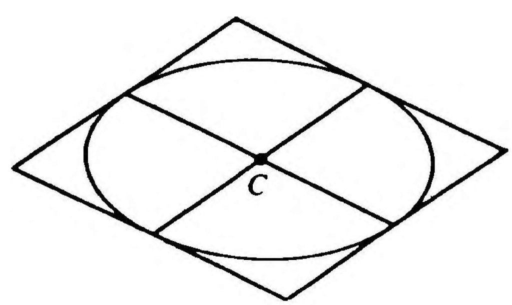
نیوتن دقیقاً چگونه مدارهای سیارات را بررسی کرد؟•

شرمن استاین*
ترجمهٔ ابوالقاسم لاله

در سال ۱۹۸۷ که مقارن با سیصدمین سالگرد انتشار کتاب اصول نیوتن بود، خواستم به آن مناسبت روش وی را در بررسی مدارهای سیاره‌ها مرور کنم. اگر او حساب دیفرانسیل و انتگرال را به این منظور به‌کار نبرده دقیقاً چگونه به این موضوع پرداخته است؟ مدتی طول کشید تا به طرز تفکر او در این زمینه پی ببرم و سرانجام رهیافت وی، که آمیزه‌ای از مفاهیم هندسی و حدی بوده است برایم کاملاً روشن شد. با کمال تعجب دریافتم که نیوتن در روش خود از بررسی نیروهای عکس مجذور فراتر رفته و به عکس توانهای سوم و پنجم نیز پرداخته است. در این مقاله می‌خواهم با استفاده از استدلال و نمودارهای نیوتن نتیجه و روش، کار وی را بررسی کنم، اما به زبانی که برای خوانندهٔ قرن بیستمی ساده‌تر باشد. ارجاعات من به کتاب اصول، به اولین چاپ انگلیسی آن خواهد بود که موتی[1] در سال ۱۷۲۹ آن‌را ترجمه کرده و کیجری[2] در سال ۱۹۳۶ در آن تجدید نظر نموده است [۶] (سه چاپ اول کتاب اصول که در سالهای ۱۶۸۷، ۱۷۱۳، ۱۷۲۶ انتشار یافته به زبان لاتینی بوده است.)

در سراسر این مقاله فرض می‌کنیم با نیرویی «متقارن شعاعی» یا «مرکزی» سروکار داریم یعنی نیرویی که برای آن نقطه‌ای مانند O وجود دارد که نیرو در نقطه‌ای دلخواه چون P موازی با بردار OP است و اندازهٔ آن تنها به فاصلهٔ O تا P بستگی دارد. اگر آن فاصله r باشد، $f(r)$ اندازهٔ نیرو را نمایش



شکل۱

1. Motte 2. Cajori

می‌دهد. عبارت «نیرو با عکس مجذور متناسب است» به این معنی است که یک عدد ثابت غیرصفر A وجود دارد که $f(r) = Ar^{-۲}$.

استدلال نیوتن بر اساس احکام هندسی شناخته شده در زمان اوست. برای راحتی کار آنها را در بخش اول می‌آوریم، که مشتمل بر دو حکم مرکب هندسی-حدی نیوتن نیز هست.

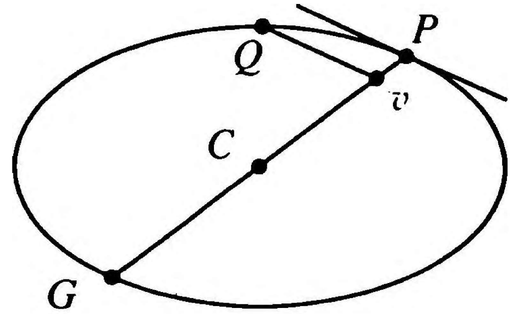
مبنای هندسی

وتر گذرنده از مرکز یک بیضی قطر آن نام دارد. قطر، بیضی را در دو نقطه قطع می‌کند، که آنها را با P و G نمایش می‌دهیم (که همان حروف به‌کار رفته در نمودارهای نیوتن است). قطر موازی با مماسهایِ وارد بر بیضی در P و G قطر مزدوج نام دارد. سابقهٔ این مفهوم به آپولونیوس در قرن دوم پیش از میلاد می‌رسد. [۱].

حکم ۱. مزدوجِ مزدوج یک قطر، همان قطر اولیه است.

