخص دوران شکل 8، صفر است.

یك مفهوم بنیادی در هندسه، یا به‌طورکلی در ریاضیات، تغییرشکل[1] یا هموتوپی است. دوخم هموار بسته را هموتوپ منظم گویند هرگاه یکی را بتوان ازطریق یك‌خانواده از خمهای هموار بسته به‌شکل دیگری درآورد. چون شاخص دوران یك‌عدد صحیح است، و در این خانواده ازخمها به‌طور پیوسته تغییر می‌کند، باید ثابت بماند؛ یعنی، هنگامی که خم منظماً تغییرشکل می‌یابد، شاخص دوران مقدار واحدی را اختیار می‌کند. قضیهٔ مهمی از گراوشتاین-ویتنی[1] می‌گوید که عکس این موضوع نیز درست است [۵]: دوخم بستهٔ هموار با یك‌شاخص دوران، هموتوپ منظم هستند.

در ریاضیات مرسوم است که برای مطالعهٔ خمهای بستهٔ هموار درصفحه، صرفه را در این می‌بینند که تمام خمها را درنظر بگیرند و آنها را به‌رده‌هایی تقسیم کنند؛ رده‌های هموتوپی منظم مثالی از این نوع‌اند. این ممکن است یکی از تفاوتهای اصولی روش‌شناختی میان علوم نظری و علوم تجربی باشد؛ زیرا درعلوم تجربی کاربرد چنین شیوه‌ای غیرعملی است. قضیهٔ گراوشتاین-ویتنی می‌گوید که تنها ناوردای[2] یك ردهٔ هموتوپی منظم، شاخص دوران آن است.

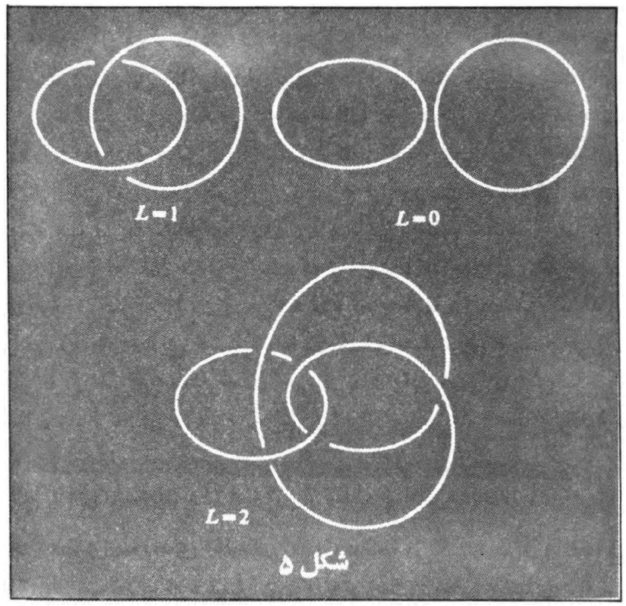
۴. فضای سه‌بعدی اقلیدسی. از صفحه می‌گذریم و به فضای اقلیدسی سه‌بعدی که هندسهٔ آن پرمایه‌تر است وخصوصیتهای متفاوتی دارد، می‌پردازیم. شاید زیباترین خم فضایی که درصفحه‌ای قرار ندارد، مارپیچ مستدیر[3] باشد. این خم دارای خمیدگی[4] و تاب[5] ثابت است و تنها خمی است که بینهایت حرکت صلب را می‌پذیرد [۱]. میان مارپیچهای راستگرد و چپگرد (ر.ك. شکل ۴) یك تفاوت اساسی وجود دارد که ناشی از علامت تاب آنهاست. یك مارپیچ راستگرد با هیچ مارپیچ چپگردی، جز از راه انعکاس آینه‌ای، نمی‌تواند قابل انطباق[6] باشد. درمکانیك، مارپیچها نقش مهمی بازی می‌کنند. از دیدگاه هندسی، اینکه الگوی کریك-واتسن[7] از مولکول DNA یك‌مارپیچ مضاعف است، شاید کاملاً تصادفی نباشد. مارپیچ مضاعف ویژگیهای هندسی جالبی دارد. مثلاً از وصل کردن سروته هر یك از این مارپیچها با یك پاره‌خط یا یك‌کمان، دوخم



شکل ۴

1. deformation

1. Graustein-Whitney 2. invariant 3. circular helix
4. curvature 5. torsion 6. congruent
7. Crick-Watson



شکل ۵

بسته حاصل می‌شود. در فضای سه‌بعدی این خمها دارای یک عدد پیوندی[1] هستند (ر. ک. شکل ۵).

مسألهٔ بحث‌انگیزی که اخیراً در زیست‌شیمی توسط دوتن از ریاضیدانان، ویلیام پول[2] و جورج رابرتس، مطرح شده است این است که آیا DNAی کروموزومی نیز ساختمان مارپیچ مضاعف دارد یا نه. درحقیقت اگرچنین باشد، این مولکول دورشتهٔ بسته با عددی پیوندی ازمرتبهٔ ۲۰۰۰۰۰ خواهد داشت. این مولکول ازراه جداکردن رشته‌ها وتکمیل کردن هرکدام ازرشته‌ها تکثیرمی‌شود. پول و رابرتس نشان دادند که با چنین عدد پیوندی بزرگی، فرایند تکثیر مشکلات ریاضی جدیی خواهد داشت. از این‌رو ساختارمارپیچ مضاعف مولکول DNA، دست کم درمورد کروموزومها مورد سؤال واقع شده است [۶]. (در ۲۶ ژانویهٔ ۱۹۷۹ اضافه شد که: اخیراً چندآزمایش نشان داده است که برخی ازمشکلات ریاضی ساختار مارپیچ مضاعف مولکول DNA را می‌توان توسط فعالیتهای آنزیمی حل کرد (ر. ک. مقالهٔ کریک[3] تحت عنوان "آیا DNA حقیقتاً مارپیچ مضاعف است؟" پیش‌چاپ ۱۹۷۸).)

