مرگ بر دترمینان!•

شلدن اکسلر*

ترجمهٔ روح‌الله جهانی‌پور

۱. مقدمه

از هر کسی بپرسید که چرا یک ماتریس مربع با درایه‌های مختلط، مقدار ویژه دارد، احتمالاً جواب غلطی شبیه به این خواهید شنید: چندجمله‌ای مشخصهٔ ماتریس — که به کمک دترمینان تعریف می‌شود — (بنابر قضیهٔ اساسی جبر) ریشه دارد؛ ریشهٔ آن همان مقدار ویژهٔ ماتریس است.

اشتباه این جواب در چیست؟ در اینکه به دترمینان وابسته است. دترمینان مفهومی مشکل و غیرشهودی است و معمولاً بدون تمهید انگیزه و زمینه‌سازی تعریف می‌شود. خواهیم دید که وجود مقدار ویژه برای ماتریس مربع، اثبات بهتری دارد که ساده‌تر و روشنتر و شهودیتر است و در آن از دترمینان پرهیز می‌شود.

در این مقاله خواهیم دید که چگونه می‌توان جبر خطی را بدون استفاده از دترمینان، بهتر عرضه کرد. چندگانگی یک مقدار ویژه را بدون استفاده از دترمینان تعریف، و ثابت خواهیم کرد که تعداد مقدارهای ویژه، با احتساب چندگانگی آنها، مساوی بُعد فضای مربوطه است. چندجمله‌ایهای مشخصه و مینیمال را نیز بدون توسل به دترمینان تعریف، و ثابت خواهیم کرد که مطابق انتظار رفتار می‌کنند. آنگاه به سادگی ثابت می‌کنیم که هر ماتریسی با یک ماتریس بالا مثلثی متشابه است. سپس با پرداختن به فضاهای ضرب داخلی و باز بدون اشاره به دترمینان، اثبات ساده‌ای برای قضیهٔ طیفی در بعد متناهی ارائه می‌کنیم.

دترمینان فقط در یک جا در دروس دورهٔ کارشناسی ریاضی لازم می‌آید، و آن هم در فرمول تعویض متغیر در انتگرالهای چندگانه است. به همین دلیل در انتهای مقاله، دترمینان را دوباره زنده می‌کنیم ولی نه با تعریفهای پیچیدهٔ معمول. دترمینان یک ماتریس را به‌صورت حاصلضرب مقادیر ویژه‌اش (با احتساب چندگانگی آنها) تعریف خواهیم کرد. این تعریف که به خاطر نگهداشتن آن ساده است، فرمولهای معمول محاسبهٔ دترمینان را به‌دست می‌دهد. فرمول تعویض متغیر برای انتگرالهای چندگانه را نیز طوری استنتاج می‌کنیم که ظهور دترمینان در آنجا طبیعی جلوه کند.

بعضی از دوستانی که در تحقیقاتشان از دترمینان استفاده می‌کنند، از عنوان این مقاله اظهار ناراحتی کردند. می‌دانم که دترمینان نقش مهمی در بعضی از زمینه‌های تحقیقاتی ایفا می‌کند و منظور من این نیست که در جایی که استفاده از دترمینان اجتناب‌ناپذیر است، اهمیت آن را ناچیز جلوه دهم، ولی معتقدم اکثر ریاضیدانها و دانشجویان ریاضی اگر از رهیافتهای عاری از دترمینان به قضیه‌های ساختاری اساسی جبر خطی کمک بگیرند، درک روشنتری از آنها به دست خواهند آورد.

قضیه‌های این مقاله جدید نیستند؛ بسیاری از خوانندگان با آنها آشنایی قبلی دارند، ولی بعضی از اثباتها و تعریفها جدیدند. گرچه خیلی از بخشهای این رهیافت، اینجا و آنجا به طور پراکنده مطرح شده‌اند، لکن آن قدر که مستحقش بوده‌اند، مورد توجه واقع نشده‌اند. مثلاً در گردهمایی سالانهٔ اخیر انجمن ریاضی آمریکا و جامعهٔ ریاضی آمریکا همهٔ کتابهای جبر خطی را که به نمایش گذاشته شده بود، نگاه کردم. از بین بیش از پنجاه کتاب جبر خطی که برای فروش عرضه شده بودند، فقط در یک کتاب گمنام یک اثبات عاری از دترمینان برای وجود مقدار ویژه ارائه شده بود و تازه آن کتاب هم دیگر بخشهای اصلی جبر خطی را با همین روش عرضه نکرده بود. فلسفهٔ ضد دترمینانی که در این مقاله از آن هواداری می‌شود، تلاشی است برای مقابله با تسلط نابه‌جای روشهای وابسته به دترمینان.

هدف اصلی این مقاله این است که نشان دهد دترمینان را می‌توان از بسیاری از بخشهای نظری جبر خطی حذف کرد. دترمینان در قسمت محاسباتی جبر خطی هم بی‌فایده است. برای مثال قاعدهٔ کرامر برای حل دستگاههای معادلات خطی، برای دستگاههای ۱۰×۱۰ هم بی‌ارزش است، چه رسد به دستگاههای بزرگتری که معمولاً در مدلسازی دنیای واقعی

مطرح می‌شوند. در بسیاری از برنامه‌های کامپیوتری نیز که مقدارهای ویژه را با روشهای عددی مؤثری محاسبه می‌کنند از به‌کار بردن دترمینان پرهیز می‌شود. برای تأکید بر این نکته، می‌خواهم از هنری تاچر[1] یکی از متخصصان آنالیز عددی نقل قول کنم که در نقد کتاب روشهای عددی توربوپاسکال[2] می‌نویسد:

> برای من تصور وضعیتی که در آن مقدار عددی دترمینان لازم باشد، مشکل است: قاعدهٔ کرامر به دلیل ناکارآمد بودن آن کاملاً غیرعملی است، ضمن اینکه اندازهٔ دترمینان نه نشان‌دهندهٔ وضعیت ماتریس است و نه دقت جواب.

۲. مقدارهای ویژه و بردارهای ویژه

اشیاء اصلی مورد مطالعه در جبر خطی را می‌توان تبدیل خطی یا ماتریس دانست. چون رهیافت مستقل از پایه طبیعی‌تر به نظر می‌رسد در این مقاله عمدتاً به زبان تبدیلهای خطی سخن خواهیم گفت. خواننده‌ای که زبان ماتریسها را ترجیح می‌دهد، می‌تواند بی‌هیچ مشکلی حرفهای ما را به زبان ماتریسها ترجمه کند. اصطلاح عملگر خطی به معنای تبدیل خطی از یک فضا به خودش است. به این ترتیب عملگر خطی (با انتخاب یک پایهٔ مناسب) با ماتریس مربع متناظر است.

در سراسر این مقاله، n عدد صحیح مثبت، V فضای برداری مختلط nبعدی، T یک عملگر خطی روی V، و I عملگر همانی را نشان می‌دهد.

عدد مختلط λ، مقدار ویژهٔ T خوانده می‌شود اگر $T-\lambda I$ یک به یک نباشد. نتیجهٔ اساسی در مورد مقدارهای ویژه با اثبات سادهٔ عاری از دترمینان به این صورت است:

قضیهٔ ۱.۲. هر عملگر خطی روی یک فضای برداری مختلطِ متناهی‌بعد، مقدار ویژه‌ای دارد.

اثبات: برای اینکه نشان دهیم T (عملگر خطی موردنظر روی V) مقدار ویژه دارد، بردار ناصفر $v \in V$ را در نظر می‌گیریم. بردارهای v، Tv، T^2v، …، T^nv نمی‌توانند مستقل خطی باشند زیرا بعد V، n است و در اینجا $n+1$ بردار داریم. از این رو اعداد مختلط a_0، a_1، …، a_n که همگی صفر نیستند موجودند به‌طوری که

$$a_0v + a_1Tv + \cdots + a_nT^nv = 0$$

aها را ضرایب یک چندجمله‌ای قرار می‌دهیم که بتوان آن را به‌صورت

$$a_0 + a_1z + \ldots + a_nz^n = c(z-r_1)\ldots(z-r_m)$$

تجزیه کرد که در آن c یک عدد مختلط ناصفر است، r_jها اعداد مختلط‌اند و تساوی به‌ازای هر عدد مختلط z برقرار است. آنگاه داریم

$$\begin{aligned} 0 &= (a_0I + a_1T + \ldots + a_nT^n)v \\ &= c(T-r_1I)\ldots(T-r_mI)v \end{aligned}$$

1. Henry Tacher 2. "Turbo Pascal Numerical Methods Toolbox", SIAM News, September 1988.

و این یعنی به‌ازای دست‌کم یک j، $T-r_jI$ یک به یک نیست. به عبارت دیگر T یک مقدار ویژه دارد. □

یادآوری می‌کنیم که بردار $v \in V$، بردار ویژهٔ T خوانده می‌شود اگر به ازای مقدار ویژه‌ای مانند λ، $Tv = \lambda v$. گزارهٔ زیر که اثبات سادهٔ عاری از دترمینان دارد، به وضوح دلالت بر آن دارد که تعداد مقادیر ویژهٔ متمایز T نمی‌تواند از بُعد V تجاوز کند.

گزارهٔ ۲.۲. بردارهای ویژهٔ ناصفر وابسته به مقادیر ویژهٔ متمایز T مستقل خطی‌اند.

