نشر ریاضی، سال ۱۱، شمارهٔ ۱، صص ۴-۷

خروشوفسکی و حدس زیلبر

سید محمد باقری*

۱. مقدمه

در این گزارش، آشنایی مختصری با نظریهٔ مدلها را مفروض می‌گیریم و فقط به یادآوری چند نکته می‌پردازیم. در یک زبان £، دو مدل M و N را هم‌ارز مقدماتی می‌نامند، $M \equiv N$، هرگاه جملات یکسانی را صادق کنند. نظریهٔ T را کامل می‌گویند هرگاه تمام مدلهای آن هم‌ارز مقدماتی باشند. فرض کنیم T کامل است. اگر M مدلی از T و $\varphi(\overline{x})$ فرمولی (با پارامتر) باشد، مجموعهٔ $\varphi(M) = \{\overline{a} : M \vDash \varphi[\overline{a}]\}$ را تعریف‌پذیر (با پارامتر) می‌نامند. مثلاً در $(\mathbb{N}, +, .)$، مجموعهٔ اعداد اول تعریف‌پذیر است. فرض کنیم M و N دو مدل در نظریه‌های متفاوت باشند و $n \geq 1$ عددی طبیعی باشد. مفهوم تعبیر را در ۳ مرحله تعریف می‌کنیم:

ـــ اگر $f : M^n \to N$ پوشا باشد و تصویر معکوس هر مجموعهٔ تعریف‌پذیر در N، در M هم تعریف‌پذیر باشد، می‌گوییم N در M تعبیر می‌شود (توجه کنید که تصویر معکوس تساوی، یک رابطهٔ هم‌ارزیِ تعریف‌پذیر است).

ـــ اگر $N \subseteq M$ تعریف‌پذیر باشد و ساختار N تحدیدی از ساختار M باشد، می‌گوییم N در M تعبیر می‌شود.

ـــ اگر N از ترکیبی از دو نوع فوق به‌دست آمده باشد می‌گوییم N در M تعبیر می‌شود. در حالت کلی ممکن است پارامترهایی از M هم به‌کار رود.

پس ساختار N در M تعبیر می‌شود هرگاه با تغییرات مرتبهٔ اول در M، بتوان N را به دست آورد (خود N و ساختارش را). به‌عنوان مثال $\mathbb{C}$ در $\mathbb{R}$ و نیز برای هر حوزهٔ صحیح A، هیأت کسرهای آن در A تعبیر می‌شوند، ولی توجه کنید که $A[x]$ در A تعبیر نمی‌شود. خواننده را برای مطالعهٔ جزئیات بیشتر در این مورد به [۲] ارجاع می‌دهیم، ولی عمدهٔ مطالب این مقاله به‌طور مفصلتر در [۶] آمده است.

۲. قضیهٔ مورلی و نظریهٔ پایداری

در ابتدای شکل‌گیریِ مبانی منطق ریاضی، تصور بر این بود که رابطهٔ زبان و ساختار چنان است که زبان قادر است ساختار را در حد یکریختی تعیین کند (چنین ساختاری را جازم می‌نامند). نمونهٔ چنین تفکری را به‌خوبی می‌توان در برنامهٔ هیلبرت مشاهده کرد. از بعد از سالهای ۱۹۳۰ (با کارهای لونهایم، اسکولم، مالتسف، و تارسکی) معلوم شد که این تصور حداقل برای زبانهای مرتبهٔ اول غلط است مگر اینکه ساختار متناهی باشد.