عدد پیوندی L توسط فرمول جیمز وایت یعنی

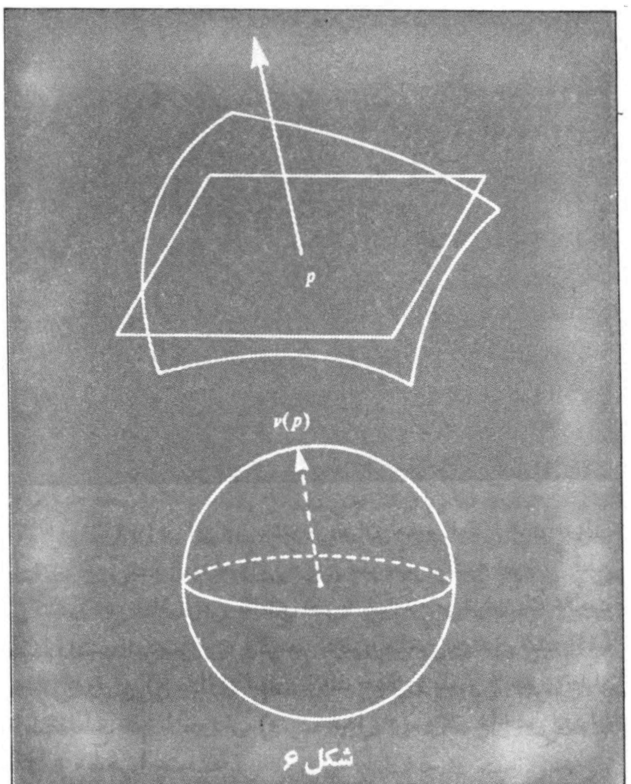
$$T+W=L \qquad (۱)$$

تعیین می‌شود [۷]، که در آن T پیچش[4] کل و W عدد نورد[5] مولکول است. عدد نورد را می‌توان عملاً بدست آورد و این عدد با فعالیت آنزیمی تغییر می‌کند. این فرمول در زیست‌شناسی مولکولی از اهمیت خاصی برخوردار است. به‌طورکلی مولکولهای DNA طویل هستند. برای گنجاندن آنها دریک فضای محدود، اقتصادی‌ترین راه درنوردیدن و پیچاندن آنهاست. این بحثها می‌توانند مبین پیدایش نوعی هندسهٔ تصادفی[6] باشند که مثالهای اصلی آن از زیست‌شناسی اخذ شده است.

درفضای سه‌بعدی، رویه‌ها درمقایسه باخمها ویژگیهای مهمتری دارند. کارهای اساسی گاوس، هندسهٔ دیفرانسیل را که مبحثی از حساب دیفرانسیل و انتگرال بود به‌شاخهٔ مستقلی اعتلا داد. کتاب وی‌تحت عنوان تحقیقات کلی دربارهٔ رویه‌های خمیده[1] (۱۸۲۷)، گواهی ولادت هندسهٔ دیفرانسیل است. ایدهٔ اصلی آن این است که هررویه دارای یک هندسهٔ ذاتی[2] است که فقط مبتنی براندازهٔ طول کمان است. با استفاده از جزءکمان، سایر مفاهیم هندسی نظیر زاویهٔ بین‌خمها و مساحت قطعه‌ای از رویه‌را می‌توان تعریف کرد. از این‌رو هندسهٔ مسطحه به‌هندسهٔ رویه‌ای مانند Σ که مبتنی بر ویژگیهای موضعی جزء کمان است، تعمیم می‌یابد. این موضعی‌سازی[3] هندسه هم بدیع و هم انقلابی است. ژئودزیکها، "کوتاهترین" خمهای بین دونقطه (به‌قدرکافی نزدیک) جای خطوط راست را می‌گیرند. به‌طورکلی، یک‌خم روی Σ دارای "خمیدگی ژئودزیکی" است که این مفهوم، تعمیمی ازمفهوم خمیدگی یک‌خم مسطح است؛ ژئودزیکها خمهایی هستند که خمیدگی ژئودزیکی آنها صفراست.

فرض کنیدکه رویهٔ Σ هموار و جهتدار باشد. در هرنقطهٔ p از Σ یک بردارقائم‌واحد $\nu(p)$ وجود داردکه برصفحهٔ مماس بر Σ در p عمود است (شکل ۶ را ببینید). بردار $\nu(p)$ را می‌توان نقطه‌ای ازکرهٔ واحد S_0 تلقی کردکه‌مرکز آن منطبق برمبدأ مختصات فضاست. با فرستادن p به $\nu(p)$، نگاشت گاوس

$$g:\Sigma\longrightarrow S_0 \qquad (۲)$$



شکل ۶

1. linking number 2. William Pohl 3. F.H.C.Crick
4. twist 5. writhing number 6. stochastic geometry

1. *Disquisitiones generales circa superficies curvas*
2. intrinsic geometry 3. localization

را به‌دست می‌آوریم. نسبت جزء مساحت $S_\circ$ به‌جزء مساحت Σ را که تحت g متناظر می‌شوند، خمیدگی گاوسی می‌نامند. "قضیهٔ برجستهٔ" گاوس می‌گوید که خمیدگی گاوسی تنها به‌هندسهٔ ذاتی Σ بستگی دارد. درحقیقت، خمیدگی گاوسی به‌تعبیری این‌نوع هندسه را مشخص می‌کند. روشن است که اگر Σ یک‌صفحه‌باشد، خمیدگی گاوسی آن صفر است.

همچون هندسهٔ مسطحه، روی Σ ناحیهٔ D را که به‌یک یا چند خم قطعه‌ـقطعه هموار محدود شده‌است، درنظرمی‌گیریم. D دارای یک ناوردای توپولوژیک $\chi(D)$ به‌نام مشخصهٔ اویلر[1] است که خیلی آسان به‌صورت زیر تعریف می‌شود: D را "به‌روشی‌مناسب" به‌چندضلعیهایی تقسیم می‌کنیم و تعداد رأسها، یالها و وجه‌ها را به‌ترتیب با v، e و f نمایش می‌دهیم. دراین‌صورت

$$\chi(D)=v-e+f. \qquad (۳)$$

(قضیهٔ چندوجهی اویلر، قبل از اویلرهم شناخته شده‌بود ولی به‌نظر می‌رسد اویلر نخستین کسی‌است که به اهمیت این "مجموع متناوب" پی‌برده است.)

درنظریهٔ رویه‌ها، قضیهٔ گاوس-بونه[2] به‌صورت زیر است:

$$\sum(\text{زاویه‌های خارجی})+\int_{\partial D}(\text{خمیدگی ژئودزیکی}) \qquad (۴)$$

$$+\iint_D(\text{خمیدگی گاوسی})=2\pi\chi(D)$$

که درآن ∂D کنارهٔ D است. خمیدگی گاوسی یک ناحیهٔ مسطح صفر است. علاوه‌براین، اگر این‌ناحیه ساده‌ـهم‌بند[3] باشد، داریم $\chi(D)=1$. پس این فرمول به‌قضیه شاخص دوران که دربخش۳ مورد بحث قرار گرفت، تبدیل می‌شود؛ در واقع، ما از مجموع زاویه‌های یک مثلث بسیار فراتر رفته‌ایم.