اثبات: فرض کنید v_1، …، v_m بردارهای ویژهٔ ناصفری از T وابسته به مقدارهای ویژهٔ متمایز λ_1، …، λ_m باشند. می‌خواهیم ثابت کنیم که v_1، …، v_m مستقل خطی‌اند. برای این کار، فرض کنید a_1، …، a_m عددهای مختلطی باشند که

$$a_1v_1 + \ldots + a_mv_m = 0$$

اگر عملگر خطی $(T-\lambda_2I)(T-\lambda_3I)\cdots(T-\lambda_mI)$ را بر دو طرف این معادله اثر دهیم، به‌دست می‌آوریم

$$a_1(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)\cdots(\lambda_1-\lambda_m)v_1 = 0$$

لذا $a_1 = 0$. به طریق مشابه به‌ازای هر j داریم $a_j = 0$ و این همان است که می‌خواستیم. □

۳. بردارهای ویژهٔ تعمیم‌یافته

متأسفانه بردارهای ویژهٔ T لزوماً فضای V را تولید نمی‌کنند. برای مثال، عملگر خطی روی $\mathbb{C}^2$ با ماتریس

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

فقط یک مقدار ویژه دارد که صفر است و بردارهای ویژهٔ وابسته به آن یک زیرفضای یک‌بعدی $\mathbb{C}^2$ را تشکیل می‌دهند. با این حال خواهیم دید که بردارهای ویژهٔ تعمیم‌یافتهٔ T (که در زیر تعریف می‌شوند) همیشه V را تولید می‌کنند.

بردار $v \in V$ بردار ویژهٔ تعمیم‌یافتهٔ T خوانده می‌شود اگر به‌ازای مقدار ویژه‌ای چون λ از T و عدد صحیح مثبتی چون k،

$$(T-\lambda I)^kv = 0$$

روشن است که مجموعهٔ بردارهای ویژهٔ تعمیم‌یافته‌ای از T که وابسته به مقدار ویژهٔ λاند، زیرفضای V است. لم زیر نشان می‌دهد که در تعریف بردار ویژهٔ تعمیم‌یافته به جای در نظر گرفتن توان دلخواهی از $T-\lambda I$ که v را صفر کند، می‌توانیم توجه خود را به توان nام، که n مساوی با بعد V است، محدود کنیم. طبق معمول، ker [مخفف kernel] به معنیِ هستهٔ عملگر T (مجموعهٔ بردارهایی که به ۰ نگاشته می‌شوند) است.

لم ۱.۳. مجموعهٔ بردارهای ویژهٔ تعمیم‌یافته‌ای از T که وابسته به مقدار ویژه‌ای چون λاند، برابر است با $\ker(T-\lambda I)^n$.

اثبات: روشن است که هر عنصر $\ker(T-\lambda I)^n$ یک بردار ویژهٔ تعمیم‌یافتهٔ T وابسته به λ است. برای اثبات شمول در جهت عکس، گیریم v یک بردار ویژهٔ تعمیم‌یافتهٔ T باشد که وابسته به λ است. می‌خواهیم ثابت کنیم که $(T-\lambda I)^n v = 0$. واضح است که می‌توان فرض کرد $v \neq 0$، لذا کوچکترین عدد صحیح نامنفی k موجود است که $(T-\lambda I)^k v = 0$. اگر نشان دهیم $k \le n$، کار تمام می‌شود. این مطلب هم در صورتی که نشان دهیم

$$v, (T-\lambda I)v, (T-\lambda I)^2 v, \ldots, (T-\lambda I)^{k-1} v \qquad (۲.۳)$$

بردارهای مستقل خطی‌اند، ثابت می‌شود؛ زیرا در این صورت k بردار مستقل خطی در یک فضای برداری nبعدی خواهیم داشت که نتیجه می‌دهد $k \le n$.

برای اینکه ثابت کنیم بردارهای (۲.۳) مستقل خطی‌اند، فرض می‌کنیم $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}$ اعداد مختلطی باشند که

$$a_0 v + a_1 (T-\lambda I)v + \cdots + a_{k-1}(T-\lambda I)^{k-1}v = 0 \qquad (۳.۳)$$

با اثر دادن عملگر $(T-\lambda I)^{k-1}$ بر دو طرف معادلهٔ بالا به‌دست می‌آوریم $a_0 (T-\lambda I)^{k-1} v = 0$ که نتیجه می‌دهد $a_0 = 0$. اکنون عملگر $(T-\lambda I)^{k-2}$ را بر دو طرف (۳.۳) اثر می‌دهیم و به‌دست می‌آوریم $a_1(T-\lambda I)^{k-1}v = 0$ که نتیجه می‌دهد $a_1 = 0$. با ادامهٔ این کار می‌بینیم که به‌ازای هر j، $a_j = 0$، و این همان است که می‌خواستیم. □

نتیجهٔ زیر، ابزار اصلی ما در توصیف ساختار یک عملگر خطی خواهد بود.

گزارهٔ ۴.۳. بردارهای ویژهٔ تعمیم‌یافتهٔ T، فضای V را تولید می‌کنند.

اثبات: اثبات به استقرا روی n، بعد V، انجام می‌گیرد. روشن است که وقتی $n = 1$، حکم برقرار است.

فرض کنید $n > 1$ و حکم برای همهٔ فضاهای برداری با بعد کمتر از n برقرار باشد. گیریم λ یک مقدار ویژهٔ T باشد (که بنابر قضیهٔ ۱.۲ وجود دارد). ابتدا نشان می‌دهیم که

$$V = \underbrace{\ker(T-\lambda I)^n}_{V_1} \oplus \underbrace{\operatorname{ran}(T-\lambda I)^n}_{V_2} \qquad (۵.۳)$$

در اینجا طبق معمول، ran [مخفف range] نشان‌دهندهٔ برد است. برای اثبات (۵.۳) فرض کنید $v \in V_1 \cap V_2$. در این صورت $(T-\lambda I)^n v = 0$ و $u \in V$ موجود است به‌طوری‌که $(T-\lambda I)^n u = v$. با اثر دادن $(T-\lambda I)^n$ بر دو طرف معادلهٔ اخیر به‌دست می‌آوریم $(T-\lambda I)^{2n}u = 0$. از اینجا (طبق لم ۱.۳) نتیجه می‌شود که $(T-\lambda I)^n u = 0$ و در نتیجه $v = 0$. از این رو

$$V_1 \cap V_2 = \{0\} \qquad (۶.۳)$$

چون V_1 و V_2 هسته و برد یک عملگر خطی روی V هستند، داریم

$$\dim V = \dim V_1 + \dim V_2 \qquad (۷.۳)$$

روابط (۶.۳) و (۷.۳)، تساوی (۵.۳) را نتیجه می‌دهند.

توجه کنید که $V_1 \neq \{0\}$ (زیرا λ یک مقدار ویژهٔ T است)، و بنابراین $\dim V_2 < n$. به‌علاوه چون T با $(T-\lambda I)^n$ جابه‌جا می‌شود، به‌راحتی می‌بینیم که T، V_2 را به‌توی V_2 می‌نگارد. بنابر فرض استقرا، بردارهای ویژهٔ تعمیم‌یافتهٔ $T|_{V_2}$، فضای V_2 را تولید می‌کنند. این بردارها به‌وضوح بردارهای ویژهٔ تعمیم‌یافتهٔ T نیز هستند. همهٔ اعضای V_1 بردارهای ویژهٔ تعمیم‌یافتهٔ T هستند و بنابراین (۵.۳) نتیجهٔ مطلوب را به‌دست می‌دهد. □

نتیجهٔ جالب گزارهٔ اخیر این است که اگر ۰ تنها مقدار ویژهٔ T باشد، آنگاه T پوچتوان است (یادآوری می‌کنیم که یک عملگر پوچتوان خوانده می‌شود اگر توانی از آن برابر صفر باشد). اثبات این مطلب به این ترتیب است که اگر ۰ تنها مقدار ویژهٔ T باشد، آنگاه هر بردار در V بردار ویژهٔ تعمیم‌یافته‌ای از T وابسته به مقدار ویژهٔ ۰ است (بنابر گزارهٔ ۴.۳). حال از لم ۱.۳ نتیجه می‌گیریم $T^n = 0$.

بردارهای ویژهٔ ناصفر وابسته به مقدارهای ویژهٔ متمایز، مستقل خطی‌اند (گزارهٔ ۲.۲). ما به حکم مشابهی نیاز داریم که در بارهٔ بردارهای ویژهٔ تعمیم‌یافته، به جای بردارهای ویژه، باشد. این حکم را می‌توان به پیروی از الگوی اساسی اثبات گزارهٔ ۲.۲ ثابت کرد و هم‌اکنون این کار را می‌کنیم.

گزارهٔ ۸.۳. بردارهای ویژهٔ تعمیم‌یافتهٔ ناصفر وابسته به مقدارهای ویژهٔ متمایز T، مستقل خطی‌اند.