با این‌حال مسألهٔ جازمیت به‌کلی بی‌اعتبار نشد. در سال ۱۹۶۵ مورلی [۷] اثباتی از حدسی از ووش[1] ارائه داد که امروزه به قضیهٔ جازمیت مورلی شهرت دارد. طبق این قضیه، یک نظریهٔ جازم از کاردینال ناشمارای λ، از هر کاردینال ناشمارای دیگر نیز جازم است. این قضیه به همراه کارهای دیگر مورلی در باب «رتبهٔ مورلی» سرآغاز تحول عمیقی در نظریهٔ عمومی مدلها شد. این تحول تقریباً به‌دست یک تن صورت گرفت: شلاه[2] ایده‌های مورلی را به ردهٔ وسیعی از نظریه‌ها به‌نام «پایدار» تعمیم داد و نظریهٔ پایداری (یا به قول خودش نظریهٔ رده‌بندی) را به‌وجود آورد. اساس نظریهٔ پایداری مفهوم فورکینگ[3] (انشعاب) است که در نهایت همان مفهوم استقلال (درواقع وابستگی) است. به بیان دیگر، نظریهٔ پایداری عبارت است از نظریهٔ ابعاد یا رتبه‌ها روی ساختارهای مرتبهٔ اول.

1. Łoś 2. Shelah 3. forking

مثال نوعی آن را در نظر بگیریم. فرض کنیم k هیأتی جبری-بسته باشد. می‌دانیم که هندسهٔ گسترده‌ای روی k وجود دارد و یکی از ملزومات هر هندسه، مفهوم بُعد است. در اینجا بعد هر تک نقطه و یا زیرمجموعهٔ متناهی صفر است ولی بعد k حداقل یک است زیرا که نامتناهی است! از طرف دیگر k^2 حداقل دوبعدی است زیرا حاوی بی‌نهایت نسخهٔ مجزا از k است. به‌طور کلی اگر $A \subseteq k^n$ چندگونا[1]یی باشد (که لزوماً تعریف‌پذیر است)، بعد آن حداقل $t+1$ است هرگاه حاوی تعداد نامتناهی چندگونای دوبه‌دو مجزا از بعد t باشد. آبراهام رابینسن اولین کسی بود که متوجه شد موضوع مورد مطالعهٔ هندسهٔ جبری و نظریهٔ مدلها (در صورتی‌که به هیأتها محدود شود) یکی است: طبق قضیهٔ معروف حذف سور روی k، هر زیرمجموعهٔ تعریف‌پذیر از k^n ترکیبی بولی از چندگوناهاست.

در حالت کلی هر ساختار M (درواقع گسترش مقدماتی بزرگی از آن) که تعریف فوق (با تعریف‌پذیرها به جای چندگوناها) در مورد آن به‌کار آید به‌طوری که بعد M یک اردینال شود، کاملاً متعالی یا ستاره‌دار نامیده می‌شود (همین اصطلاح برای $\mathrm{Th}(M)$ که $\mathrm{Th}(M)=\{\sigma : M\models\sigma\}$ به‌کار می‌رود) و بعد مربوطه را رتبهٔ مورلی می‌نامند. مثلاً اگر E رابطه‌ای هم‌ارزی با بی‌نهایت ردهٔ نامتناهی روی M باشد، هر رده رتبهٔ ۱، ولی خود M رتبهٔ ۲ دارد.

با اندک تغییراتی در تعریف فوق، به رتبهٔ لاسکار[2] می‌رسیم که متناظر با نظریه‌های فوق پایدار است و نیز با تغییراتی در رتبهٔ لاسکار به رتبه‌های موضعی شلاه می‌رسیم که متناظر با نظریه‌های پایدار است. (در این مقاله نیازی به این مفاهیم نداریم).

رابطهٔ بین این مفاهیم به‌صورت زیر است:

پایدار $\rightarrow$ فوق پایدار $\rightarrow$ ω-پایدار $\rightarrow$ $\aleph_1$-جازم

یک نتیجهٔ مهم این تقسیم‌بندی، نزدیک شدن به حل نهایی حدس وُت[3] است. طبق این حدس تعداد مدلهای شمارای هر نظریهٔ کامل، یا حداکثر $\aleph_0$ و یا دقیقاً $2^{\aleph_0}$ است. مورلی (در ۱۹۷۰) ثابت کرد که تنها حالت احتمالی دیگر $\aleph_1$ است. این حدس برای برخی حالات ثابت شده است ولی تکلیف آن در حالت کلی هنوز روشن نشده است.