برای تعمیم هندسهٔ خمهای مسطح بسته، می‌توانیم رویه‌های بستهٔ جهتدار درفضا را درنظر بگیریم. تعمیم مفهوم شاخص دوران، درجهٔ نگاشت گاوس، g، در (۲) است. تعریف دقیق‌درجه پیچیده است. به‌طور شهودی، درجه عبارت است از تعداد دفعاتی (با احتساب علامت) که $g(\Sigma)$، رویهٔ $S_\circ$ را می‌پوشاند. برخلاف حالت صفحه، که درآن شاخص دوران می‌تواند هر عددی باشد، درجهٔ d توسط توپولوژی Σ کاملاً معین می‌شود، و برابر است با

$$d=\frac{1}{2}\chi(\Sigma). \qquad (۵)$$

این‌درجه برای کرهٔ واحدی‌که [درفضای‌اقلیدسی] نشسته‌است، مستقل ازجهت‌آن، برابر است با ۱+. نتیجهٔ شگفت‌انگیزی‌که اسمیل به‌دست‌آورده [۸] حاکی است‌که در واقع دوکرهٔ واحد با جهتهای مخالف، هموتوپ منظم هستند؛ یا، به‌زبان شهودی، کرهٔ واحد را با یک هموتوپی منظم می‌توان پشت و روکرد. وجود صفحهٔ مماس درهرنقطه از رویه درهر مرحله از این هموتوپی، ضرورت دارد؛ ولی رویه ممکن است خود را قطع کند.

1. Euler characteristic 2. Bonnet 3. simply connected

۵. از فضاهای مختصاتی تا خمینه‌ها. این دکارت بود که در سدهٔ هفدهم با استفاده از مختصات، هندسه را دگرگون ساخت. به‌گفتهٔ هرمان وایل "معرفی اعداد به‌صورت مختصات، عمل گستاخانه‌ای بود" [۹]. ازآن پس، به‌قول وایل، شکل وعدد بسان فرشته و ابلیس برای تسخیر روح هندسه‌دان در ستیز بوده‌اند. مختصات دکارتی یک نقطه در صفحه، عبارت است از فاصله‌های آن، با احتساب علامت، از دوخط متعامد، موسوم به محورهای مختصات. یک خط مستقیم مکان [هندسی] تمام نقاطی است که مختصات، یعنی x و y، آنها دریک معادلهٔ خطی چون

$$ax+by+c=0 \qquad (۶)$$

صدق‌کنند. پیامد این تعبیرها، ترجمهٔ هندسه به‌زبان جبر است.

همین‌که در به‌روی هندسهٔ تحلیلی باز شد، سایر دستگاههای مختصات نیز وارد صحنه شدند. دستگاههای مختصات قطبی در صفحه وکروی و استوانه‌ای درفضا، و بیضوی درصفحه و فضا از جملهٔ این دستگاهها هستند. دستگاه اخیر برای رویه‌های درجهٔ دوم همکانون به‌کارمی‌رود و به‌ویژه برای مطالعهٔ بیضیوارها که زمین‌هم یکی ازآنهاست، مناسب است.

همچنین به فضاهای با بعد بیشتر نیازمندیم زیرا حتی اگر از فضای سه‌بعدی آغاز کنیم، نظریهٔ نسبیت خواهان واردکردن زمان به‌عنوان بعد چهارم است. در یک سطح ابتدایی‌تر، ثبت حرکت یک‌ذره به‌انضمام سرعتش، مستلزم شش مختص‌است (هودوگراف). مجموعهٔ توابع پیوستهٔ یک‌متغیره یک‌فضای بینهایت بعدی‌را تشکیل می‌دهد. مجموعهٔ توابعی‌که مربع‌آنها انتگرال‌پذیر است یک فضای هیلبرت پدید می‌آورد که می‌توان آن‌را به‌کمک دنباله‌ای نامتناهی، مختصات‌بندی کرد. در ریاضیات این دیدگاه، یعنی بررسی کلیهٔ توابعی‌که ویژگیهای خاصی دارند، دیدگاهی است اساسی.

با توجه به‌افزایش دستگاههای‌مختصات، طبیعی به‌نظرمی‌رسد که نظریه‌ای دربارهٔ مختصات داشته باشیم. تنها لازمهٔ تعمیم مفهوم مختصات این‌است‌که بتوان مختصات‌را با نقاط یکی‌گرفت. یعنی، بتوان یک‌تناظر یک‌به‌یک بین‌آنها و نقاط برقرارکرد؛ منشأ ومفهوم آنها اهمیتی ندارد.

اگرپذیرفتن مختصات عام برای شما دشوار است، [نگران نباشید چون] شما تنها نیستید. هفت سال طول‌کشید تا اینشتین از نسبیت خاص در ۱۹۰۸ به‌نسبیت عام در ۱۹۱۵ برسد. وی این تأخیرطولانی را با این‌کلمات شرح می‌دهد: "چرا هفت سال‌دیگر برای ساختن نظریهٔ نسبیت عام لازم بود؟ علت اصلی آن این نکته است که‌کنارگذاشتن این‌تصور‌که مختصات، معنی‌متریکی بلاواسطه دارند، آسان نیست" [۱۰].

بعداز بهره‌گیری از مختصات در مطالعهٔ هندسه، اکنون می‌خواهیم از قیدآنها رها شویم. این‌خواست ما را به‌سوی‌مفهوم بنیادی خمینه سوق می‌دهد. یک خمینه[1] به‌طور موضعی توسط مختصات مشخص می‌شود، اما این مختصات از تبدیلات دلخواه تبعیت می‌کنند. به‌عبارت دیگر، خمینه فضایی است با مختصات تغییرپذیر یا نسبی (اصل نسبیت). می‌خواهم پیدایش‌این‌مفهوم را با

1. manifold

واردشدن پوشاك در زندگی آدمی مقایسه کنیم. اینکه انسان شروع به پوشاندن بدن خود کرد، یك رویداد بسیار مهم تاریخی است. اهمیت توانایی انسان در تغییر لباس خود نیزکمتر از این نیست. اگرهندسه بدن آدمی و مختصات لباس او باشد، دراین صورت سیر تکاملی هندسه را می‌توان با سیر تکاملی انسان مقایسه کرد:

هندسهٔ ترکیبی	انسان برهنه
هندسهٔ مختصاتی	انسان اولیه
خمینه‌ها	انسان جدید

مفهوم خمینه حتی برای ریاضیدانان مفهوم پیچیده‌ای است. مثلاً، ریاضیدان بزرگی چون ژاك آدامار، "در یادگیری نسبتاً عمیق نظریهٔ گروههای لی"، که مبتنی بر مفهوم خمینه است، "مشکلات لاینحلی می‌دید" [۱۱].