اثبات: فرض کنید $v_1, \ldots, v_m$ بردارهای ویژهٔ تعمیم‌یافتهٔ ناصفری از T وابسته به مقدارهای ویژهٔ متمایز $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ باشند. می‌خواهیم ثابت کنیم که $v_1, \ldots, v_m$ مستقل خطی‌اند. برای این کار فرض کنید $a_1, \ldots, a_m$ اعداد مختلطی باشند که

$$a_1 v_1 + \ldots + a_m v_m = 0 \qquad (۹.۳)$$

گیریم k کوچکترین عدد صحیح مثبت باشد که $(T-\lambda_1 I)^k v_1 = 0$. اگر عملگر خطی

$$(T-\lambda_1 I)^{k-1}(T-\lambda_2 I)^n \ldots (T-\lambda_m I)^n$$

را بر دو طرف (۹.۳) اثر دهیم، به‌دست می‌آوریم

$$a_1 (T-\lambda_1 I)^{k-1}(T-\lambda_2 I)^n \ldots (T-\lambda_m I)^n v_1 = 0 \qquad (۱۰.۳)$$

که در اینجا از لم ۱.۳ استفاده کرده‌ایم. اگر عبارت

$$(T-\lambda_2 I)^n \ldots (T-\lambda_m I)^n$$

در (۱۰.۳) را به‌صورت

$$((T-\lambda_1 I)+(\lambda_1-\lambda_2)I)^n \ldots ((T-\lambda_1 I)+(\lambda_1-\lambda_m)I)^n$$

بازنویسی کنیم و آنگاه هر $((T-\lambda_1 I)+(\lambda_1-\lambda_j)I)^n$ را با استفاده از قضیهٔ دوجمله‌ای بسط دهیم و همهٔ ضربها را انجام دهیم، مجموعی از جملات را به‌دست می‌آوریم. بجز جملهٔ

$$(\lambda_1-\lambda_2)^n \ldots (\lambda_1-\lambda_m)^n I$$

هر جمله در این مجموع شامل توانی از $(T-\lambda_1 I)$ است که وقتی با $(T-\lambda_1 I)^{k-1}$ در چپ و v_1 در راست (۱۰.۳) ترکیب شود، ۰ را نتیجه می‌دهد. بنابراین (۱۰.۳) به معادلهٔ

$$a_1(\lambda_1-\lambda_2)^n\dots(\lambda_1-\lambda_m)^n(T-\lambda_1 I)^{k-1}v_1=0$$

تبدیل می‌شود. لذا $a_1=0$. به طریق مشابه، به‌ازای هر j، $a_j=0$ که همان نتیجهٔ مورد نظر است. □

حال می‌توانیم همهٔ این چیزها را در قضیهٔ ساختاری زیر گرد آوریم. بنابر بخش (ب) این قضیه، هر تبدیل خطی را در بخشهای (ج) و (د) می‌توانیم به‌صورت یک عملگر خطی از U_j به خودش تعبیر کنیم.

قضیهٔ ۱۱.۳. فرض کنید $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ مقدارهای ویژهٔ متمایزی از T و $U_1, \dots, U_m$ مجموعه‌های بردارهای ویژهٔ تعمیم‌یافتهٔ نظیر آنها باشند. در این صورت

(الف) $V=U_1\oplus\dots\oplus U_m$؛

(ب) T، هر U_j را به‌توی خودش می‌نگارد؛

(ج) هر $(T-\lambda_j I)|_{U_j}$ پوچتوان است؛

(د) هر $T|_{U_j}$ تنها یک مقدار ویژه دارد، که λ_j است.

اثبات: بخش (الف) بلافاصله از گزاره‌های ۸.۳ و ۴.۳ نتیجه می‌شود.

برای اثبات (ب) فرض کنید $v\in U_j$. پس به‌ازای عدد صحیح مثبتی چون k داریم $(T-\lambda_j I)^k v=0$. در نتیجه

$$(T-\lambda_j I)^k Tv = T(T-\lambda_j I)^k v = T(0)=0$$

بنابراین $Tv\in U_j$ که همان نتیجهٔ مطلوب است.

اثبات (ج) مستقیماً از تعریف بردار ویژهٔ تعمیم‌یافته و لم ۱.۳ به‌دست می‌آید.

برای اثبات (د) فرض کنید λ' مقدار ویژه‌ای از $T|_{U_j}$ با بردار ویژهٔ ناصفر متناظر $v\in U_j$ باشد. در این صورت $(T-\lambda_j I)v=(\lambda'-\lambda_j)v$ و لذا به‌ازای هر عدد صحیح مثبت k

$$(T-\lambda_j I)^k v=(\lambda'-\lambda_j)^k v$$

چون v بردار ویژهٔ تعمیم‌یافته‌ای از T وابسته به λ_j است، طرف چپ این تساوی به‌ازای kای صفر می‌شود. در نتیجه $\lambda_j=\lambda'$ و حکم ثابت می‌شود. □

۴. چندجمله‌ای مینیمال

چون فضای عملگرهای خطی روی V، متناهی بعد است، کوچکترین عدد صحیح مثبت k موجود است به‌طوری که

$$I, T, T^2, \dots, T^k$$

مستقل خطی نیستند. پس اعداد مختلط یکتای $a_0, \dots, a_{k-1}$ موجودند که

$$a_0 I + a_1 T + a_2 T^2+\dots+a_{k-1}T^{k-1}+T^k=0$$

چندجمله‌ای

$$a_0+a_1z+a_2z^2+\dots a_{k-1}z^{k-1}+z^k$$

چندجمله‌ای مینیمال T نامیده می‌شود. این چندجمله‌ای، چندجمله‌ای یکین[1] p با کوچکترین درجه است به‌طوری که $p(T)=0$ (چندجمله‌ای یکین، چندجمله‌ایی است که ضریب جملهٔ دارای بزرگترین درجه در آن ۱ است).

قضیهٔ زیر، چندجمله‌ای مینیمال را به تجزیهٔ V به مجموع مستقیم بردارهای ویژهٔ تعمیم‌یافته ربط می‌دهد.

قضیهٔ ۱.۴. فرض می‌کنیم $\lambda_1,\dots,\lambda_m$ مقدارهای ویژهٔ متمایز T، و U_j مجموعهٔ بردارهای ویژهٔ تعمیم‌یافته وابسته به مقدار ویژهٔ λ_j باشد و گیریم α_j کوچکترین عدد صحیح مثبت باشد به‌طوری که به‌ازای هر $v\in U_j$، $(T-\lambda_j I)^{\alpha_j}v=0$. همچنین فرض می‌کنیم

$$p(z)=(z-\lambda_1)^{\alpha_1}\dots(z-\lambda_m)^{\alpha_m}$$

در این صورت

(الف) p چندجمله‌ای مینیمال T است؛

(ب) درجهٔ p حداکثر برابر با $\dim V$ است؛

(ج) اگر q چندجمله‌ایی باشد که $q(T)=0$، آنگاه q، مضرب p است.

اثبات: ابتدا (ب) را ثابت می‌کنیم، آنگاه (ج) و سرانجام (الف) را.

برای اثبات (ب)، توجه می‌کنیم که هر α_j، حداکثر برابر با بعد U_j است (بنابر لم ۱.۳ در مورد $T|_{U_j}$). چون $V=U_1\oplus\dots\oplus U_m$ (بنابر قضیهٔ ۱۱.۳ (الف))، مجموع α_jها حداکثر برابر با بعد V است. پس (ب) ثابت می‌شود.

برای اثبات (ج) فرض کنید q چندجمله‌ایی باشد که $q(T)=0$. اگر نشان دهیم که q مضرب هر کدام از $(z-\lambda_j)^{\alpha_j}$هاست آنگاه (ج) ثابت خواهد شد. برای این کار، j را ثابت می‌گیریم. چندجمله‌ای q به شکل

$$q(z)=c(z-r_1)^{\delta_1}\dots(z-r_M)^{\delta_M}(z-\lambda_j)^{\delta}$$

است که در آن $c\in\mathbb{C}$، r_kها اعداد مختلط هستند که همگی مخالف λ_jاند، δ_kها اعداد صحیح مثبت‌اند و δ یک عدد صحیح نامنفی است. اگر $c=0$، کار تمام است، پس فرض کنید $c\neq 0$. گیریم $v\in U_j$. آنگاه (بنابر قضیهٔ ۱۱.۳ (ب))، $(T-\lambda_j I)^{\delta} v$ نیز در U_j است. حال داریم

$$c(T-r_1I)^{\delta_1}\dots(T-r_MI)^{\delta_M}(T-\lambda_jI)^{\delta} v=q(T)v=0$$

و $(T-r_1I)^{\delta_1}\dots(T-r_MI)^{\delta_M}$ روی U_j (بنابر قضیهٔ ۱۱.۳ (د)) یک به یک است. در نتیجه $(T-\lambda_jI)^{\delta} v=0$. چون v عنصر دلخواهی از U_j بود، از اینجا نتیجه می‌شود $\alpha_j\le\delta$. پس q مضرب $(z-\lambda_j)^{\alpha_j}$ است و لذا (ج) ثابت می‌شود.

برای اثبات (الف) فرض کنید v برداری در U_jای باشد. اگر جملات $(T-\lambda_1I)^{\alpha_1}\dots(T-\lambda_mI)^{\alpha_m}$ (که مساوی $p(T)$ است) را طوری جابه‌جا کنیم که $(T-\lambda_jI)^{\alpha_j}$ در سمت راست قرار گیرد، می‌بینیم که

1. monic

$p(T)v = ۰$. چون $U_۱$، ...، U_m (طبق قضیهٔ ۱۱.۳ (الف)) V را تولید می‌کنند، نتیجه می‌گیریم که $p(T) = ۰$. به عبارت دیگر p یک چندجمله‌ای یکین است که T را صفر می‌کند. با توجه به (ج) می‌دانیم که هیچ چندجمله‌ای یکین با درجهٔ کوچکتر این ویژگی را ندارد. از این‌رو p باید چندجمله‌ای مینیمال T باشد و این، اثبات را کامل می‌کند. □

ملاحظه می‌کنید که با پرهیز از به کار بردن دترمینان به‌طور طبیعی به سمت توصیف چندجمله‌ای مینیمال برحسب بردارهای ویژهٔ تعمیم‌یافته کشیده شدیم.