۳. مجموعه‌های قویاً مینیمال

نتیجهٔ نهایی قضیهٔ مورلی این است که نظریه‌های جازم (از یک کاردینال نامتناهی λ) بر سه دستهٔ زیرند:

۱. کاملاً جازم (از هر کاردینال نامتناهی)
۲. $\aleph_0$-جازم و غیر $\aleph_1$-جازم
۳. $\aleph_1$-جازم و غیر $\aleph_0$-جازم

همچنین بی‌مناسبت نیست قضیهٔ اساسی دیگری را در همین زمینه یادآوری کنیم:

قضیه (بالدوین-لاخلان[4]). یک نظریهٔ $\aleph_1$-جازم و غیر $\aleph_0$-جازم دارای دقیقاً $\aleph_0$ مدل شمارای غیریکریخت (و همگی همگن) است.

به‌عنوان مثال، در نظریهٔ هیأتهای جبری-بستهٔ با مشخصهٔ ثابت p، هر مدل به‌طور یکتا با درجهٔ تعالی‌اش تعیین می‌شود. بنابراین به‌ازای هر n که $0 \le n \le \omega$، هیأت شمارای k_n و دنبالهٔ گسترشهای مقدماتی زیر را داریم:
$k_0 \prec k_1 \prec \cdots \prec k_\omega$.

وضعیت مشابهی برای فضاهای برداری روی هیأت ثابت F برقرار است. اطلاعات موجود نشان می‌دهد که نظریه‌های نوع سوم از محتوای ریاضی عمیق‌تری برخوردارند و بحث حاضر درواقع گزارشی مختصر در این مورد یا به‌طور کلیتر در مورد $\aleph_1$-جازمهاست.

نوع مهمی از نظریه‌های $\aleph_1$-جازم، نظریه‌های «قویاً مینیمال» است.

تعریف. فرض می‌کنیم T کامل و $M \models T$ به‌قدر کافی اشباع شده باشد. همچنین $A \subseteq M$ را تعریف‌پذیر می‌گیریم. A را قویاً مینیمال می‌نامند هرگاه هر زیرمجموعهٔ تعریف‌پذیر (با پارامتر) از A متناهی و یا مکمل متناهی باشد. اگر خود M قویاً مینیمال باشد، این خاصیت به هر $N \equiv M$ که حداقل ω-اشباع شده باشد سرایت می‌کند و در این‌صورت می‌گویند که $\mathrm{Th}(M)$ قویاً مینیمال است.

به‌عنوان مثال، اگر k جبری-بسته باشد، آن را نمی‌توان به دو بخش تعریف‌پذیر نامتناهی تقسیم کرد (هر زیرچندگونای k متناهی یا مکمل متناهی است). بنابراین $\mathrm{Th}(k)$ قویاً مینیمال است. همچنین هر فضای برداری نامتناهی روی هیأت F در زبان $\mathfrak{L}=\{+,0,r\}_{r\in F}$ که در آن r نمایانگر ضرب اسکالر در r است، قویاً مینیمال است. و بالاخره ساده‌ترین مثال اینکه هر مجموعهٔ نامتناهی فاقد ساختار (بجز تساوی) قویاً مینیمال است.

محتوای ریاضی یک ساختار قویاً مینیمال در «بستار جبری» آن که با acl نشان داده می‌شود نهفته است. علت آن این است که رتبهٔ مورلی (بعد) یک مجموعهٔ قویاً مینیمال ۱ است و بنابراین فورکینگ روی آن پیچیده نیست. درواقع، موضوع اساسی این است که acl در اصل «تعویض» صدق می‌کند. این مطلب را توضیح می‌دهیم.

یک پیش‌هندسه به معنی موردنظرِ وان دِر وردن-ویتنی روی مجموعهٔ X عبارت است از عملگری بستاری چون $\mathrm{cl}:\mathcal{P}(X)\to\mathcal{P}(X)$ به‌طوری که

۱. (یکنوایی) به‌ازای هر $A\subseteq X$، $A\subseteq \mathrm{cl}(A)$؛
۲. (تعدی) $\mathrm{cl}(\mathrm{cl}(A))=\mathrm{cl}(A)$؛
۳. (موضعاً متناهی‌بودن) اگر $a\in\mathrm{cl}(A)$، آنگاه $A_0\subseteq A$ متناهی وجود دارد که $a\in\mathrm{cl}(A_0)$؛
۴. (تعویض) اگر $a\in\mathrm{cl}(A\cup\{b\})-\mathrm{cl}(A)$ آنگاه $b\in\mathrm{cl}(A\cup\{a\})$.