۶. خمینه‌ها، ابزارهای موضعی. با توجه به اینکه مختصات در عمل بی‌معنی‌اند، ابزار جدیدی برای مطالعهٔ خمینه‌ها مورد نیاز است. این ابزار، مفهوم ناوردایی است. ناورداها بر دو نوع‌اند: موضعی و سراسری [فراگیر]. اولی به‌رفتار تحت یك تغییرمختصات موضعی‌مربوط می‌شود، درحالی‌که ناورداهای نوع دوم ناورداهای سراسری خمینه هستند. ناورداهای توپولوژیك از نوع دوم‌اند. حساب دیفرانسیل برونی[1] و آنالیز تانسوری ریچی[2] دو ابزار بسیار مهم موضعی هستند.

فرم دیفرانسیل برونی، عبارت است ازعامل زیرعلامت انتگرال چندگانه‌ای چون

$$\iint_D P\,dy\,dz+Q\,dz\,dx+R\,dx\,dy \qquad (۷)$$

درفضای (x, y, z)، که در آن P، Q و R توابعی از x، y و z هستند و D، ناحیه‌ای است دوبعدی. ملاحظه می‌شود که اگر ضرب دیفرانسیلها پادمتقارن باشد، یك تعویض متغیر در ناحیهٔ D (به‌فرض جهتدار بودن) خود به‌خود رعایت می‌شود، یعنی

$$dy\wedge dz=-dz\wedge dy, \dots \qquad (۸)$$

که در آن نماد $\wedge$ نشان‌دهندهٔ ضرب برونی است.و نیز بسیار جالبتر می‌شود وقتی فرم درجهٔ دوم برونی

$$\omega=P\,dy\wedge dz+Q\,dz\wedge dx+R\,dx\wedge dy \qquad (۹)$$

را واردکنیم و انتگرال (۷) را به‌صورت زوجی چون (D, ω) مرکب ازناحیهٔ D و فرم ω بنویسیم.

زیرا اگرهمین عمل درفضای n بعدی انجام شود، آنگاه قضیهٔ استوکس را می‌توان به‌صورت

$$(D, d\omega)=(\partial D, \omega) \qquad (۱۰)$$

نوشت، که در آن D یك ناحیهٔ r بعدی و ω یك $(r-1)$- فرم [فرم درجهٔ $r-1$] برونی؛ ∂D کنارهٔ D و $d\omega$ مشتق برونی ω است که یك r-فرم می‌باشد. فرمول (۱۰)، فرمول اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال چندمتغیره، نشان‌می‌دهدکه ∂ و d عملگرهای الحاقی هستند. نکتهٔ اساسی این‌است‌که درحالی‌که عملگر ∂ روی ناحیه‌ها سراسری است، عملگرمشتقگیری برونی d روی فرمها موضعی است.این ویژگی d را به‌ابزار نیرومندی مبدل می‌سازد. اگر این عملگر درمورد یك تابع ($=$ ۰-فرم) و یك ۱-فرم‌اعمال شود نتیجهٔ حاصل به‌ترتیب گرادیان و تاو خواهد بود. فرمهای هموار از تمام درجات (نابیشتر از بعد خمینه) روی یك خمینه دیفرانسیلپذیر با عمل‌مشتقگیری برونی d تشکیل یك حلقه‌می‌دهند. الی‌کارتان حساب دیفرانسیل برونی را به‌طرز مؤثری در مسائل موضعی هندسهٔ دیفرانسیل و معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی به‌کار برد. نظریهٔ بعد سراسری [فراگیر] به دنبال کارهای اولیهٔ پوانکاره به وسیلهٔ دورام[1] پایه‌گذاری شد. این موضوع در بخش بعد مورد بحث واقع خواهد شد.

حساب دیفرانسیل برونی، علی‌رغم اهمیتش، برای تبیین پدیده‌های هندسی و تحلیلی در مورد خمینه ناکافی است. مبحث آنالیز تانسوری ریچی برای این منظور مبحث گسترده‌تری است. تانسورها براین اصل استوارند که یك خمینه را می‌توان به‌سبب هموار بودن‌آن در هرنقطه توسط یك فضای خطی، موسوم به‌فضای مماسی، تقریب زد. به‌فضای مماسی دریك نقطه، فضاهای تانسوری وابسته می‌شوند. مشتقگیری ازمیدانهای‌تانسوری نیازمندساختاری اضافی، به‌نام التصاق مستوی[2] است. در صورتی‌که خمینه دارای ساختاری ریمانی‌یا لورنتسی[3] باشد، التصاق لوی-چیویتا[4]ی‌متناظر با آن مقصود ما را برآورده خواهدکرد.

۷. هومولوژی[5] [مانستگی]. از لحاظ تاریخی، مطالعهٔ اسلوبمند ناورداهای سراسری یك خمینه با توپولوژی ترکیبیاتی آغاز شد. اندیشهٔ زیربنایی این بررسی، تجزیهٔ خمینه به‌یاخته‌ها و مشاهدهٔ چگونگی جورشدن آنها با یکدیگر است. (این تجزیه مقید به‌چند شرط ضعیف است‌که از ذکر آنها چشمپوشی می‌کنیم.) اگر M یك خمینهٔ بستهٔ nبعدی باشد و α_k تعداد kیاختهٔ تجزیه، $k=0, 1, \dots, n$، را نشان دهد، آنگاه مشخصهٔ اویلر-پوانکارهٔ M به‌شکل