(در نتیجه، چهار مماس رسم شده بر بیضی در دو انتهای یک جفت قطر مزدوج، با آن قطرها موازی هستند. شکل ۱ را ببینید.) برای توجیه حکم ۱ و همچنین احکام ۲ و ۳ که بعداً مطرح می‌شوند، ابتدا آنها را در مورد دایره بررسی کنید وسپس یک نگاشت آفین را به‌کار برید. (هر نگاشت آفین از صفحهٔ xy یک دوسویی از صفحه به روی خود آن است که همخطی را حفظ می‌کند. برحسب مختصات، نقطهٔ (x,y) به نقطهٔ $(ax+by+e, cx+dy+f)$ نگاشته می‌شود که a، b، c، d، e و f اعداد ثابت‌اند و دترمینان $ad-bc$ برابر با صفر نیست. همهٔ مساحتها در ضریب $|ad-bc|$ ضرب می‌شوند. همچنین طولهای همهٔ پاره‌خطهای همراستا، در یک ضریب ثابت ضرب می‌شوند که به آن راستا بستگی دارد.

فرض کنیم PG قطری از یک بیضی و Q نقطه‌ای دلخواه روی بیضی باشد. همچنین فرض کنیم v نقطه‌ای روی PG باشد به‌طوری که Qv موازی با مماس در P است، و از این رو موازی با قطر مزدوج است که در شکل ۲ نمایش داده شده است. مرکز بیضی C است.



شکل۲

حکم ۲. برای هر بیضی مفروض و هر قطر PG از آن، نسبت

$$\frac{Qv^2}{Pv\cdot Gv}$$

مستقل از Q است.

مماسهای رسم شده در دو انتهای یک جفت قطر مزدوج، یک متوازی‌الاضلاع تشکیل می‌دهند (شکل ۱ را ببینید).

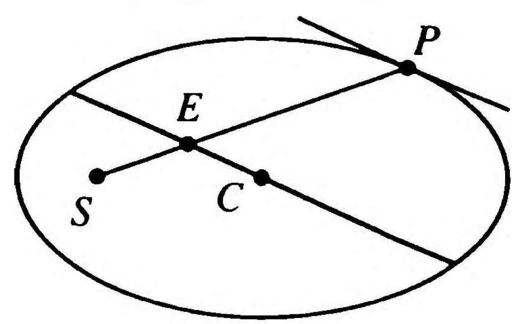
حکم ۳. برای هر بیضی مفروض مساحت همهٔ این‌گونه متوازی‌الاضلاعها برابر است.

به‌نظر می‌رسد حکم بعد دربارهٔ بیضیها از کشفیات خود نیوتن باشد. فرض کنیم S کانونی از یک بیضی و P نقطه‌ای دلخواه روی آن باشد. خط SP قطر مزدوج با قطر گذرنده از P را در نقطه‌ای چون E قطع می‌کند، که در شکل ۳ نمایش داده شده است.

حکم ۴. طول PE مستقل از P است.

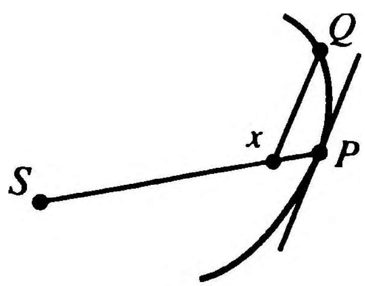
در اثبات نیوتن [۶، ص ۵۶] دو ویژگی از بیضی به‌کار می‌رود که اغلب دانشجویان درس حساب دیفرانسیل و انتگرال با آنها آشنا هستند. برای اینکه خواننده خود از کشف استدلال ظریف و کوتاه وی لذت ببرد اثبات را در اینجا نمی‌آورم.