روی هر ساختار مرتبهٔ اول M یک عملگر بستاری طبیعی وجود دارد: اگر $A\subseteq M$، آنگاه می‌گوییم $a\in\mathrm{acl}(A)$ هرگاه فرمول $\varphi(x)$ با پارامترهای احتمالی در A موجود باشد به‌طوری که $\varphi(M)$ متناهی و شامل a باشد (این مطلب در مورد هیأتها به این شکل درمی‌آید: $a\in\mathrm{acl}(A)$ هرگاه a ریشهٔ یک چندجمله‌ای با ضرایب در A باشد). در این صورت، عملگر $A\to\mathrm{acl}(A)$ در تمام اصول فوق بجز اصل تعویض صدق می‌کند. اگر برحسب اتفاق M قویاً مینیمال باشد، acl در تعویض هم صادق خواهد بود و بنابراین (M,acl) تشکیل یک پیش‌هندسه خواهد داد. (همین حکم در مورد نظریه‌های موسوم به o-مینیمال که هیأتهای بستهٔ حقیقی نمونه‌ای از آن است، برقرار است).

1. variety 2. Lascar 3. Vought 4. Baldwin-Lachlan

پیش‌هندسهٔ X را هندسه می‌گویند هرگاه $\mathrm{cl}(\varphi) = \varphi$ و برای هر تک نقطهٔ a داشته باشیم $\mathrm{cl}(a) = \{a\}$. با زدودن $\mathrm{cl}(\varphi)$ از مجموعهٔ X و یکی گرفتن عناصر $\mathrm{cl}(a)$، می‌توان از هر پیش‌هندسه یک هندسه درست کرد. همچنین برای هر a، عملگر $\mathrm{cl}_a(A) = \mathrm{cl}(A \cup \{a\})$ یک پیش‌هندسهٔ دیگر روی X تعریف می‌کند.

یادآوری می‌کنیم که با معرفی نمادهای معمولی مناسب می‌توان هر پیش‌هندسه را به ساختاری مرتبهٔ اول تبدیل کرد که هندسهٔ منتج از خود را در خود تعبیر می‌کند. با داشتن یک پیش‌هندسه می‌توان مفاهیمی چون استقلال، زیرمجموعهٔ بسته، پایه و بعد را تعریف کرد و دقیقاً همین جاست که می‌توان ثابت کرد که هر نظریهٔ قویاً مینیمال لزوماً $\aleph_1$-جازم است.

هندسهٔ X را تباهیده می‌نامند هرگاه به‌ازای هر $A \subseteq X$ داشته باشیم $\mathrm{cl}(A) = \bigcup_{a \in A} \mathrm{cl}(a)$، و مدولار می‌نامند هرگاه به‌ازای هر $A, B \subseteq X$ بسته و با بعد متناهی داشته باشیم

$$\dim(A) + \dim(B) = \dim(A \cup B) + \dim(A \cap B)$$

و بالاخره X را موضعاً مدولار می‌گوییم هرگاه به‌ازای a ای متعلق به X، (X, cl_a) مدولار باشد.

چند مثال:

۱. (هندسهٔ تباهیده) اگر X مجموعه‌ای نامتناهی باشد، قرار می‌دهیم

$$\mathrm{cl}(A) = A$$

۲. (پیش‌هندسهٔ مدولار) اگر V یک فضای برداری باشد و $A \subseteq V$، قرار می‌دهیم

$$\mathrm{cl}(A) = \text{زیرفضای برداری تولید شده توسط } A$$

۳. (هندسهٔ موضعاً مدولار) در مثال ۲ قرار می‌دهیم

$$\mathrm{cl}(A) = \text{فضای آفین تولید شده توسط } A$$

۴. اگر k هیأتی جبری-بسته باشد، قرار می‌دهیم

$$\mathrm{cl}(A) = \text{بستار جبری } A$$

همان‌طور که گفتیم acl روی هر ساختار قویاً مینیمال تشکیل یک پیش‌هندسه می‌دهد. از قضا نوع هندسهٔ این ساختارها در رده‌بندی نظریه‌های $\aleph_1$-جازم نقش تعیین کننده دارد. این مطلب به‌خوبی در دو قضیهٔ تثلیث[1] و نردبان[2] بازتاب یافته است. فرض کنیم M ساختاری $\aleph_1$-جازم باشد و $A \subseteq M$ تعریف‌پذیر (با پارامتر). به‌طور طبیعی می‌توان ساختار M را به A تحدید کرد و A را فی‌نفسه در نظر گرفت.

قضیه (تثلیث زیلبر). فرض کنیم M ساختاری $\aleph_1$-جازم است. در این صورت دقیقاً یکی از سه حالت زیر پیش می‌آید:

1. trichotomy 2. ladder

۱. (تباهیده) هندسهٔ یک یا هر زیرمجموعهٔ (تعریف‌پذیر) قویاً مینیمال از M تباهیده است.
۲. (شبه‌مدول) هندسهٔ یک یا هر زیرمجموعهٔ قویاً مینیمال از M موضعاً مدولار است.
۳. (شبه‌هیأت) شبه‌صفحه‌ای در M یافت می‌شود (تعبیر می‌شود).

(در بیشتر متون، نوع اول و دوم را مدولار می‌نامند.) سومی نیاز به توضیح دارد. فرض کنیم F یک هیأت است. می‌توان روی F^{*3} یک صفحهٔ تصویری ساخت (تعبیر کرد). $x, y \in F^3$ ناصفر را هم‌ارز می‌گوییم هرگاه aی ناصفری موجود باشد که $y = ax$. حال هر زیرفضای دوبعدی از F^3 را یک خط و هر $[x]$ را یک نقطه می‌نامیم. همچنین می‌گوییم نقطهٔ p در خط l است هر گاه l شامل p باشد. حال:

الف) ازهر دو نقطهٔ متمایز خط یکتایی می‌گذرد.

ب) هر دو خط متمایز در نقطهٔ یکتایی متقاطع‌اند.

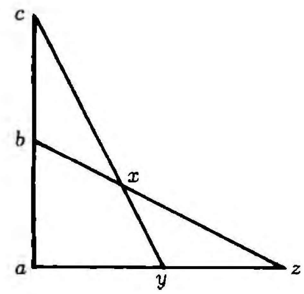
تقریباً همین کار را می‌توان در یک ساختار قویاً مینیمال غیرمدولار انجام داد. فرض کنیم P مجموعه‌ای از نقاط، L مجموعه‌ای از خطوط و ϵ زیرمجموعه‌ای از $P \times L$ باشد. اگر $a \in l$، می‌گوییم l شامل a است یا از a می‌گذرد. سه‌تایی (P, L, ϵ) را شبه‌صفحه می‌گویند هرگاه

۱. هر خط شامل بینهایت نقطه باشد.
۲. از هر نقطه بینهایت خط بگذرد.
۳. هر دو خط متمایز تقاطع متناهی داشته باشند.
۴. از هر دو نقطه تعداد متناهی خط بگذرد.

بدین ترتیب در هر ساختار $\aleph_1$-جازم غیرمدولار می‌توان شبه‌صفحه ای نامتناهی ساخت. اصولاً مدولار بودن یک ساختار به‌معنی مسطح بودن یا شبیه مدول بودن آن است در حالی که وجود شبه‌صفحه بیانگر ساختار غیرخطی و فرامدولی آن است. قضیهٔ دیگر زیلبر (قضیهٔ نردبان) [۹] بیان می‌کند که چگونه مجموعه‌های قویاً مینیمال یک ساختار $\aleph_1$-جازم داخواه را بنا می‌کنند. نهایت اینکه مجموعه‌های قویاً مینیمال اجزاء سازندهٔ ساختارهای $\aleph_1$-جازم‌اند و بنابراین مطالعهٔ $\aleph_1$-جازمیت به مطالعهٔ ساختارهای قویاً مینیمال موکول می‌شود.