$$\chi(M)=\alpha_0-\alpha_1+\dots+(-1)^n\alpha_n \qquad (۱۱)$$

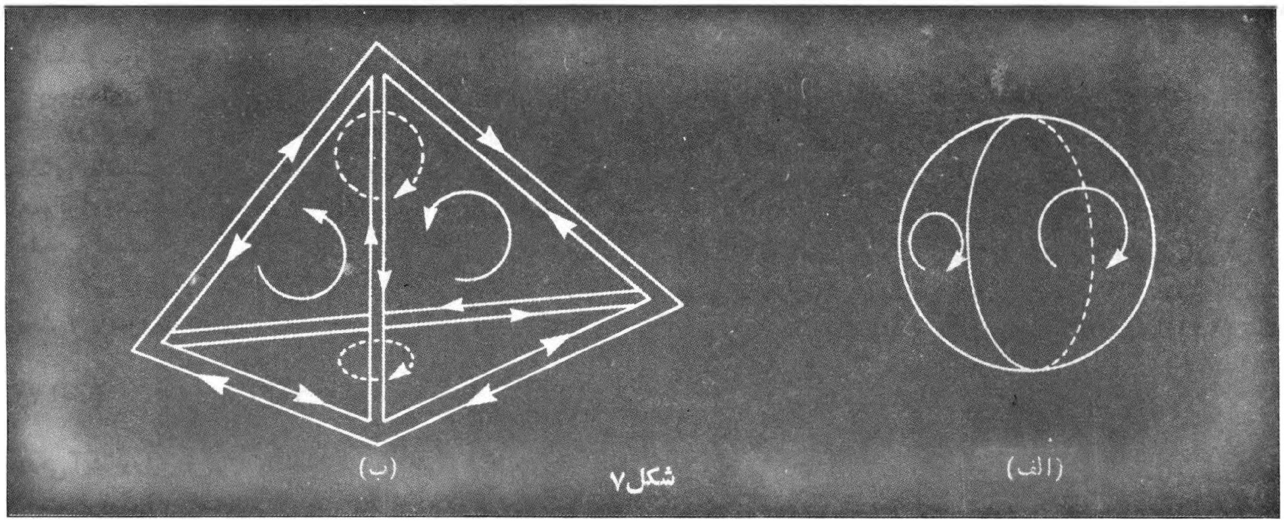
و به‌صورت تعمیمی از(۳) تعریف می‌شود.

مفهوم‌اساسی‌درنظریهٔ هومولوژی، مفهوم‌کناره‌است. یك‌زنجیر مجموعی‌است از یاخته‌ها با ضرایب عدد صحیح. اگر زنجیری دارای‌کناره نباشد، یعنی‌اگر کنارهٔ آن صفرباشد، یك دور[6] نامیده می‌شود. کنارهٔ زنجیر یك دور است (ر.ك. شکل۷). تعداد دورهای kبعدی مستقل‌خطی به‌پیمانهٔ کناره‌های kبعدی، یك عدد صحیح b_k است. این‌عدد را kامین عدد بتی[7] می‌نامند. فرمول اویلر-پوانکاره حاکی‌است که

$$\chi(M)=b_0-b_1+\dots+(-1)^n b_n. \qquad (۱۲)$$

1. exterior differential calculus 2. Ricci's tensor analysis

1. G.de Rham 2. affine connection 3. Lorentzian
4. Levi-Civita 5. homology 6. cycle
7. Betti



شکل۷

اعداد بتی b_k و بنابراین خود $\chi(M)$ ناورداهای توپولوژیك M هستند، یعنی این اعداد مستقل از تجزیهٔ M هستند و تحت هر تبدیل توپولوژیك M پایدار می‌مانند. این حکم وحکمهای بسیار کلیتر را می‌توان قضایای اساسی توپولوژی ترکیبیاتی تلقی کرد. توپولوژی ترکیبیاتی بعد از کارهای رهگشای پوانکاره و براوئر، در دههٔ ۱۹۲۰ و در آمریکا به رهبری وبلن، الکساندر و لفشتس[1] شکوفا شد.

گرچه بریدن خمینه‌راه‌مؤثری برای به‌دست آوردن **ناورداهای توپولوژیك است**، ولی در بریدن خمینه خطر "ازبین‌رفتن" آن‌وجود دارد. به‌بیان روشنتر، در صورت استفاده از رهیافت ترکیبیاتی، امکان‌دارد روابط‌ناورداهای توپولوژیك‌ویژگیهای موضعی‌هندسی از نظر ما پنهان بمانند. از قضا، گرچه نظریهٔ همولوژی به‌عملگر کناره‌ای ∂ بستگی دارد، یك نظریهٔ دوگان وجود دارد به نام کوهمولوژی[2] [همانستگی] که مبتنی برعملگر مشتقگیری برونی d است که یك عملگر موضعی‌است.

نظریهٔ کوهمولوژی دورام را می‌توان به‌شرح زیرخلاصه کرد: عملگر d دارای این ویژگی بنیادی است که وقتی مکرراً اعمال شود فرم صفر را به‌دست می‌دهد؛ یعنی به‌ازای هر k-فرم α، مشتق برونی $(k+1)$-فرم $d\alpha$ برابرصفراست. این نکته متناظر با این واقعیت هندسی‌است که‌کنارهٔ هر زنجیر (یا ناحیه) کناره‌ای ندارد (ر.ك. (۱۰)). فرم α بسته نامیده‌می‌شود اگر $d\alpha = 0$. این‌فرم، یك فرم مشتق شده نامیده می‌شود اگر فرمی مانند β از درجهٔ $k-1$ وجود داشته باشد به‌طوری که $\alpha = d\beta$. از این‌رو یك فرم مشتق شده همواره بسته‌است. دوفرم بسته، کوهمولوگ[3] [همانسته] نامیده می‌شوند اگر تفاوت آنها یك فرم مشتق شده باشد. تمام k-فرمهای بسته‌که با یکدیگر کوهمولوگ‌هستند ردهٔ کوهمولوژی kبعدی را تشکیل می‌دهند. نکتهٔ قابل توجه آن‌است که درحالی‌که خانواده‌های k-فرمها، k-فرمهای بسته، k-فرمهای‌مشتق شده بسیار بزرگ‌هستند، رده‌های‌کوهمولوژی kبعدی یك فضای برداری با بعدمتناهی‌تشکیل می‌دهند که بعد آن b_k، kامین عدد بتی‌است.

1. Lefschetz 2. cohomology 3. cohomologous

کوهمولوژی دورام پیشرو کوهمولوژی بافه[1]‌ای است، که توسط لری[2] [۱۲] ابداع و با موفقیت‌فراوان توسط هانری‌کارتان و سر[3] تکمیل‌شده و به‌کارگرفته شده‌است.

۸. میدانهای برداری و تعمیم آنها. طبیعی‌است که برخمینه‌ای چون M میدانهای برداری پیوسته‌ای درنظربگیریم یعنی‌به‌هرنقطه بردار مماسی وابسته‌کنیم که به‌طور پیوسته تغییرکند. اگر مشخصهٔ اویلر-پوانکاره، $\chi(M)$، صفرنباشد، دست‌کم یك نقطه بر M پیدا می‌شودکه درآن، این بردار صفرشود. به‌عبارت دیگر، هنگامی‌که باد می‌وزد، دست‌کم یك نقطه روی زمین وجود داردکه درمعرض باد نباشد (زیرا برای کرهٔ دوبعدی، مشخصهٔ اویلر برابر با ۲ است). دقیقتر بگوییم، در یك صفر منزوی[4] یك میدان برداری پیوسته، می‌توان عدد صحیحی به‌نام شاخص تعریف کرد، که تا حدی رفتار میدان را درآن نقطه مشخص می‌کند، بدین‌معنی‌که مشخص می‌کند که‌آن نقطه، چشمه‌است یا چاهك، ویا ازنوع دیگری‌است. میدان برداری هرچه باشد، به شرط اینکه پیوسته و دارای تعداد متناهی صفرباشد، قضیهٔ پوانکاره-هوپف[5] می‌گویدکه مجموع شاخصها در همهٔ صفرها، ناوردایی است توپولوژیك و دقیقاً برابر است با $\chi(M)$.