نیوتن همچنین جسمی را در نظر می‌گیرد که «روی یک مارپیچ PQS می‌گردد و همهٔ شعاعهای SP، SQ، و غیره را در یک زاویهٔ مفروض قطع می‌کند.» این «مارپیچ لگاریتمی» را هاریوت[1] (۱۵۶۰ـ۱۶۲۱) به دلیل کاربرد آن در نقشه‌برداری بررسی کرده بود. کشتیی که با زاویهٔ ثابتی نسبت



شکل۳

1. Harriot



شکل۴

به عقربهٔ قطب‌نما حرکت می‌کند، سرانجام در مسیر یک مارپیچ به قطب شمال یا جنوب می‌رسد (مگر اینکه همواره به سمت غرب یا شرق باشد). چون این مسیر، زاویه‌ای ثابت با نصف‌النهارها می‌سازد، تصویر گنجنگاشتی آن روی صفحهٔ گذرنده از استوا یک مارپیچ لگاریتمی است. (هاریوت اولین کسی بود که ثابت کرد تصویر گنجنگاشتی، زاویه را حفظ می‌کند.)

فرض کنیم $r = f(\theta)$ معادلهٔ قطبی مارپیچ باشد. عدد ثابت k وجود دارد که $r\Delta\theta/\Delta r \simeq k$، و از این رو

$$\frac{r(\theta+\Delta\theta)}{r(\theta)} \simeq 1+\frac{\Delta\theta}{k}$$

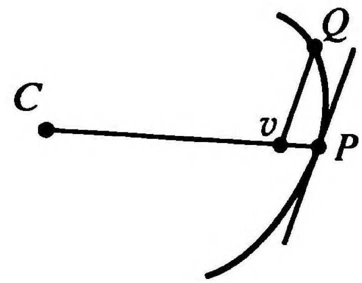
هاریوت با استفاده از این رابطه نتیجه‌گیری کرد که اگر زاویه‌ها یک تصاعد حسابی تشکیل دهند، شعاعهای متناظر یک تصاعد هندسی تشکیل می‌دهند. در نتیجه به یک ویژگی مهم مارپیچ لگاریتمی می‌رسیم: اگر آن را حول قطب دستگاه مختصات دوران دهیم، آنگاه می‌توانیم خم دوران یافته را چنان بزرگ یا کوچک کنیم که با مارپیچ اصلی منطبق شود. لذا مارپیچ لگاریتمی با هر نسخهٔ خود که به‌طور یکنواخت بزرگ یا کوچک شده باشد، قابل انطباق است. [برای نشان دادن اینکه مارپیچ لگاریتمی تنها نوع خم با این ویژگی «خودمشابهی» است باید معادلهٔ تابعی $f(\theta+\alpha) = f(\theta)g(\theta)$ را حل کنیم.] این ویژگیها را می‌توانیم با بررسی معادلهٔ $r/r' = k$ و نشان دادن اینکه به‌ازای مقادیر ثابت A و bای $r(\theta) = Ab^{\theta}$، ثابت کنیم. همهٔ آنچه باید دربارهٔ مارپیچ بدانیم حکم زیر است.

حکم ۵. اگر P و P^* نقاطی روی یک مارپیچ لگاریتمی باشند، آنگاه هر همسایگی P روی مارپیچ با همسایگیی از P^* مشابه است.

نیوتن دو حد هندسی، یعنی احکام ۶، ۷، را ارائه می‌دهد و به‌کار می‌برد ولی من از اثبات آنها صرف‌نظر می‌کنم، زیرا این‌کار ما را از موضوع اصلی دور می‌کند.

در شکل ۴، نقاط S و P تثبیت شده‌اند، نقطهٔ Q روی یک خم هموار واقع است، و Qx با مماس در نقطهٔ P موازی است. (بعداً S کانون یک بیضی خواهد شد.) نتیجهٔ ۲ از لم ۷ [۶، ص ۳۳] می‌گوید که «نسبت نهایی Qx و کمان QP وقتی Q به P میل می‌کند، نسبت تساوی خواهد بود» یا با اصطلاحات امروزی داریم

$$\lim_{Q\to P}\frac{Qx}{QP} = 1 \qquad (1)$$



شکل۵

حالا شکل ۵ را در نظر بگیرید که در آن C، مانند S، تثبیت شده است. (بعداً C مرکز یک بیضی خواهد شد.) نقطهٔ v روی CP است و Qv با مماس در P موازی است. پس همچنین داریم

$$\lim_{Q\to P} \frac{Qv}{QP} = ۱ \qquad (۲)$$

از ترکیب کردن (۱) و (۲) داریم

حکم ۶.

$$\lim_{Q\to P} \frac{Qx}{Qv} = ۱$$

این حکم به ما اجازه می‌دهد تا در یک استدلال حدی Qv را جانشینِ Qx کنیم.