مسألهٔ در نهایت رده‌بندی ساختارهای قویاً مینیمال در سه حالت بدیهی، مدولار و دارای شبه‌صفحه است، اما قبلاً باید مشخص کنیم که منظور از رده‌بندی چیست و در چه حدی است. مسلماً رده‌بندی در حد یکریختی مشکل و حتی بی‌مورد است زیرا به‌راحتی می‌توان تغییراتِ جزئیِ متنوعی در ساختار داد که قویاً مینیمال بماند. انتخاب درست، «هم‌تعبیرپذیری» است. دو ساختار دلخواه M و N را هم‌تعبیرپذیر[1] می‌گویند هرگاه هر یک در دیگری تعبیر شود (احتمالاً با استفاده از پارامترها). مثلاً $(\mathbb{Q}, +, .)$ و $(\mathbb{Z}, +, .)$ هم‌تعبیرپذیرند زیرا $\mathbb{Q}$ هیأت کسرهای $\mathbb{Z}$ است و درواقع $\mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Q}$ تابعی ساختاری است. از طرف دیگر، چنانکه معروف است $\mathbb{Z}$ در $\mathbb{Q}$ قابل تعریف است (در زبان حلقه‌ها) ولی توجه کنید که دو هیأت $\mathbb{R}$ و $\mathbb{C}$ هم‌تعبیرپذیر نیستند و فقط $\mathbb{C}$ در $\mathbb{R}$ تعبیر می‌شود. هم‌تعبیرپذیری را می‌توان به هوموتوپی تشبیه کرد زیرا طی آن خواص اساسی ساختار محفوظ می‌ماند. بنابراین مثلاً

1. bi-interpretable



به دنبال این هستیم که ببینیم در هر یک از سه مقولهٔ فوق چه ساختار متعارفی (مثل گروه، حلقه، ...) قابل تعبیر است.

یکی از زیباترین نتایج در این باب، قضیهٔ «پیکربندی گروهی» خروشوفسکی است. فرض کنیم a، b، c، x، y، z عناصری در ساختار M باشند که همگی دارای بعد (رتبهٔ مورلی) یک باشند ولی هر زوج از آنها و همچنین $\{a,b,c\}$، $\{a,y,z\}$، $\{b,x,z\}$ و $\{c,x,y\}$ دارای بعد ۲ باشند و نیز بعد هر سه تایی دیگر ۳ باشد (به نمودار بالا توجه کنید).

مثلاً اگر G گروهی نامتناهی و آبلی باشد و $a, b, x \neq 0$ عناصر متمایزی باشند، می‌گیریم $c = ab$، $y = cx$، و $z = bx$ (و در نتیجه $y = az$). در این صورت شرایط فوق صادق‌اند.

قضیه (خروشوفسکی). فرض کنیم M قویاً مینیمال باشد و یک پیکربندی گروهی در آن یافت شود، در این صورت M قادر است یک گروه آبلی قویاً مینیمال را تعبیر کند.

همچنین قضیهٔ مشابهی دربارهٔ پیکربندی هیأتی وجود دارد.

تحقیقات بیشتر نشان می‌دهد که یک مجموعهٔ قویاً مینیمال تباهیده نمی‌تواند هیچ گروه نامتناهی را در خود تعبیر کند در حالی‌که مجموعهٔ قویاً مینیمال مدولار می‌تواند گروهی نامتناهی و آبلی (و نه بیشتر!) را در خود تعبیر کند [۱]. در مورد ساختارهای قویاً مینیمال غیرمدولار چیزی نمی‌توان گفت. فقط تعدادی مثال در اختیار داریم: هیأتهای جبری‌ـبسته. بدین‌سان زیلبر حدس زیر را مطرح کرد:

حدس زیلبر: هر ساختار قویاً مینیمال و غیرمدولار با یک هیأت جبری‌ـبسته هم‌تعبیرپذیر است.