۵. چندگانگی و چندجمله‌ای مشخصه

بنا به تعریف، چندگانگی (درجهٔ تکرار) یک مقدار ویژهٔ T چون λ، بُعد مجموعهٔ بردارهای ویژهٔ تعمیم‌یافته‌ای از T است که وابسته به λ هستند. فوراً ملاحظه می‌کنیم که مجموع چندگانگیهای همهٔ مقدارهای ویژهٔ T برابر با n، بعد V، است (بنابر قضیهٔ ۱۱.۳ (الف)). توجه کنید که این تعریفِ چندگانگی رابطهٔ روشنی با رفتار هندسی T دارد، حال آنکه تعریف متداول آن (به عنوان چندگانگی ریشهٔ چندجمله‌ای $\det(zI - T)$) شیئی را تعریف می‌کند که معنی روشنی ندارد.

فرض کنید $\lambda_۱$، ...، λ_m مقدارهای ویژهٔ متمایز T با چندگانگیهای متناظر $\beta_۱$، ...، β_m باشند. چندجمله‌ای

$$(z-\lambda_۱)^{\beta_۱}\dots(z-\lambda_m)^{\beta_m} \qquad (۱.۵)$$

چندجمله‌ای مشخصهٔ T خوانده می‌شود. روشن است که این، یک چندجمله‌ای از درجهٔ n است.

در تعریف متداول، چندجمله‌ای مشخصه به کمک دترمینان تعریف می‌شود و سپس برای اثبات وجود مقدارهای ویژه به کار می‌رود. رهیافتی که ما انتخاب کرده‌ایم و در آن به دترمینان اشاره‌ای نمی‌شود، درست برعکس این است. ابتدا نشان دادیم که T، با احتساب چندگانگیها، n مقدار ویژه دارد و آنگاه از این مطلب برای ارائهٔ تعریف طبیعی‌تر چندجمله‌ای مشخصه استفاده کردیم. («احتساب چندگانگیها» به این معنی است که هر مقدار ویژه به تعداد دفعات تکرارش محاسبه می‌شود.)

نتیجهٔ زیر، قضیهٔ کیلی–همیلتن نامیده می‌شود. با رهیافتی که ما برگزیده‌ایم، اثبات آن سهل است.

قضیهٔ ۲.۵. فرض کنید q چندجمله‌ای مشخصهٔ T باشد. در این صورت $q(T) = ۰$.

اثبات: فرض کنیم U_j و α_j همان‌طور باشند که در قضیهٔ ۱.۴ بودند، و گیریم β_j مساوی با بعد U_j باشد. همان‌طور که قبلاً دیدیم (با به کار بردن لم ۱.۳ در مورد $T|_{U_j}$)، $\alpha_j \le \beta_j$. بنابراین چندجمله‌ای مشخصهٔ (۱.۵)، مضرب چندجمله‌ای مینیمال (۲.۴) است. پس چندجمله‌ای مشخصه باید T را صفر کند. □

۶. شکل بالامثلثی

یک ماتریس مربع، بالامثلثی خوانده می‌شود اگر همهٔ درایه‌های زیر قطر اصلی آن ۰ باشد. هدف بعدی ما این است که نشان دهیم هر عملگر خطی، با انتخاب یک پایهٔ مناسب، دارای یک ماتریس بالامثلثی است. با عملگرهای پوچتوان آغاز می‌کنیم؛ و آنگاه قضیهٔ ساختاری اساسی ما، نتیجه را به سادگی برای عملگرهای خطی دلخواه به‌دست خواهد داد.

لم ۱.۶. فرض کنید T پوچتوان باشد. در این صورت پایه‌ای برای V وجود دارد که درایه‌های ماتریس T نسبت به این پایه در رو و زیر قطر اصلی، صفرند.

اثبات: ابتدا پایه‌ای برای $\ker T$ انتخاب می‌کنیم. آنگاه آن را به پایه‌ای برای $\ker T^۲$ گسترش می‌دهیم. سپس آن را به پایه‌ای برای $\ker T^۳$ بسط می‌دهیم، و به همین ترتیب، تا در نهایت پایه‌ای برای V به‌دست آید. واضح است که ماتریس T نسبت به این پایه، به شکل مطلوب است. □

اکنون با دوری جستن از دترمینان و استفاده از بردارهای ویژهٔ تعمیم‌یافته، می‌توانیم به‌سادگی ثابت کنیم که هر عملگر خطی را می‌توان به شکل بالامثلثی درآورد: درواقع نتیجه‌ای بهتر از این به‌دست خواهیم آورد، زیرا ماتریس ظاهر شده در قضیهٔ زیر بیش از آن مقدار که برای بالامثلثی بودن لازم است، صفر دارد.

قضیهٔ ۲.۶. فرض کنید $\lambda_۱$، $\lambda_۲$، ...، λ_m مقدارهای ویژهٔ متمایز T باشند. در این صورت پایه‌ای برای V وجود دارد که نسبت به آن ماتریس T به شکل زیر است

$$\begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix}\lambda & * \\ ۰ & \lambda_۱\end{matrix}} & & & \\ & \boxed{\begin{matrix}\lambda_۲ & & * \\ & \ddots & \\ ۰ & & \lambda_۲\end{matrix}} & & \\ & & \ddots & \\ ۰ & & & \boxed{\begin{matrix}\lambda_m & & * \\ & \ddots & \\ ۰ & & \lambda_m\end{matrix}} \end{bmatrix}$$

اثبات: این مطلب بلافاصله از قضیهٔ ۱۱.۳ و لم ۱.۶ نتیجه می‌شود. □

در بسیاری از کاربردهای سنتی صورت ژوردان، قضیهٔ بالا را می‌توان به‌کار برد. اگر صورت ژوردان واقعاً لازم باشد، چنانکه بسیاری اثباتهای متعارف (بدون دترمینان) نشان می‌دهند، هر عملگر پوچتوان را می‌توان به صورت ژوردان درآورد. سپس نتیجه برای عملگرهای خطی کلیتر از قضیهٔ ۱۱.۳ به‌دست می‌آید.

۷. قضیهٔ طیفی

در این بخش فرض می‌کنیم که $\langle , \rangle$ یک ضرب داخلی روی V باشد. بهترین عملگرهای خطی روی V آنهایی هستند که بردارهای ویژه‌شان یک پایهٔ متعامد یکه برای V تشکیل می‌دهند. ماتریس عملگر خطی نسبت به چنین پایه‌ای قطری است، به این معنا که تمام درایه‌های آن جز آنها که روی قطر اصلی قرار دارند و همان مقادیر ویژه‌اند، صفرند. قضیه‌ای طیفی که در این

بخش ثابت خواهیم کرد، دقیقاً آن عملگرهای خطی را مشخص می‌کند که بردارهای ویژه‌شان یک پایهٔ متعامد یکه برای V تشکیل می‌دهند.

یادآوری می‌کنیم که الحاقی T، عملگر خطی یکتای T^* روی V است، به‌طوری که به‌ازای هر $u, v \in V$

$$\langle Tu, v\rangle = \langle u, T^*v\rangle$$

عملگر خطی T، نرمال خوانده می‌شود اگر T با الحاقی‌اش جابه‌جا شود؛ به عبارت دیگر T نرمال است اگر $TT^* = T^*T$. عملگر خطی T، خودالحاق نامیده می‌شود اگر $T = T^*$. روشن است که هر عملگر خودالحاق، نرمال است. خواهیم دید که عملگرهای نرمال دقیقاً همان عملگرهایی هستند که می‌شود آنها را با یک پایهٔ متعامد یکه قطری کرد. برای اثبات این مطلب به چند حکم مقدماتی نیازمندیم. توجه کنید که اگر T خودالحاق باشد، لم زیر بدیهی خواهد بود.

لم ۱.۷. اگر T نرمال باشد، آنگاه $\ker T = \ker T^*$.

اثبات: اگر T نرمال باشد و $v \in V$، آنگاه

$$\langle Tv, Tv\rangle = \langle T^*Tv, v\rangle = \langle TT^*v, v\rangle = \langle T^*v, T^*v\rangle$$

از این رو $Tv = 0$ اگر و فقط اگر $T^*v = 0$. □

گزارهٔ زیر همراه با نتیجهٔ قبلی مبنی بر اینکه بردارهای ویژهٔ تعمیم‌یافتهٔ یک عملگر خطی فضای دامنه را تولید می‌کنند (گزارهٔ ۴.۳)، نشان می‌دهند که بردارهای ویژهٔ یک عملگر نرمال، دامنه را تولید می‌کنند.

گزارهٔ ۲.۷. هر بردار ویژهٔ تعمیم‌یافتهٔ یک عملگر نرمال، یک بردار ویژهٔ آن عملگر است.

اثبات: فرض کنید T نرمال است. ثابت می‌کنیم که به‌ازای هر عدد صحیح مثبت k

$$\ker T^k = \ker T \qquad (۳.۷)$$

اگر این تساوی ثابت شود، اثبات گزاره به انجام می‌رسد زیرا می‌توانیم به جای T در (۳.۷)، $T - \lambda I$ را که در آن $\lambda \in \mathbb{C}$ دلخواه است قرار دهیم.

(۳.۷) را با استقرا روی k ثابت می‌کنیم. روشن است که به‌ازای $k = 1$ نتیجه برقرار است. حال فرض کنید k عدد صحیح مثبتی باشد که به‌ازای آن (۳.۷) برقرار است. گیریم $v \in \ker T^{k+1}$. آنگاه $T(T^k v) = T^{k+1}v = 0$. به‌عبارت دیگر $T^k v \in \ker T$ و لذا $T^*(T^k v) = 0$ (بنابر لم ۱.۷). از این‌رو

$$0 = \langle T^*(T^k v), T^{k-1}v\rangle = \langle T^k v, T^k v\rangle$$

پس $v \in \ker T^k$ که نتیجه می‌دهد $v \in \ker T$ (بنابر فرض استقرا). در نتیجه $\ker T^{k+1} = \ker T$، و اثبات به‌انجام رسیده است. □

از گزارهٔ اخیر همراه با گزارهٔ ۴.۳ نتیجه می‌گیریم که یک عملگر نرمال را می‌توان با یک پایهٔ مناسب قطری کرد. گزارهٔ بعدی نشان می‌دهد که این کار را می‌توان با یک پایهٔ متعامد یکه انجام داد.