در لم ۸ [۶، ص ۳۳] مساحت مثلث RAB با مساحت قطاع $RACB$ در شکل ۶، وقتی A به B میل می‌کند، مقایسه می‌شود. یعنی برحسب اصطلاحات امروزی داریم

حکم ۷.

$$\lim_{A\to B} \frac{\text{مساحت مثلث } RAB}{\text{مساحت قطاع } RACB} = ۱$$

اکنون با کمک این ابزارها می‌توانیم تحلیل نیوتن از رابطهٔ حرکت با نیروهای مرکزی را دوباره بررسی کنیم.

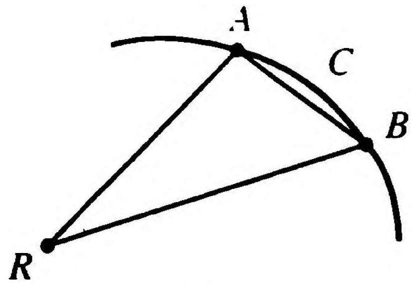
رهیافت نیوتن

نیوتن با استفاده از استدلالی هندسی متکی بر این حکم که مساحت سطح پیموده شده به‌وسیلهٔ توابع مختصاتی سرعت، برابر فاصلهٔ طی شده یا «تغییر مکان» است، نتیجهٔ ۳ از لم ۱۰، [۶، ص ۳۵] را به‌دست می‌آورد که می‌گوید تغییر مکان «درست، در ابتدای حرکت» متناسب با نیرو و مجذور زمان است

$$\text{تغییر مکان} \sim (\text{نیرو})(\text{زمان})^{۲}$$

وی با استفاده از این مطلب بی‌درنگ، شاخصی برای اندازهٔ نیرو به‌دست می‌آورد

$$\text{نیرو} \sim \frac{\text{تغییر مکان}}{(\text{زمان})^{۲}} \qquad (۳)$$



شکل۶

ولی به منظور استنتاج یک شاخص هندسی برای اندازهٔ نیروی وارد بر یک شیء در یک مدار مفروض، نیازمند یک شاخص هندسی برای اندازهٔ «زمان» است که در (۳) ظاهر می‌شود. نیوتن این کار را با اثبات قانون «مساحت» کپلر به انجام می‌رساند که ظاهراً تا زمان انتشار کتاب اصول کم‌ترین اهمیت را در میان سه قانون کپلر داشت: وی این‌کار را در گزارهٔ ۱ [۶، ص ۴۰] انجام می‌دهد:

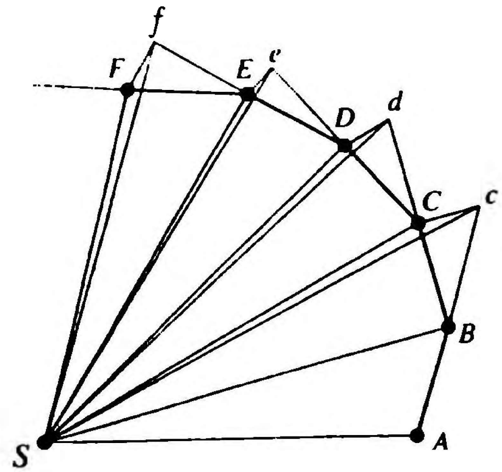
> مساحتهای سطوحی که اجسام گردش‌کننده به‌وسیلهٔ شعاعهای واصل به یک مرکز ثابت نیرو ایجاد می‌کنند، در صفحه‌های ثابت یکسانی قرار دارند، و متناسب با مدت زمانهای ایجاد آن سطوح‌اند.

استدلال وی را در اینجا می‌آورم:

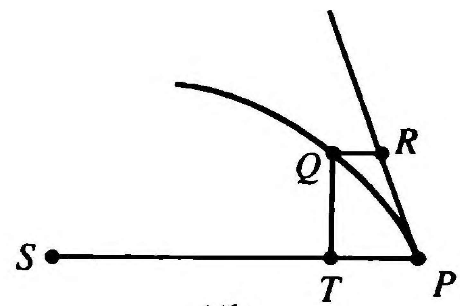
> فرض کنیم زمان به اجزائی مساوی تقسیم می‌شود و در جزء اول آن، جسم بر اثر نیرویی که قبلاً به آن وارد شده، خط مستقیم AB را طی می‌کند. در جزء دوم زمان، اگر مانعی پیش نیاید، جسم مستقیماً در امتداد خط Bc و به مسافت مساوی با AB جلو می‌رود، به نحوی که وقتی شعاعهای AS، BS، cS را که از مرکز رسم می‌شوند در نظر بگیریم ASB و BSc مساحتهایی مساوی را مشخص می‌کنند. اما فرض کنیم وقتی جسم به B می‌رسد ناگهان یک نیروی مرکزگرا بر جسم اثر می‌کند و آن را از خط مستقیم Bc خارج می‌کند و مجبور می‌کند که حرکت خود را در مسیر خط مستقیم BC ادامه دهد. cC را موازی با BS رسم می‌کنیم تا BC را در C قطع کند؛ و در پایان جزء دوم زمان، جسم در C خواهد بود که در همان صفحهٔ مثلث ASB است. SC را رسم می‌کنیم؛ چون SB و Cc موازی‌اند، مثلث SBC با مثلث SBc و لذا با مثلث SAB مساوی خواهد بود. (شکل ۷ را ببینید.)

سپس همین استدلال را برای مثلثهای بعدیِ شکل ۷ به‌کار می‌برد و حد را وقتی «تعداد مثلثها بسیار افزایش می‌یابد و قاعدهٔ آنها بی‌نهایت کوچک می‌شود» می‌گیرد، و به این نتیجه می‌رسد که «مساحتهای مشخص شدهٔ $SADS$، $SAFS$، ... متناسب خواهند بود» با زمانها. (ضمناً نموداری که تا حدی شبیه شکل ۷ است در دستنوشته‌های رابرت هوک وجود دارد که نشان می‌دهد درک وی از حرکت خمیده خطی تحت یک نیروی مرکزی عمیق‌تر از حدی است که معمولاً گمان می‌کرده‌اند [۵].)

با این اطلاعات، وی یک عبارت کاملاً هندسی متناسب با نیرو به‌دست می‌آورد. نقطه‌ای چون P روی یک مدار در نظر بگیرید که یک نیروی مرکزگرایِ



شکل۷



شکل۸

رو به S آن را مهار می‌کند. فرض کنیم Q نقطه‌ای بسیار نزدیک به P روی مدار باشد. شکل ۸ را ببینید.

پاره‌خط QR که موازی با SP است، تغییر مکان از خط مماس در P را نشان می‌دهد که ناشی از نیرو است؛ زیرا در صورت نبودن این نیرو، شیء مورد نظر در امتداد خط مماس حرکت می‌کرد و به نقطهٔ R می‌رسید. QT عمود بر SP است. زمان به‌وسیلهٔ مساحت قطاع SPQ نمایش داده می‌شود. اما برای Qی نزدیک به P، مساحت مثلث SPQ یعنی $(\frac{1}{2})SP.QT$ را می‌توانیم به‌جای مساحت این قطاع به‌کار بریم. (این مطلب همان حکم ۷ است.) حال بنا به مطالب گفته شده می‌توانیم از (۳) نتیجه‌گیری کنیم که نیرو در P متناسب با حد

$$\frac{QR}{SP^2.QT^2} \qquad (۴)$$

است وقتی که Q به P میل می‌کند؛ یعنی

$$\text{نیرو در } P \sim \lim_{Q\to P} \frac{QR}{SP^2.QT^2} \qquad (۵)$$

توجه کنید که QR و QT بینهایت کوچک هستند. نیوتن برای به‌دست آوردن حد (۵) در یک نقطهٔ خاص P روی یک مدار مفروض از ویژگیهای هندسی خم استفاده می‌کند تا (۵) را به حدی که مستلزم بینهایت کوچکها نیست تبدیل کند، یعنی تنها از ویژگیهای ماکروسکوپی مدار استفاده می‌کند. در بخش بعد کاربرد این روش را برای چهار نوع مدار متفاوت نشان می‌دهم.

استفاده از این روش برای یافتن نیروی مرکزگرا

اولین کاربرد نیوتن از این روش، گزارهٔ ۷ است [۶، ص ۴۹]:

> فرض کنیم جسمی روی محیط دایره‌ای حرکت می‌کند. می‌خواهیم قانون نیروی مرکزگرای رو به هر نقطهٔ مفروض را پیدا کنیم.