این حکم، حکمی‌است دربارهٔ‌کلاف مماس[6] M، یعنی گردایهٔ فضاهای مماس بر M. به‌طورکلی، خانواده‌ای از فضاهای برداری که توسط یك خمینه مانند M پارامتری شده‌است و در یك شرط حاصلضرب موضعی صدق می‌کنـد، یك کلاف برداری روی M نامیده می‌شود.

یك سؤال اساسی این‌است که‌آیا چنین‌کلافی به‌طورسراسری یك حاصلضرب هست، یا نه. از بحث فوق معلوم می‌شود که اگر $\chi(M) \neq 0$، آنگاه‌کلاف مماس یك حاصلضرب نیست، زیرا اگر حاصلضرب باشد، یك میدان برداری وجود خواهد داشت که در هیچ‌جا صفرنیست. تصوروجود فضایی مانندکلاف‌مماس‌خمینهٔ

1. sheaf 2. J. Leray 3. J.P.Serre
4. isolated zero 5. Hopf 6. tangent bundle

M با $\chi(M) \neq 0$، که به‌طور موضعی و نه به‌طور سراسری، حاصلضرب باشد آسان نیست. بدین ترتیب، هندسه به‌مرحلهٔ ظریفتر و پیچیده‌تری گام می‌نهد.

در توصیف انحراف سراسری یك کلاف برداری[1] از یك فضای حاصلضرب، نخستین ناورداها رده‌های به اصطلاح مشخصهٔ همولوژی هستند. مشخصهٔ اویلر-پوانکاره ساده‌ترین رده از رده‌های مشخصه است.

وقتی رویهٔ Σ کناره نداشته باشد، فرمول گاوس-بونه (۴) در بخش۴ به‌صورت سادهٔ

$$\iint K\,dA = 2\pi\chi(\Sigma) \qquad \text{(۴ الف)}$$

درمی‌آید. دراین فرمول K خمیدگی گاوسی و dA جزء مساحت است. فرمول (۴ الف) از اهمیت فوق‌العاده‌ای برخوردار است، زیرا ناوردای سراسری $\chi(\Sigma)$ را به‌صورت انتگرال یك ناوردای موضعی بیان می‌کند وشاید مطلوبترین رابطه بین ویژگیهای موضعی و سراسری باشد؛ این قضیه یك تعمیم گسترده دارد.
فرض کنید

$$\pi: E \longrightarrow M \qquad (۱۳)$$

یك کلاف برداری باشد. تعمیم یك میدان برداری مماس روی M، مقطعی از این کلاف یعنی نگاشتی است هموار چون $s: M \to E$ به‌طوری که تابع مرکب $\pi \circ s$ تابع همانی باشد. چون E تنها به‌طور موضعی یك حاصلضرب است، مشتقگیری از s نیازمند ساختار جدیدی است که معمولاً التصاق نامیده می‌شود. درحالت کلی، مشتقگیری حاصل که مشتقگیری هموردا[2] نامیده می‌شود، تعویضپذیر نیست. خمیدگی، میزانی برای اندازه‌گیری تعویض ناپذیری مشتقگیری هموردا است. ترکیبهای مناسبی از خمیدگی، فرمهای دیفرانسیلی را پدید می‌آورند که نمایندهٔ رده‌های همولوژی، به‌تعبیر نظریهٔ درام، هستند. ساده‌ترین مثال این ترکیبها، فرمول گاوس-بونه (۴ الف) است [۱۳]. من براین باورم که مفاهیم کلاف مماس، التصاق، و خمیدگی آنچنان اساسی و به‌قدری ساده هستند که باید در هردرس مقدماتی حساب دیفرانسیل و انتگرال چند متغیره گنجانده شوند.

۹. معادلات دیفرانسیل بیضوی. هنگامی که M دارای یك متریك ریمانی باشد، عملگری مانند $*$ وجود دارد که k-فرم α را به $(n-k)$-فرم $*\alpha$، $n = \dim M$، تبدیل می‌کند. این متناظر است با عمل هندسی به‌دست آوردن مکمل قائم یك زیرفضای فضای مماس. با استفاده از $*$ و دیفرانسیل d، کودیفرانسیل[3]

$$\delta = (-1)^{nk+n+1} * d * \qquad (۱۴)$$

و لاپلاسی

$$\Delta = d\delta + \delta d \qquad (۱۵)$$

را معرفی می‌کنیم. در این صورت عملگر δ، یك k-فرم را به‌یك $(k-1)$-فرم بدل می‌کند و Δ یك k-فرم را به یك k-فرم دیگر. فرم α که در تساوی

$$\Delta\alpha = 0 \qquad (۱۶)$$

صدق کند، فرم همساز نامیده می‌شود. یك فرم همساز ازدرجهٔ صفر، یك تابع همساز به‌معنی معمولی آن است.

معادلهٔ (۱۶) یك معادلهٔ دیفرانسیل بیضوی با مشتقات جزئی از مرتبهٔ دوم است. درصورتی که M بسته باشد، جوابهای آن یك فضای برداری با بعد متناهی تشکیل می‌دهند. بنا بر قضیهٔ کلاسیك هاج[1] این بعد دقیقاً kامین عدد بتی یعنی b_k است. از (۱۲) نتیجه می‌شود که می‌توان مشخصهٔ اویلر را به‌صورت

$$\chi(M) = d_e - d_o \qquad (۱۷)$$

نوشت، که در آن d_e و d_o به‌ترتیب بعد فضای فرمهای همساز از درجهٔ زوج و فرد هستند. مشتق برونی d خود یك عملگر بیضوی است و (۱۷) را می‌توان چنین تلقی کرد که $\chi(M)$ را به‌صورت شاخص یك عملگر بیضوی بیان می‌کند. شاخص هرعملگر بیضوی خطی برابر است با بعد فضای جوابهای آن منهای بعد فضای جوابهای عملگر الحاقی.