گزارهٔ ۴.۷. برای یک عملگر نرمال، بردارهای ویژهٔ وابسته به مقدارهای ویژهٔ متمایز، متعامدند.

اثبات: فرض کنید T نرمال باشد و α و λ مقدارهای ویژهٔ متمایزی از T باشند که بردارهای ویژهٔ متناظر آنها u و vاند. پس $(T - \lambda I)v = 0$ و $(T^* - \bar{\lambda} I)v = 0$ (بنابر لم ۱.۷). به‌عبارت دیگر v یک بردار ویژهٔ T^* وابسته به مقدار ویژهٔ $\bar{\lambda}$ است. حال

$$\begin{aligned}(\alpha - \lambda)\langle u, v\rangle &= \langle \alpha u, v\rangle - \langle u, \bar{\lambda} v\rangle \\ &= \langle Tu, u\rangle - \langle u, T^*v\rangle \\ &= \langle Tu, v\rangle - \langle Tu, v\rangle \\ &= 0\end{aligned}$$

در نتیجه $\langle u, v\rangle = 0$ که همان نتیجهٔ مطلوب است. □

اکنون همهٔ این مطالب را گرد هم آورده، قضیهٔ طیفی متناهی بعد را برای فضاهای ضرب داخلی مختلط به‌دست می‌آوریم.

قضیهٔ ۵.۷. پایهٔ متعامد یکه‌ای متشکل از بردارهای ویژهٔ T برای V موجود است اگر و فقط اگر T نرمال باشد.

اثبات: برای اثبات طرف سادهٔ این قضیه، ابتدا فرض کنید یک پایهٔ متعامد یکه برای V مرکب از بردارهای ویژهٔ T موجود باشد. T نسبت به این پایه یک ماتریس قطری دارد. ماتریس T^* (نسبت به همین پایه) با گرفتن مزدوج ترانهادهٔ ماتریس T به‌دست می‌آید؛ از این‌رو T^* نیز ماتریس قطری دارد. هر دو ماتریس قطری جابه‌جا می‌شوند، پس T و T^* جابه‌جا می‌شوند، یعنی T نرمال است.

برای اثبات طرف دیگر، فرض کنید که T نرمال است. به‌ازای هر مقدار ویژهٔ T پایهٔ متعامد یکه‌ای برای مجموعهٔ بردارهای ویژهٔ وابسته به آن انتخاب می‌کنیم. اجتماع این پایه‌ها (یکی برای هر مقدار ویژه) باز هم یک مجموعهٔ متعامد یکه است، زیرا (بنابر گزارهٔ ۴.۷) بردارهای ویژهٔ نظیر مقدارهای ویژهٔ متمایز، متعامدند. فضای تولید شده توسط این اجتماع، هر بردار ویژهٔ T را (بنابر ساختارش) و در نتیجه هر بردار ویژهٔ تعمیم یافتهٔ T را (بنابر گزارهٔ ۲.۷) شامل می‌شود. اما بردارهای ویژهٔ تعمیم یافتهٔ T (بنابر گزارهٔ ۴.۳) فضای V را تولید می‌کنند و لذا یک پایهٔ متعامد یکه برای V داریم که از بردارهای ویژهٔ T تشکیل شده است. □

گزارهٔ زیر در بخش بعد، وقتی می‌خواهیم قضیهٔ طیفی را برای فضاهای ضرب داخلی حقیقی ثابت کنیم، لازم خواهد آمد.

گزارهٔ ۶.۷. هر مقدار ویژهٔ یک عملگر خودالحاق، عددی حقیقی است.

اثبات: فرض کنیم T خودالحاق باشد. گیریم λ یک مقدار ویژهٔ T باشد و v بردار ناصفری در V که $Tv = \lambda v$. آنگاه

$$\lambda \| v \|^2 = \langle \lambda v, v\rangle = \langle Tv, v\rangle = \langle v, Tv\rangle = \langle v, \lambda v\rangle = \bar{\lambda} \| v \|^2$$

در نتیجه $\bar{\lambda} = \lambda$ و این همان‌طور که می‌خواستیم، به این معنی است که λ حقیقی است □

۸. حقیقی‌سازی

تاکنون فقط به فضاهای برداری مختلط پرداخته‌ایم. ولی همان‌طورکه خواهیم دید، هر فضای برداری حقیقی U را می‌توان به طرز طبیعی در یک فضای برداری مختلط به‌نام مختلط شدهٔ U نشاند و با توسیع هر عملگر خطی روی U می‌توان آن‌را به یک عملگر خطی روی مختلط‌شدهٔ U تبدیل کرد. در این صورت نتایج مربوط به عملگرهای خطی روی فضاهای برداری مختلط را می‌توان به اطلاعاتی دربارهٔ عملگرهای خطی روی فضاهای برداری حقیقی تبدیل کرد. ببینیم چگونه می‌توان این کارها را انجام داد.

فرض کنید U یک فضای برداری حقیقی باشد. مختلط‌شدهٔ U که با $U_{\mathbb{C}}$ نشان داده می‌شود، مجموعهٔ $U \times U$ است. عنصر نوعی $U_{\mathbb{C}}$، به‌صورت زوج مرتب (u, v) است که $u, v \in U$، اما به دلایلی که بر خواننده واضح است، این عنصر نوعی را به‌صورت $u + iv$ می‌نویسیم. روی $U_{\mathbb{C}}$، جمع را به شکل

$$(u_1 + iv_1) + (u_2 + iv_2) = (u_1 + u_2) + i(v_1 + v_2)$$

تعریف می‌کنیم. نمادگذاری ما خود مبین آن است که ضرب در عدد مختلط روی $U_{\mathbb{C}}$ چگونه باید تعریف شود. به‌ازای $a, b \in \mathbb{R}$ و $u, v \in U$:

$$(a + ib)(u + iv) = (au - bv) + i(av + bu)$$

با این تعریفهای جمع و ضرب در اسکالر، $U_{\mathbb{C}}$ به یک فضای برداری مختلط تبدیل می‌شود. با یکسان گرفتن $u \in U$ با $u + i0$، U را می‌توان زیرمجموعه‌ای از $U_{\mathbb{C}}$ انگاشت. روشن است که هر پایهٔ فضای برداری حقیقی U، پایهٔ فضای برداری مختلط $U_{\mathbb{C}}$ نیز هست. از این‌رو بعد U به‌عنوان یک فضای برداری حقیقی با بعد $U_{\mathbb{C}}$ به‌عنوان یک فضای برداری مختلط مساوی است.

اگر S یک عملگر خطی روی فضای برداری حقیقی U باشد، مختلط‌شدهٔ S که با $S_{\mathbb{C}}$ نشان داده می‌شود عملگری خطی روی $U_{\mathbb{C}}$ است که به‌ازای $u, v \in U$ به‌صورت

$$S_{\mathbb{C}}(u + iv) = Su + iSv$$

تعریف می‌شود. اگر پایه‌ای برای U انتخاب کنیم و آن‌را پایه‌ای برای $U_{\mathbb{C}}$ نیز بینگاریم، آنگاه روشن است که S و $S_{\mathbb{C}}$ هردو یک ماتریس نسبت به این پایه خواهند داشت.

توجه کنید که هر مقدار ویژهٔ حقیقی $S_{\mathbb{C}}$ یک مقدار ویژهٔ S نیز هست (زیرا اگر $a \in \mathbb{R}$ و $S_{\mathbb{C}}(u + iv) = a(u + iv)$، آنگاه $Su = au$ و $Sv = av$). مقدارهای ویژهٔ غیرحقیقی $S_{\mathbb{C}}$ به‌صورت جفت ظاهر می‌شوند. به بیان دقیقتر، به‌ازای عدد صحیح مثبت j، $\lambda \in \mathbb{C}$ و $u, v \in U$، به استقرا روی j به آسانی می‌توان نشان داد که

$$(S_{\mathbb{C}} - \lambda I)^j(u + iv) = 0 \Leftrightarrow (S_{\mathbb{C}} - \bar{\lambda} I)^j(u - iv) = 0 \qquad (۱.۸)$$

اگر $\lambda \in \mathbb{C}$ یک مقدار ویژهٔ $S_{\mathbb{C}}$ باشد، $\bar{\lambda}$ نیز مقدار ویژهٔ آن خواهد بود و چندگانگی λ (که طبق تعریف، بعد مجموعهٔ بردارهای ویژهٔ تعمیم یافته‌ای از $S_{\mathbb{C}}$ است که وابسته به λاند) با چندگانگی $\bar{\lambda}$ برابر است. چون مجموع چندگانگیهای همهٔ مقدارهای ویژهٔ $S_{\mathbb{C}}$ برابر با بعد (مختلط) $U_{\mathbb{C}}$ است (طبق قضیهٔ ۱۱.۳ (الف)) ملاحظه می‌کنیم که اگر بعد (مختلط) $U_{\mathbb{C}}$ فرد باشد، آنگاه $S_{\mathbb{C}}$ باید یک مقدار ویژهٔ حقیقی داشته باشد. مجموع مطالب فوق، اثباتی برای قضیهٔ زیر به‌دست می‌دهد. دوباره می‌بینیم که اثبات عاری از دترمینان نسبت به اثبات متعارف با استفاده از دترمینان، بصیرت بیشتری در مورد دلیل برقراری نتیجه به‌دست می‌دهد.