من استدلال وی را تنها در حالتی که «نقطهٔ مفروض» S روی محیط است بازسازی می‌کنم. شکل ۹ دایره و نقاط مورد نظر را نشان می‌دهد. SA قطر و Z محل تقاطع QT با مماس در P است.

برای اینکه (۵) را کاملاً برحسب طولهای ماکروسکوپی [طولهایی که بینهایت کوچک نیستند] بیان کنیم باید QR/QT^2 را به ویژگیهای «قابل رؤیت» دایره ربط دهیم. (توجه کنید که SP از قبل ماکروسکوپی است.) چون زاویه‌های ZPS و PAS رو به روی یک کمان هستند پس برابرند، لذا مثلثهای قائم‌الزاویهٔ ZPT و SAP متشابه‌اند. از این رو

$$\frac{QT}{RP} = \frac{ZT}{ZP} = \frac{SP}{SA} \qquad (۶)$$

همچنین بنا به احکام هندسی

$$RP^2 = QR.RL \qquad (۷)$$

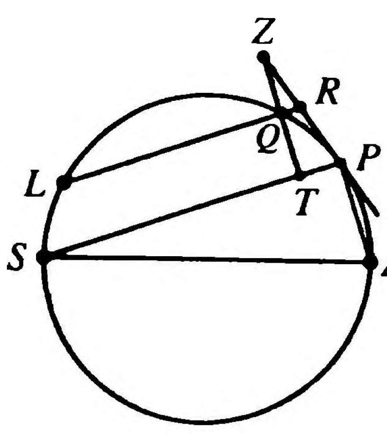
با ترکیب (۶) و (۷) به‌دست می‌آوریم

$$\frac{QR}{SP^2.QT^2} = \frac{SA^2}{SP^2.RL} \qquad (۸)$$

با میل دادن Q به P، چون RL به SP میل می‌کند، به‌دست می‌آوریم

$$\text{نیرو} \sim \frac{SA^2}{SP^5}$$

در این حالت، که SA ثابت است، نیرو متناسب با عکس توان پنجم فاصله است.



شکل۹

حالا گزارهٔ ۹ [۶، ص ۵۲] را در نظر می‌گیریم که می‌گوید:

> فرض کنیم جسمی روی یک مارپیچ PQS حرکت می‌کند و با همهٔ شعاعهای SP، SQ و غیره یک زاویهٔ ثابت می‌سازد. می‌خواهیم قانونِ نیروی مرکزگرای رو به مرکز آن مارپیچ را بیابیم.

در استدلال نیوتن، ویژگیِ خودْمشابهیِ مارپیچ به‌کار می‌رود، اما علاوه بر آن از امی استفاده می‌شود حاکی از اینکه QR متناسب با RP^2 است و از این رو برای Qی نزدیک P، متناسب با AT^2 است. ولی چنانکه نشان خواهم داد ویژگی خودْمشابهی کافی است. فرض کنیم P نقطه‌ای روی مدار است که ثابت نگه داشته می‌شود. همچنین فرض کنیم P^* نقطه‌ای دلخواه روی مدار است. به‌کمک ویژگیِ خودمشابهی، نیرویِ در P^* را می‌توانیم با نیرویِ در P مقایسه کنیم.

تشابهی که خم را به خود و P را به P^* می‌گمارد، S را به S و Q را به Q^* روی خم می‌فرستد، مماس در P را به مماس در P^*، R را به R^* روی مماس در P^* و T را به T^* می‌نگارد. (شکل ۱۰ را ببینید.) لذا نیرو در P^* با نسبت، زیر تخمین زده می‌شود