بیان شاخص یك عملگر بیضوی به‌صورت انتگرال یك ناوردای موضعی به‌قضیهٔ شاخص آتیا-سینگر منتهی می‌شود. حالتهای خاص این قضیه، بسیاری از قضایای مشهور دیگر از جمله قضیهٔ علامت هاج، قضیهٔ علامت هیرتسبروخ[2]، وقضیهٔ ریمان-رخ[3] برای خمینه‌های مختلط را دربرمی‌گیرد. یك دستاورد جنبی مهم این بررسی، تشخیص نیاز به‌بررسی عملگرهای شبه دیفرانسیل روی خمینه‌هاست که کلیتر از عملگرهای دیفرانسیل هستند.

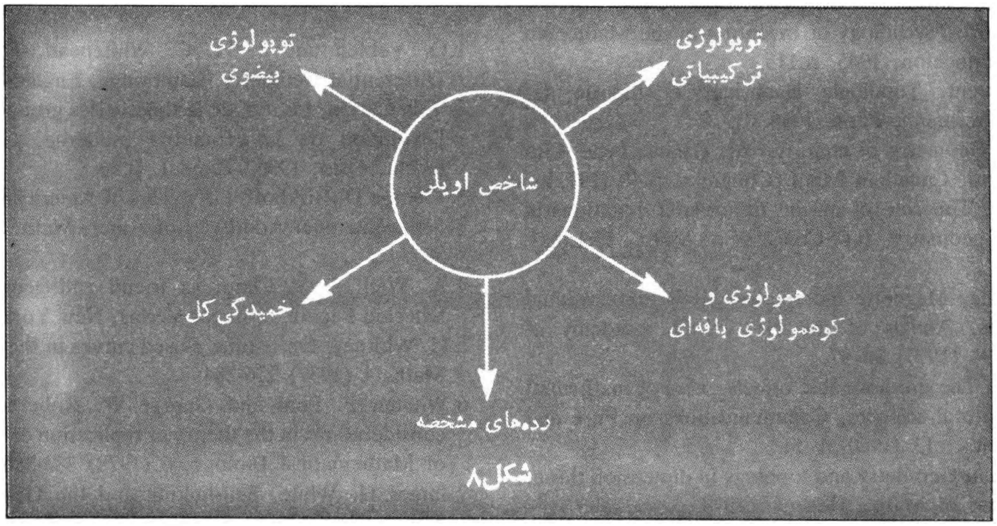
معادلات و دستگاههای معادلات دیفرانسیل بیضوی عمیقاً با هندسه گره خورده‌اند. معادلات دیفرانسیل کوشی-ریمان یك یا چند متغیرهٔ مختلط، اساس هندسهٔ مختلط هستند. واریته[4]های مینیمال، جوابهای معادلات اویلر-لاگرانژ مربوط به‌مسألهٔ وردشی مینیمم‌سازی مساحت هستند. این معادلات شبه‌خطی[5] هستند. شاید "غیرخطی ترین" معادلات، معادلات مونژ-آمپر باشند، که درچند مسألهٔ هندسی دارای اهمیت‌اند. درسالهای اخیر دراین زمینه‌ها پیشرفتهای بسیارزیادی حاصل شده‌است [۱۴]. با این دخالت گستردهٔ آنالیز، واهمه‌ای که جرج بیرکاف از آن سخن گفته و در بالا به‌آن اشاره شد، جدیتر به‌نظر می‌رسد. با این همه، در حالی که آنالیز نقشهٔ کل معدن را ترسیم می‌کند، هندسه جویای سنگهای زیبا و گرانبهای آن است. هندسه براین اصل استوار است که نه همهٔ ساختارها با هم مساوی‌اند نه همهٔ معادلات دارای اهمیت برابرند.

۱۰. مشخصهٔ اویلر منشایی برای ناورداهای سراسری. خلاصه کنیم: مشخصهٔ اویلرمنشأ تعداد زیادی از نظامهای هندسی است. این وابستگی را با نموداری نشان می‌دهیم (ر. ك. شکل۸).

۱۱. نظریهٔ پیمانه‌ای میدانها. درآغاز این قرن، هندسهٔ دیفرانسیل بامطرح شدن نظریهٔ نسبیت اینشتین مورد توجه فراوان قرار گرفت.

1. vector bundle 2. covariant differentiation
3. codifferential

1. Hodge 2. Hirzebruch 3. Roch
4. variety 5. quasi-linear



شکل۸

ایدهٔ اینشتین عبارت بود از تعبیر پدیده‌های فیزیکی به‌صورت پدیده‌های هندسی و ساختن فضایی که با دنیای فیزیکی تطابق داشته باشد. این کاری بس بزرگ بود و روشن نیست که وی حرف آخر را در مورد نظریهٔ وحدت میدانهای گرانشی و الکترومغناطیسی زده باشد. ابداع کلافهای برداری پیشگفته، و به‌ویژه التصاقهای آنها همراه با رده‌های مشخصه و ارتباط آنها با خمیدگی، قلمرو هندسه را وسعت بخشید. موضوع کلاف یك بعدی[۱] (یعنی: وقتی که تار[۲] یك خط مختلط است) پایهٔ ریاضی نظریهٔ پیمانه‌ای میدان الکترومغناطیسی وایل را تشکیل می‌دهد. نظریهٔ یانگ-میلز که مبتنی است بردرکی از اسپین ایزوتوپی، نخستین مثال از نظریهٔ پیمانه‌ای غیرآبلی است. مبنای هندسی این نظریه یك کلاف دوبعدی مختلط همراه با یك التصاق یکانی[۳] است. تلاشهایی که اخیراً برای وحدت تمام نظریه‌های میدان، ازجمله برهمکنشهای ضعیف وقوی صورت می‌گیرد، حول یك نظریهٔ پیمانه‌ای یعنی یك الگوی هندسی مبتنی بر کلافها والتصاقها، متمرکز شده است. مشاهدهٔ وحدت مجدد هندسه و فیزیك بسیار خوشحال کننده است.

کلاف، التصاق، کوهمولوژی، و رده‌های مشخصه مفاهیم ظریف و پیچیده‌ای هستند که بعد از سالهای دراز جستجو و آزمایش در هندسه پدیدار شده‌اند. یانگ[۴] فیزیکدان نوشته است [۱۵]: "انطباق مفاهیم میدانهای پیمانه‌ای غیرآبلی با اندیشه‌های موجود در نظریهٔ زیبای کلافهای تاری که توسط ریاضیدانان بدون مراجعه به‌دنیای واقعی به‌وجود آمده، برای من بسیار شگفت‌آور است." یانگ در ۱۹۷۵ به‌من می‌گفت که "این امر هم هیجان‌انگیز است و هم حیرت‌آور، زیرا شما ریاضیدانان این مفاهیم را ازهیچ بیرون کشیده‌اید. این شگفت‌زدگی، متقابل است. یوجین ویگنر[۵] با اشاره به‌نقش ریاضیات در فیزیك از تأثیر باورنکردنی ریاضیات صحبت می‌کند [۱۶]. اگر ناچار به‌یافتن علت این امر باشیم، ممکن است بتوانیم آن را با اصطلاح مبهم "یگانگی علم" بیان کنیم. مفاهیم اساسی همیشه نادرند.