قضیهٔ ۲.۸. هر عملگر خطی روی یک فضای برداری حقیقی با بعد فرد، مقدار ویژهٔ حقیقی دارد.

بنابه تعریف، چندجمله‌ایهای مینیمال و مشخصهٔ عملگر خطی S روی یک فضای برداری حقیقی، چندجمله‌ایهای متناظر مختلط‌شدهٔ $S_{\mathbb{C}}$ هستند. هر دوی این چندجمله‌ایها، ضرایب حقیقی دارند — این موضوع از (۱.۸) و تعریفهایی که برای چندجمله‌ایهای مینیمال و مشخصه آوردیم، نتیجه می‌شود. خواننده باید بتواند ویژگیهای این چندجمله‌ایها را به آسانی از ویژگیهای متناظر فضاهای برداری مختلط استنتاج کند (قضیه‌های ۱.۴ و ۲.۵).

از روش ما برای انتقال نتایج و احکام از فضاهای برداری مختلط به فضاهای برداری حقیقی همچنین می‌توان در اثبات قضیهٔ طیفی حقیقی استفاده کرد. برای ملاحظهٔ نحوهٔ این کار، حال فرض کنید که U یک فضای ضرب داخلی حقیقی با حاصلضرب داخلی $\langle , \rangle$ است. با تعریف یک ضرب داخلی روی $U_{\mathbb{C}}$ به‌صورت واضح زیر، مختلط‌شدهٔ $U_{\mathbb{C}}$ را به ضرب داخلی مجهز می‌کنیم:

$$\langle u_1 + iv_1, u_2 + iv_2 \rangle = \langle u_1, u_2 \rangle + \langle v_1, v_2 \rangle + i\langle v_1, u_2 \rangle - i\langle u_1, v_2 \rangle$$

توجه کنید که هر پایهٔ متعامد یکهٔ فضای ضرب داخلی حقیقی U، پایهٔ متعامد یکه‌ای از فضای ضرب داخلی مختلط $U_{\mathbb{C}}$ نیز هست.

اگر S یک عملگر خودالحاق روی U باشد، آنگاه روشن است که $S_{\mathbb{C}}$ روی $U_{\mathbb{C}}$ خودالحاق است. حال می‌توانیم قضیهٔ طیفی مختلط (قضیهٔ ۵.۷) را برای $S_{\mathbb{C}}$ به‌کاربریم و با بیان آن روی فضای U قضیهٔ طیفی حقیقی را به‌دست آوریم. در قضیهٔ بعد، بیان رسمی این نتیجه همراه با جزئیات اثبات آن ارائه می‌شود.

قضیهٔ ۳.۸. فرض کنید U یک فضای ضرب داخلی حقیقی و S یک عملگر خطی روی U باشد. آنگاه پایهٔ متعامد یکه‌ای مرکب از بردارهای ویژهٔ S برای U موجود است اگر و فقط اگر S خودالحاق باشد.

اثبات: برای اثبات طرف آسان این قضیه، ابتدا فرض می‌کنیم پایهٔ متعامد یکه‌ای برای S مرکب از بردارهای ویژهٔ S موجود باشد. ماتریس S نسبت به این پایه قطری است. روشن است که ماتریس S^* (نسبت به همین پایه) با ماتریس S برابر است. بنابراین S خودالحاق است.

برای اثبات طرف دیگر قضیه، فرض می‌کنیم S خودالحاق باشد. همان‌طورکه در بالا اشاره شد، از این مطلب نتیجه می‌شود که $S_{\mathbb{C}}$ روی $U_{\mathbb{C}}$ خودالحاق است. پس پایهٔ

$$\{u_1 + iv_1, \ldots, u_n + iv_n\} \qquad (۴.۸)$$

مرکب از بردارهای ویژهٔ $S_{\mathbb{C}}$ برای $U_{\mathbb{C}}$ وجود دارد (بنابر قضیهٔ طیفی مختلط که همان قضیهٔ ۵.۷ است)؛ در اینجا u_j و v_jها همه در U قرار دارند. هر مقدار ویژهٔ $S_{\mathbb{C}}$ (بنابر گزارهٔ ۶.۷) حقیقی است و لذا هر u_j و هر v_j یک بردار ویژهٔ S است. روشن است که مجموعهٔ بردارهای $\{u_1, v_1, \ldots, u_n, v_n\}$، فضای U را تولید می‌کند (زیرا (۴.۸) پایه‌ای برای $U_{\mathbb{C}}$ است). نتیجه اینکه بردارهای ویژهٔ S، فضای U را تولید می‌کنند.

بهازای هر مقدار ویژهٔ S، یک پایهٔ متعامد یکه برای مجموعهٔ بردارهای ویژهٔ وابسته به آن در U انتخاب می‌کنیم. اجتماع این پایه‌ها (یکی برای هر مقدار ویژه) باز متعامد یکه است زیرا بردارهای ویژهٔ وابسته به مقدارهای ویژهٔ متمایز، متعامدند (گزارهٔ ۴.۷). فضای تولید شده توسط این اجتماع، همهٔ بردارهای ویژهٔ S را (بنابر ساختار آن) شامل است. همین الان دیدیم که بردارهای ویژهٔ S، فضای U را تولید می‌کنند، و لذا یک پایهٔ متعامد یکه مرکب از بردارهای ویژهٔ S برای U به‌دست می‌آوریم، که همان نتیجهٔ مطلوب است. □

۹. دترمینان

تا اینجا بیشتر قضیه‌های ساختاری مهم جبر خطی را بدون اینکه حتی دترمینان را تعریف کنیم، ثابت کرده‌ایم. در این بخش تعریف ساده‌ای از دترمینان ارائه خواهیم کرد که کاربرد موجه اصلی آن در ریاضیات دورهٔ کارشناسی، در فرمول تعویض متغیر برای انتگرالهای چندگانه است.

جملهٔ ثابت در چندجمله‌ای مشخصهٔ T، برابر است با به‌علاوه یا منهای حاصلضرب مقادیر ویژهٔ T با احتساب چندگانگی آنها (این مطلب با توجه به تعریف ما از چندجمله‌ای مشخصه واضح است). انگیزهٔ دیگری نیز برای مطالعهٔ حاصلضرب مقدارهای ویژه وجود دارد.

فرض کنید می‌خواهیم بدانیم که چطور می‌شود در یک انتگرال چندگانه روی زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}^n$ تعویض متغیر انجام داد. این مسأله بعد از خطی‌سازی تبدیل می‌شود به اینکه یک عملگر خطی S روی $\mathbb{R}^n$ چگونه حجم را تغییر می‌دهد. حالت خاصی را در نظر می‌گیریم که در آن S خودالحاق است. در این صورت پایهٔ متعامد یکه‌ای برای $\mathbb{R}^n$ متشکل از بردارهای ویژهٔ S وجود دارد (بنابر قضیهٔ طیفی حقیقی که همان قضیهٔ ۳.۸ است). لحظه‌ای تفکر دربارهٔ هندسهٔ یک پایهٔ متعامد یکه از بردارهای ویژه نشان می‌دهد که اگر E زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}^n$ باشد، آنگاه حجم $S(E)$ (هر معنی که بدهد) باید با حجم E ضرب در قدرمطلق حاصلضرب مقدارهای ویژهٔ S، با احتساب چندگانگی آنها، برابر باشد. بعداً ثابت می‌کنیم که حتی برای عملگرهای غیرخودالحاق نیز حکم مشابهی برقرار است. به هر تقدیر، می‌بینیم که حاصلضرب مقدارهای ویژه انگار چیز جالبی است. یک عملگر خطی دلخواه روی یک فضای برداری حقیقی ممکن است اصلاً مقدار ویژه نداشته باشد؛ در این حالت همان روش آشنا را برمی‌گزینیم، یعنی عملگر خطی T را روی یک فضای برداری مختلط V در نظر می‌گیریم. بعد از اینکه نتایج اساسی را روی فضاهای برداری مختلط به‌دست آوردیم، با استفاده از مفهوم مختلط‌سازی که قبلاً بررسی شد، به فضاهای برداری حقیقی می‌پردازیم.

اکنون آماده‌ایم که تعریف صوری دترمینان را بیان کنیم. دترمینان T را، که با $\det T$ نشان داده می‌شود، حاصلضرب مقدارهای ویژهٔ T با احتساب چندگانگی آنها تعریف می‌کنیم. با رعایت سنتی به تعریف مقادیر ویژه، چنین تعریفی برای دترمینان امکان‌پذیر نیست، چون در آن روش از دترمینان برای اثبات وجود مقدار ویژه استفاده می‌شود. با ابزارهایی که در این مقاله به‌کار رفت می‌دانیم که (بنابر قضیه ۱۱.۳ (الف)) T، $\dim V$ تا مقدار ویژه، با احتساب چندگانگی آنها، دارد. بنابراین، این تعریف ساده، با معنی است.

این تعریف علاوه بر سادگی، قضیهٔ زیر را که با تعریف متداول اصلاً واضح نیست، روشن می‌سازد.

قضیهٔ ۱.۹. یک عملگر خطی وارون‌پذیر است اگر و فقط اگر دترمینان آن ناصفر باشد.