$$\frac{Q^*R^*}{(SP^*)^2(Q^*T^*)^2} \qquad (۹)$$

ضریب تغییر اندازه برابر با SP^*/SP است، بنابراین

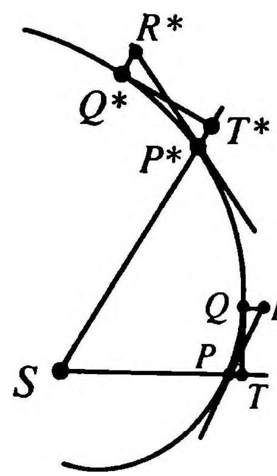
$$Q^*R^* = \frac{SP^*}{SP}QR$$

و

$$Q^*T^* = \frac{SP^*}{SP}QT$$

از این‌رو (۵) این اندازهٔ نیرو را در P^* به‌دست می‌دهد

$$\frac{SP^3}{(SP^*)^3}\frac{QR}{SP^2 \cdot QT^2} \qquad (۱۰)$$



شکل ۱۰

با میل دادن Q به سمت P، مشاهده می‌کنیم که نیرو در P^* متناسب است با

$$\frac{SP^3}{(SP^*)^3}(\text{نیرو در } P)$$

از آنجا که P ثابت است، نیرو با عکس مکعب فاصله متناسب است.

نیوتن سپس حرکت روی مدارهای بیضوی را بررسی می‌کند. در حالت اول (گزاره ۱۰ [۶، ص ۵۳]) نقطهٔ جذب، مرکز بیضی است (شبیه حالتی که یک ذره در مدار زمین است). این گزاره [مسأله] به این شرح است:

> فرض کنیم جسمی روی یک بیضی حرکت کند. می‌خواهیم قانون نیروی مرکزگرا به‌سمت مرکز بیضی را بیابیم.

فرض کنیم مطابق شکل ۱۱، SA و SB نیم‌قطرهای اصلی بیضی، GP و DK قطرهای مزدوج، و PF و QT عمودهای وارد بر این قطرها باشند، و Qv موازی با قطر DK باشند. می‌خواهیم کمیّت $\frac{QR}{SP^2.QT^2}$ را برحسب عوامل ماکروسکوپی بیضی بیان کنیم.

بنا به تشابه مثلثها

$$\frac{QT}{Qv} = \frac{PF}{SP}$$

و بنا به حکم (۲)

$$\frac{Qv^2}{Pv.vG} = \frac{SD^2}{SP.SG}$$

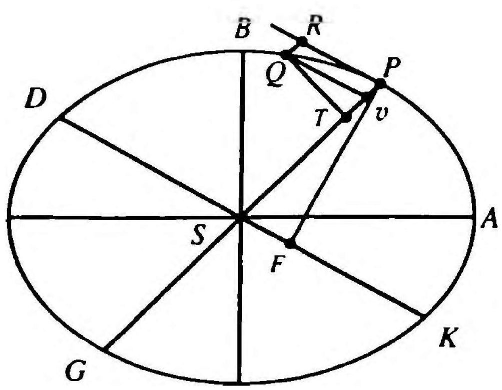
همچنین

$$QR = Pv$$

با استفاده از این سه معادله و کمی محاسبهٔ جبری، نتیجه می‌شود که

$$\frac{QR}{SP^2.QT^2} = \frac{SP.SG}{PF^2.SD^2.vG}$$

اکنون، $PF.SD$ یک چهارم مساحت متوازی‌الاضلاع محاطیِ مشخص شده به‌وسیلهٔ قطرهای مزدوج است، لذا (بنا به حکم ۳) برابر با عددی ثابت



شکل ۱۱

مانند k است که مستقل از نقطهٔ P است. همچنین $SG = SP$، و vG به کمیت $2SP$ میل می‌کند وقتی که Q به‌سمت P میل کند. بنابراین وقتی Q به P می‌گراید

$$\frac{QR}{SP^2.QT^2} \to \frac{SP^2}{k^2.2SP} = \frac{SP}{2k^2}$$

در نتیجه، نیرو با فاصله متناسب است.

آنگاه نیوتن در گزارهٔ ۱۱ [۶، ص ۵۶] به مدارهای کپلری می‌پردازد:

> اگر جسمی روی یک بیضی حرکت کند، لازم است نیروی مرکزگرا به سمت کانون بیضی را بیابیم.

شکل ۱۲ کمی از شکل ۱۱ پیچیده‌تر است. در اینجا S یک کانون است، QR موازی با SP، Qv موازی با RP، و v روی قطر PG است. نقطهٔ x محل تقاطع Qv و SP است. نقطهٔ E محل تقاطع SP و قطر مزدوج DK است.