۱۲. **ملاحظات نهایی.** هندسهٔ دیفرانسیل جدید، موضوع نوپایی است. اگرهم نیروی محرکه‌ای را که این موضوع از نسبیت و توپولوژی دریافت کرد به‌حساب نیاوریم، باز رشد هندسهٔ دیفرانسیل مداوم بوده است. خوشحالم که نمی‌توانیم تعریفی برای آن ارائه دهیم، و امیدوارم که برخلاف بسیاری از رشته‌های ریاضی به‌صورت یك دانش اصل موضوعی درنیاید. این رشته با تماسی که با شاخه‌های دیگر در داخل و خارج ریاضیات دارد، و با این خصیصه‌اش که مباحث موضعی و سراسری را به‌هم مربوط می‌سازد، در سالهای آینده رشتهٔ بارووری باقی خواهد ماند.

شاید مشخص کردن یك دوره از ریاضیات با تعداد متغیرهای توابع یا بعد فضاهایی که از آنها بحث می‌کند، جالب باشد. با این تعبیر، ریاضیات سدهٔ نوزدهم یك‌بعدی و ریاضیات سدهٔ بیستم nبعدی است. به‌سبب چند متغیری بودن است که جبر اهمیت بیشتری کسب می‌کند. تاکنون غالب قضایای سراسری دربارهٔ خمینه‌ها، مربوط به‌خمینه‌هایی با بعد زوج بوده است. به‌ویژه تمام واریته‌های جبری مختلط دارای بعد حقیقی زوج هستند. خمینه‌های با بعد فرد هنوز بسیار اسرارآمیزند. می‌خواهم این آرزو را ابراز کنم که آنها در سدهٔ بیست و یکم مورد توجه بیشتر و شناسایی افزونتری قرار گیرند. کارهای جدیدی که در زمینهٔ خمینه‌های هذلولوی سه بعدی به‌وسیلهٔ ترستن[۱] [۱۷] و در زمینهٔ رویه‌های مینیمال در خمینه‌های سه‌بعدی به‌وسیلهٔ یاو[۲]، و میکس[۳]، و شوئن[۴] انجام شده، خمینه‌های سه‌بعدی و هندسهٔ آنها را به‌نحو قابل‌ملاحظه‌ای روشنتر ساخته است. شاید ابرمسألهٔ هندسه هنوزهم این حدس پوانکاره باشد که هرخمینهٔ سه‌بعدی ساده‌همبند با کره همانریخت است. تاکنون روشهای توپولوژیك وجبری به‌روشن‌شدن این مسأله نیانجامیده‌اند. قابل تصور است که ابزارهای هندسه و آنالیز بتوانند مفید واقع شوند.

---

1. line bundle 2. fiber 3. unitary
4. C.N.Yang 5. Eugene Wigner

1. W.Thurston 2. S.T.Yau 3. W.Meeks
4. R.Schoen

مراجع

1. O. Veblen and J. H. C. Whitehead, Foundations of Differential Geometry, Cambridge, England, 1932, P. 17.
2. Elie Cartan, Le rôle de la théorie des groupes de Lie dans l'évolution de la géométrie moderne, Congrès Inter. Math., Oslo, 1936, Tome I, p.96.
3. George D. Birkhoff, Fifty years of American mathematics, Semicentennial Addresses of Amer. Math. Soc., 1938, P. 307.
4. A. Weil, S. S. Chern as friend and geometer, Chern, Selected Papers, Springer Verlag, New York, 1978, P. xii.
5. H. Whitney, On regular closed curves in the plane, Comp. Math. 4 (1937) 276-284.
6. William F. Pohl and George W. Roberts, Topological considerations in the theory of replication of DNA, Journal of Mathematical Biology, 6 (1978) 383-386, 402.
7. James H. White, Self-linking and the Gauss integral in higher dimensions, American J. of Math., 91 (1969), 693-728; B. Fuller, The writhing number of a space curve, Proc. Nat. Acad. Sci., 68 (1971) 815–819; F. Crick, Linking numbers and nucleosomes, Proc. Nat. Acad. Sci., 73 (1976) 2639-2643.
8. S. Smale, A classification of immersions of the two–sphere, Transactions AMS, 90 (1959) 281–290; cf also A. Phillips, Turning a surface inside out, Scientific American, 214 (May 1966) 112–120. A film of the process, by N. L. Max, is distributed by International Film Bureau, Chicago, III.
9. H. Weyl, Philosophy of Mathematics and Science, 1949, p. 90.
10. A. Einstein, Library of Living Philosophers, vol. 1, p. 67.
11. J. Hadamard, Psychology of Invention in the Mathematical Field, Princeton, 1945, p.115.
12. R. Godement, Topologie algébrique et théorie des faisceaux, Hermann, Paris, 1958.
13. S. Chern, Geometry of characteristic classes, Proc. 13th Biennial Sem. Canadian Math. Congress, 1–40 (1972).
14. S. T. Yau, The role of partial differential equations in differential geometry, Int. Congress of Math., Helsinki, 1978.
15. C. N. Yang, Magnetic monopoles, fiber bundles, and gauge fields, Annals of the New York Academy of Sciences, 294 (1977) 86–97.
16. E. Wigner, The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences, Communications on Pure and Applied Math., 13 (1960) 1–14.
17. W. Thurston, Geometry and topology in dimension three, Int. Congress of Math., Helsinki, 1978.

• Shing-Shen Chern, "From triangles to manifolds," *Amer. Math. Monthly*, (5) **86** (1979) 339-349.

★ شینگ شن چرن از بزرگترین ریاضیدانان قرن در زمینهٔ هندسهٔ دیفرانسیل است. وی در ۱۹۱۱ در چین به دنیا آمد، درجهٔ دکتری خود را از دانشگاه هامبورگ آلمان گرفت، و در اواخر جنگ بین‌الملل دوم به آمریکا رفت. او در دانشگاه شین هوای چین و دانشگاههای شیکاگو و کالیفرنیا (برکلی) در آمریکا کار و تدریس کرده است. شینگ شن چرن عضو آکادمی علوم و دارندهٔ نشان ملی علوم [آمریکا] است.