این حدس نه تنها از جهت ریاضی بلکه از دید فراریاضی هم حائز اهمیت است زیرا مدعی است در ریاضیات هیچ ساختار هندسی (از دید جبری) بجز هیأتها وجود ندارد. این حدس سرانجام توسط خروشوفسکی رد شد [۳]. (و البته این ردشدن باعث نجات نظریهٔ مدلها شد!) وی مثالی از یک ساختار قویاً مینیمالِ غیرمدولار ارائه داد که قادر نیست حتی یک گروه نامتناهی را در خود تعبیر کند (چه رسد به یک هیأت). یعنی حدس زیلبر به بدترین وجه ممکن نقض شد. وی همچنین نشان داد که تعدادی ناشمارا مجموعهٔ قویاً مینیمال وجود دارد که در یکدیگر تعبیر نمی‌شوند.

از سوی دیگر وی نشان داد [۴] که چگونه می‌توان دو ساختار قویاً مینیمال را در هم آمیخت (بر پایهٔ مجموعه‌ای واحد) و ساختار قویاً مینیمال دیگری به‌دست آورد. مثلاً می‌توان نشان داد که ساختار $(F, +, ., \oplus, \odot)$ وجود دارد که قویاً مینیمال است و $(F, +, .)$ و $(F, \oplus, \odot)$ هیأتهایی جبری‌ـبسته با مشخصه‌های متفاوت‌اند. البته چون گسترش فوق از $(F, +, .)$ غیربدیهی است حتماً acl را عوض می‌کند.

دنیای ساختارهای قویاً مینیمال بسیار شلوغ است، با این‌حال حدس زیلبر کلاً کنار گذاشته نشد بلکه برعکس، معلوم شد تحت شرایط مناسب می‌توان آن‌را ثابت کرد. درواقع خروشوفسکی و زیلبر تجریدی از توپولوژی زاریسکی روی هیأتهای جبری‌ـبسته ابداع کردند که آن‌را هندسهٔ زاریسکی نامیدند. سپس با نهادن شرطهای وافر[1] و بسیار وافر[2] توانستند حدس را ثابت کنند. بی‌شک حدس زیلبر یکی از مهمترین سرچشمه‌های تحقیقات در سالهای اخیر بوده است. در این رابطه حدس دیگری از زیلبر وجود دارد که هنوز حل و فصل نشده است و آن مدعی است که هر گروه نامتناهی ساده‌ـهمبند و با رتبهٔ مورلی متناهی، با هیأتی جبری‌ـبسته هم‌تعبیرپذیر است (درواقع مدعی است که با گروهی جبری یکریخت است). حالات خاصی از این حدس (مثل حالت گروههای زاریسکی) حل شده است. حل کامل آن تأیید محکمتری است بر اینکه ابزارهای منطقی قادرند ماهیت بسیاری از ساختارهای جبری مهم را تعیین کنند.

مراجع

1. E. Bouscaren, and E. Hrushovski, "On one based theories", *The Journal of Symbolic Logic*, **59** (1994) 579-95.
2. W. A. Hodges, *Model Theory*, Cambridge University Press (1993).
3. E. Hrushovski, "A new strongly minimal set", *Annals of Pure and Applied Logic*, **62** (1993) 147-166.
4. ———, "Strongly minimal expansions of algebraically closed fields", *Israel Journal of Mathematics*, **79** (1992) 129-151.
5. E. Hrushovski, and B. Zilber, "Zariski geometries", *J. Amer. Math. Soc.*, **9** (1996) 1-50.
6. D. Marker, "Strong minimal sets and geometry", in *Springer Lecture Notes in Logic* (1998).
7. M. Morley, "Categoricity in power", *Transactions of the American Mathematical Society*, **114** (1965) 514-538.
8. A. Pillay, "Stable theories, pseudoplanes and the number of countable models", *Annals of Pure and Applied Logic*, **43** (1989) 147-160.
9. B. I. Zilber, *Uncountably Categorical Theories*, AMS Translations of Mathematical Monographs, vol. 117.

******

* سیدمحمد باقری، دانشگاه اصفهان

bagheri@karun.ipm.ac.ir

1. ample 2. very ample