نیوتن دوباره می‌خواهد $\frac{QR}{SP^2.QT^2}$ را برحسب عواملی بیان کند که بی‌نهایت کوچک نباشند. با استفاده از مثلثهای متشابه به‌دست می‌آورد

$$\frac{Pv}{Px} = \frac{PC}{PE} \quad \text{و} \quad \frac{QT}{Qx} = \frac{PF}{PE} \qquad (۱۱)$$

همچنین

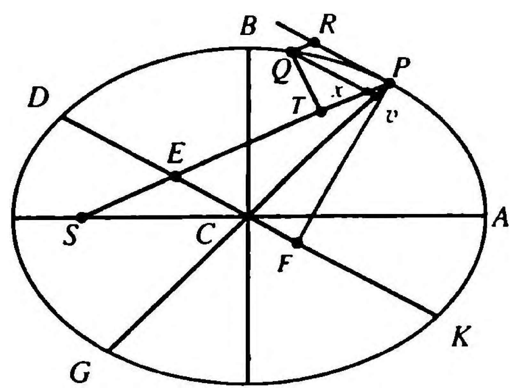
$$QR = Px \qquad (۱۲)$$

بنا به حکم (۲)

$$\frac{Qv^2}{Pv.vG} = \frac{DC^2}{PC^2} \qquad (۱۳)$$

و بنا به حکم (۶)

$$\lim_{Q\to P} \frac{Qx}{Qv} = 1 \qquad (۱۴)$$



شکل ۱۲

با ترکیب کردن (۱۱)، (۱۲)، (۱۳)، و (۱۴) و کمی عملیات جبری به‌دست می‌آورد

$$\lim_{Q\to P}\frac{QR}{SP^2.QT^2} = \frac{PE^3}{2SP^2.PF^2.DC^2}$$

بنا به احکام ۴ و ۳، PE و $PF.DC$ مستقل از P هستند، بنابراین نیروی مرکزگرا با عکس مجذور فاصله متناسب است.

نیوتن همچنین نشان می‌دهد که اگر شیئی روی یک هذلولی یا سهمی حرکت کند، آنگاه نیروی مرکزگرای رو به یک کانون، با عکس مجذور فاصله متناسب است. (گزارهٔ ۱۲ [۶، ص ۵۷] و گزارهٔ ۱۳ [۶، ص ۶۰]). مطلقاً هیچ مدرکی وجود ندارد که نیوتن حساب دیفرانسیل و انتگرال خود را که حدود ۲۰ سال قبل از نوشتن کتاب اصول پرداخته بود برای بررسی این مسائل به‌کار برده باشد و سپس کار خود را به زبان هندسی برگردانده باشد. وارینیون (۱۶۵۴ـ۱۷۲۲) اولین کسی بود که حساب دیفرانسیل و انتگرال (لایب‌نیتسی) را برای حرکت خمیده خطی به‌کار برد [۲].

در خاتمه مایلم سپاسگزاری خود را از ج. دانلد چاکریان که پیشنهادهایی برای بهبود مقاله داد، و از آنتونی بارسلوز که شکلها را با استفاده از نرم‌افزار CoHort Graphics تهیه کرد ابراز دارم.

مراجع

1. Apollonius, Conics, in *Great Books of the Western World*, Vol. 2, Chicago: Britannica (1939).
2. M. Blay, *La Naissance de la Mécanique Analytique*, Paris: Presses Universitaires de France (1992).
3. I. B. Cohen and A. Koyré, *Introduction to Newton's Principia*, Cambridge, MA: Harvard University Press (1971).
4. I. B. Cohen and A. Koyré, *Isaac Newton's Philosophiae naturalis Principia Mathematica (with variant readings)*, Vol. 1, Cambridge, MA: Harvard University Press (1972).
5. M. Nauenberg, Hooke, orbital motion, and Newton's *Principia*, *Am. J. Phys.* 62 (1994), 331-350.
6. I. Newton, *Mathematical Principles* (F. Cajori, ed.), Berkeley: University of California Press (1934).
7. J. L. Russell, Kepler's laws of planetary motion: 1609-1666, *Br. J. History Sci.* 2(1964), 1-24.
8. D. T. Whiteside, Newton's early thoughts on planetary motion: a fresh look, *Br. J. History Sci.* 2 (1964), 117-137.

******

• S. K. Stein, "Exactly how did Newton deal with his planets?", *Math. Intelligencer*, (2) **18** (1996) 6-11.

* شرمن استاین، بخش ریاضی دانشگاه کالیفرنیا در دیویس، آمریکا