اثبات: روشن است که T وارون‌پذیر است اگر و فقط اگر هیچ‌کدام از مقدارهای ویژهٔ آن صفر نباشد. و این حالت رخ می‌دهد اگر و فقط اگر $\det T \neq 0$. □

با تعریفهایی که برای دترمینان و چندجمله‌ای مشخصه آوردیم، فوراً ملاحظه می‌کنیم که جملهٔ ثابت در چندجمله‌ای مشخصه برابر است با $(-1)^n \det T$، که در آن $n = \dim V$. نتیجهٔ زیر مبین واقعیت دیگری نیز هست و آن اینکه تعریفهای ما با تعریفهای مرسوم سازگار است.

قضیهٔ ۲.۹. چندجمله‌ای مشخصهٔ T برابر است با $\det(zI - T)$.

اثبات: گیریم $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ مقدارهای ویژهٔ T با چندگانگیهای $\beta_1, \ldots, \beta_m$ باشند. بنابراین به‌ازای $z \in \mathbb{C}$، مقدارهای ویژهٔ $zI - T$ عبارت‌اند از $z - \lambda_1, \ldots, z - \lambda_m$ با چندگانگیهای $\beta_1, \ldots, \beta_m$. از این‌رو دترمینان $zI - T$ برابر است با حاصلضرب

$$(z - \lambda_1)^{\beta_1} \ldots (z - \lambda_m)^{\beta_m}$$

که همان چندجمله‌ای مشخصهٔ T است. □

توجه کنید که دترمینان تحت تشابه ناورداست. به عبارت دیگر، اگر S یک عملگر خطی وارون‌پذیر روی V باشد، آنگاه T و STS^{-1} دترمینانهای برابر دارند (زیرا مقادیر ویژه‌شان، با احتساب چندگانگی، برابر است).

دترمینان یک ماتریس مربع با درایه‌های مختلط را دترمینان عملگر خطی متناظر با آن (نسبت به یک پایهٔ دلخواه) تعریف می‌کنیم (اینکه چه پایه‌ای انتخاب می‌شود اهمیتی ندارد زیرا دو پایهٔ متفاوت، دو عملگر خطی متشابه به‌وجود می‌آورند که دترمینانهایشان برابر است). پایه‌ای را برای V در نظر می‌گیریم و در ادامهٔ این بخش، عملگرهای خطی روی V را با ماتریسهایشان نسبت به این پایه، یکی می‌گیریم. چگونه می‌توانیم بدون یافتن همهٔ مقدارهای ویژهٔ T، دترمینان آن‌را از روی ماتریسش به‌دست آوریم؟ گرچه پاسخ دادن به این سؤال مشکل است، ولی روشی که در زیر در پیش می‌گیریم، چگونگی کشف فرمول دترمینان را نیز نشان خواهد داد. حتی با دنبال کردن روشی که ما اختیار کرده‌ایم باز هم یافتن دترمینان مشکل است و دقیقاً به همین دلیل است که باید از آن دوری جست.

جستجو برای یافتن فرمول دترمینان را با در نظر گرفتن ماتریسهایی که شکل خاصی دارند آغاز می‌کنیم. گیریم $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$. عملگر خطی

T را که ماتریس آن به‌صورت

$$\begin{bmatrix} ۰ & & & & a_n \\ a_۱ & ۰ & & & \\ & a_۲ & ۰ & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & a_{n-۱} & ۰ \end{bmatrix}$$

است در نظر می‌گیریم. همهٔ درایه‌های این ماتریس صفرند بجز درایهٔ گوشهٔ سمت راست بالا و درایه‌هایی که درست زیر قطر اصلی واقع‌اند. حال دترمینان T را به‌دست می‌آوریم. توجه کنید که $T^n = a_۱ \ldots a_n I$. چون ستونهای اول $\{I, T, \ldots, T^{n-۱}\}$ مستقل خطی‌اند (با فرض اینکه هیچ‌کدام از a_jها صفر نیستند)، هیچ چندجمله‌ای از درجهٔ کمتر از n نمی‌تواند T را صفر کند. از این‌رو چندجمله‌ای مینیمال T، $z^n - a_۱ \ldots a_n$ است. بنابراین $z^n - a_۱ \ldots a_n$ چندجمله‌ای مشخصهٔ T نیز هست. پس

$$\det T = (-۱)^{n-۱} a_۱ \ldots a_n$$

(اگر یکی از a_jها صفر باشد، آنگاه روشن است که T وارون‌پذیر نیست و لذا $\det T = ۰$ و این فرمول باز برقرار است.)

اکنون فرض کنید τ جایگشتی از $\{۱, ۲, \ldots, n\}$ باشد و ماتریس T را در نظر بگیرید که همهٔ درایه‌های ستون jام آن صفرند بجز درایهٔ موجود در سطر $\tau(j)$ام که برابر با a_j است. جایگشت τ حاصلضرب جایگشتهای دوری است. بنابراین T متشابه با یک ماتریس قطری بلوکی است که اندازهٔ هر بلوک آن از یک بزرگتر است و بلوکها به شکل (۳.۹) هستند (و لذا دترمینان T با دترمینان این ماتریس بلوکی برابر است). واضح است که دترمینان یک ماتریس قطری بلوکی برابر است با حاصلضرب دترمینانهای بلوکها، و نحوهٔ محاسبهٔ دترمینان هر بلوک را در پاراگراف قبل دیدیم. پس می‌بینیم که $\det T = (\operatorname{sign} \tau) a_۱ \ldots a_n$. برای اینکه این عبارت را به شکلی درآوریم که به جایگشت خاص τ بستگی نداشته باشد، فرض می‌کنیم $t_{i,j}$ درایهٔ سطر iام و ستون jام T باشد (لذا $t_{i,j} = ۰$ مگر وقتی $i = \tau(j)$) و $P(n)$ مجموعهٔ همهٔ جایگشتهای $\{۱, \ldots, n\}$ باشد. در این صورت

$$\det T = \sum_{\pi \in P(n)} (\operatorname{sign} \pi) t_{\pi(۱),۱} \ldots t_{\pi(n),n} \qquad (۴.۹)$$

زیرا هر جمعوند این مجموع صفر است مگر جمعوندی که با جایگشت τ متناظر است.

اکنون یک ماتریس دلخواه T با درایه‌های $t_{i,j}$ در نظر بگیرید. با توجه به پاراگراف قبل حدس می‌زنیم که (۴.۹) فرمول $\det T$ باشد. گزارهٔ زیر نشان می‌دهد که این حدس صحیح است و فرمول معمول برای دترمینان یک ماتریس را به‌دست می‌دهد.

گزارهٔ ۵.۹. $$\det(T) = \sum_{\pi \in P(n)} (\operatorname{sign} \pi) t_{\pi(۱),۱} \ldots t_{\pi(n),n}$$

اثبات: تابع d را روی مجموعهٔ ماتریسهای $n \times n$ به‌صورت

$$d(T) = \sum_{\pi \in P(n)} (\operatorname{sign} \pi) t_{\pi(۱),۱} \ldots t_{\pi(n),n}$$

تعریف می‌کنیم. می‌خواهیم ثابت کنیم که $\det T = d(T)$. برای این کار، فرض کنید S ماتریسی باشد که $STS^{-۱}$ طبق قضیهٔ ۲.۶، به شکل بالا مثلثی است. حال $d(STS^{-۱})$ برابر است با حاصلضرب درایه‌های روی قطر اصلی $STS^{-۱}$ (زیرا تنها جایگشتی که در مجموع معرف $d(STS^{-۱})$ جملهٔ ناصفر به‌وجود می‌آورد، جایگشت همانی است). اما درایه‌های روی قطر اصلی $STS^{-۱}$ دقیقاً مقدارهای ویژهٔ T با احتساب چندگانگی هستند، لذا $\det T = d(STS^{-۱})$. پس برای تکمیل اثبات فقط باید نشان دهیم که d تحت تشابه، ناورداست؛ در این صورت خواهیم داشت $\det T = d(STS^{-۱}) = d(T)$.

برای اثبات اینکه d تحت تشابه ناورداست، ابتدا نشان می‌دهیم که d ضربی است به این معنی که برای ماتریسهای $n \times n$ای مانند A و B، $d(AB) = d(A)d(B)$. اثبات ضربی بودن d، که در اینجا آن را نمی‌آوریم چیزی نیست جز بازآرایی سادهٔ جملاتی که در فرمول معرف $d(AB)$ ظاهر می‌شوند. (به کتابهایی که $\det T$ را همان $d(T)$ تعریف می‌کنند و سپس ثابت می‌کنند $\det AB = (\det A)(\det B)$، نگاهی بیندازید). اکنون با استفاده از ضربی بودن d، ناوردایی آن تحت تشابه به این صورت ثابت می‌شود:

$$\begin{aligned} d(STS^{-۱}) &= d(ST)d(S^{-۱}) \\ &= d(S^{-۱})d(ST) = d(S^{-۱}ST) = d(T) \end{aligned}$$

بنابراین همان‌طور که می‌خواستیم، $\det T = d(T)$. □

تمام ویژگیهای دترمینان را می‌توان یا به‌کمک تعریف (جدید) و یا به‌وسیلهٔ گزارهٔ ۵.۹ ثابت کرد. به‌ویژه اثبات اخیر نشان می‌دهد که $\det$ ضربی است.

دترمینان یک عملگر خطی روی یک فضای برداری حقیقی، بنا به تعریف، دترمینان (حاصلضرب مقادیر ویژهٔ) مختلط‌شدهٔ آن است. گزارهٔ ۵.۹ علاوه بر فضاهای برداری مختلط، برای فضاهای برداری حقیقی هم برقرار است. برای ملاحظهٔ این مطلب، فرض کنید U یک فضای برداری حقیقی و S یک عملگر خطی روی U باشد. اگر پایه‌ای برای U انتخاب کنیم و آن‌را پایه‌ای برای مختلط‌شده‌اش، $U_{\mathbf{C}}$، نیز بینگاریم، آنگاه S و مختلط‌شده‌اش، $S_{\mathbf{C}}$، ماتریسهایشان نسبت به این پایه برابر است. بنابراین فرمول $\det S$ که بنابر تعریف مساوی با $\det S_{\mathbf{C}}$ است، از گزارهٔ ۵.۹ به‌دست می‌آید. به‌ویژه $\det S$ حقیقی است. ضربی بودن $\det$ در مورد عملگرهای خطی روی فضاهای برداری حقیقی از ضربی بودن آن روی فضاهای برداری مختلط و ضربی بودن مختلط‌شدهٔ عملگر نتیجه می‌شود: اگر A و B عملگرهایی خطی روی فضای برداری حقیقی باشند، $(AB)_{\mathbf{C}} = A_{\mathbf{C}} B_{\mathbf{C}}$.

مفاهیم و احکامی که تا اینجا عرضه کرده‌ایم، رابطه‌ای طبیعی بین دترمینان و حجم در $\mathbb{R}^n$ برقرار می‌کنند. برای درک این ارتباط، ابتدا باید معلوم کنیم که منظور ما از ریشهٔ دوم یک عملگر ضرب در الحاقی آن چیست. فرض کنید S یک عملگر خطی روی فضای برداری حقیقی U باشد. اگر λ مقدار ویژهٔ S^*S و $u \in U$ بردار ویژهٔ ناصفر نظیر آن باشد، آنگاه

$$\lambda \langle u, u \rangle = \langle \lambda u, u \rangle = \langle S^*Su, u \rangle = \langle Su, Su \rangle$$

و بنابراین λ باید عددی نامنفی باشد. روشن است که S^*S خودالحاق است و لذا پایه‌ای برای U مرکب از بردارهای ویژهٔ S^*S وجود دارد (بنابر قضیهٔ طیفی حقیقی، یعنی قضیهٔ ۳.۸). S^*S را نسبت به این پایه می‌توان یک ماتریس قطری انگاشت. درایه‌های روی قطر، یعنی مقدارهای ویژهٔ S^*S، همان‌طور که دیدیم، همگی نامنفی‌اند. ریشهٔ دوم S^*S که با $\sqrt{S^*S}$ نشان داده می‌شود، عملگر خطی روی U متناظر با ماتریس قطری است که درایه‌های آن با گرفتن ریشهٔ دوم نامنفی از درایه‌های ماتریس S^*S به‌دست می‌آیند. روشن است که $\sqrt{S^*S}$ خودالحاق است و مربع آن برابر است با S^*S. همچنین ضربی بودن det نشان می‌دهد که

$$(\det\sqrt{S^*S})^2 = \det(S^*S) = (\det S^*)(\det S) = (\det S)^2$$

در نتیجه $|\det S| = \det\sqrt{S^*S}$ (زیرا $\det\sqrt{S^*S}$ باید نامنفی باشد).

به کمک لم بعد می‌توانیم مسألهٔ تغییر حجم به‌وسیلهٔ یک عملگر خطی را به حالت خودالحاق آن برگردانیم. این قضیه، تجزیهٔ قطبی عملگر S نامیده می‌شود، زیرا شبیه تجزیهٔ قطبی عدد مختلط $z = e^{i\theta}r$ است که در اینجا r مساوی است با $\sqrt{\bar{z}z}$ (شبیه $\sqrt{S^*S}$ در این لم) و ضرب در $e^{i\theta}$ یک طولپایی [ایزومتری] روی $\mathbb{C}$ است (مشابه با ویژگی طولپایی A در این لم).

لم ۶.۹. گیریم S یک عملگر خطی روی فضای ضرب داخلی حقیقی U باشد. در این صورت، طولپایی خطی A روی U وجود دارد که $S = A\sqrt{S^*S}$.

اثبات: به‌ازای $u \in U$ داریم

$$\begin{aligned}\|\sqrt{S^*S}u\|^2 &= \langle\sqrt{S^*S}u, \sqrt{S^*S}u\rangle\\ &= \langle S^*Su, u\rangle = \langle Su, Su\rangle = \|Su\|^2\end{aligned}$$

به‌عبارت دیگر $\|Su\| = \|\sqrt{S^*S}u\|$. بنابراین تابع A که روی $\operatorname{ran}\sqrt{S^*S}$ با ضابطهٔ $A(\sqrt{S^*S}u) = Su$ تعریف می‌شود، خوش‌تعریف است و یک طولپایی خطی از $\operatorname{ran}\sqrt{S^*S}$ به روی $\operatorname{ran}S$ است. A را به یک طولپایی خطی از U به روی U توسعه می‌دهیم به این ترتیب که ابتدا با توسعهٔ A به یک طولپایی از $(\operatorname{ran}\sqrt{S^*S})^\perp$ به روی $(\operatorname{ran}S)^\perp$ (بُعد این دو فضا مساوی است، زیرا دیدیم که بین $\operatorname{ran}\sqrt{S^*S}$ و $\operatorname{ran}S$ یک طولپایی خطی وجود دارد) و سپس با استفاده از خطی بودن، A را به کل U توسعه می‌دهیم. (قضیهٔ فیثاغورس نشان می‌دهد که A یک طولپایی روی کل U است) نحوهٔ ساختن A نشان می‌دهد که $S = A\sqrt{S^*S}$، و این همان نتیجهٔ مطلوب است. □

اکنون آماده‌ایم به طریقی روشن و روشنگر ثابت کنیم که یک عملگر خطی، حجم را به‌اندازهٔ قدر مطلق دترمینان تغییر می‌دهد. حجم را به‌طور صوری تعریف نمی‌کنیم بلکه فقط از ویژگیهای واضحی که حجم باید داشته باشد، استفاده می‌کنیم. خواننده باید زیرمجموعه‌های $E \subseteq \mathbb{R}^n$ را که در قضیهٔ زیر در نظر گرفته می‌شوند، به هر رده از مجموعه‌ها (مثل چندوجهی، مجموعهٔ باز، مجموعهٔ اندازه‌پذیر) که کار با آنها برایش راحت‌تر است، محدود کند.

قضیهٔ ۷.۹. گیریم S یک عملگر خطی روی $\mathbb{R}^n$ باشد. در این صورت برای $E \subset \mathbb{R}^n$

$$\operatorname{vol} S(E) = |\det S| \operatorname{vol} E$$

اثبات: فرض کنیم $S = A\sqrt{S^*S}$ تجزیهٔ قطبی S طبق لم ۶.۹ باشد. گیریم $E \subset \mathbb{R}^n$. چون A طولپایی است، حجم را تغییر نمی‌دهد، بنابراین

$$\operatorname{vol} S(E) = \operatorname{vol} A(\sqrt{S^*S}(E)) = \operatorname{vol}\sqrt{S^*S}(E)$$

اما $\sqrt{S^*S}$ خودالحاق است و در آغاز این بخش دیدیم که هر عملگر خودالحاق حجم را با ضریبی به اندازهٔ قدر مطلق دترمینان تغییر می‌دهد. پس داریم

$$\operatorname{vol} S(E) = \operatorname{vol}\sqrt{S^*S}(E) = |\det\sqrt{S^*S}|\operatorname{vol} E = |\det S|\operatorname{vol} E$$

و این همان است که می‌خواستیم. □

۱۰. نتیجه

ما ریاضیدانان گهگاه اثبات جدیدی از یک قضیهٔ معروف را می‌خوانیم و از رهیافت متفاوتی که در آن به کار رفته است لذت می‌بریم ولی باز هم طرز فکر ما مبتنی بر همان رهیافتی است که اول آموخته‌ایم. هدف این مقاله این است که نحوهٔ تفکر ریاضیدانان را در مورد جوانب و مباحث مهم جبر خطی و نحوهٔ تدریس آنها اساساً عوض کند. اثبات سادهٔ وجود مقدارهای ویژه که در قضیهٔ ۱.۲ ارائه شد باید در ذهن بماند، بر تخته سیاه نوشته و در کتابهای درسی چاپ شود. بردارهای ویژهٔ تعمیم‌یافته باید به ابزار اصلی شناخت عملگرهای خطی تبدیل شوند. همان‌طور که دیدیم، به کمک بردارهای ویژه می‌توان چندگانگی و چندجمله‌ای مشخصه را به‌طور طبیعی تعریف کرد. هر ریاضیدان و هر دانشجوی جبر خطی باید دست کم این مطلب را به یاد داشته باشد که بردارهای ویژهٔ تعمیم‌یافتهٔ یک عملگر خطی، همواره دامنه را تولید می‌کنند (گزارهٔ ۴.۳) — این نتیجهٔ مهم، به اثباتهای ساده‌ای برای قضیهٔ شکل بالامثلثی (قضیهٔ ۲.۶) و قضیهٔ طیفی (قضیه‌های ۵.۷ و ۳.۸) منجر می‌شود.

دترمینان در بسیاری از اثباتهایی که در اینجا مورد بحث قرار نگرفتند، به کار می‌رود. ولی اگر چنین اثباتهایی را مورد مداقه قرار دهیم، معمولاً می‌توانیم بدون استفاده از دترمینان اثباتهای بهتری به جای آنها بیابیم. پس مرگ بر دترمینان!

• Sheldon Axler, "Down with determinants!", *Amer. Math. Monthly*, (2) **102** (1995) 139-154.

* شلدن اکسلر، بخش ریاضی دانشگاه ایالتی میشیگان، آمریکا

axler@math.msu.edu