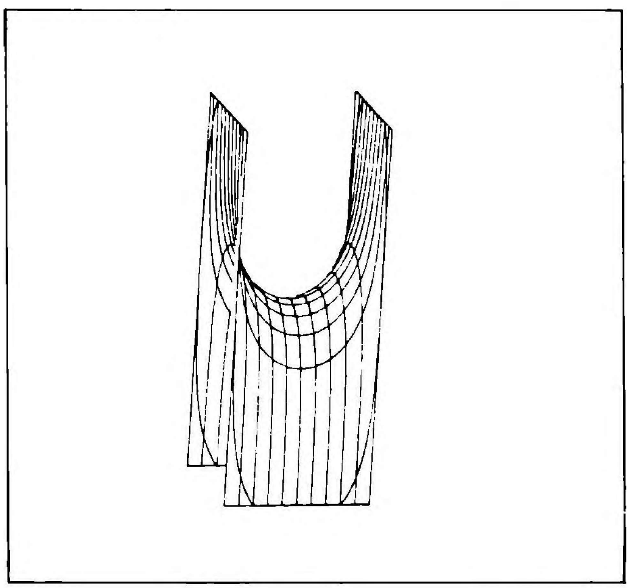
رویه‌های مینیمال

سیدمحمدباقر کاشانی *

مقدمه

جاذبهٔ خاص رویه‌های مینیمال در این حقیقت نهفته است که گرچه آنها خانواده‌ای خاص از رویه‌ها را تشکیل می‌دهند و ظاهراً نباید چندان مورد توجه باشند، ولی چون در زمینه‌های گوناگون ریاضی و نیز در فیزیک و شیمی مطرح می‌شوند، مطالعهٔ آنها از جهات مختلفی مفید است.در سالهای اخیر به خاطر به دست آمدن تصویرهای جالب کامپیوتری از این رویه‌ها و نیز کاربردهایشان در شیمی، توجه به این رویه‌ها افزایش یافته است.مشهورترین نمونهٔ رویهٔ مینیمال در فیزیک، لایهٔ نازک صابون است [۲].مثال دیگر، تصویری زیبا از یک رویهٔ مینیمال است (شکل ۱) که ابتدا در سال ۱۸۳۵ به وسیلهٔ شرک (Scherk) کشف شد [۱] و اکنون در فیزیک و شیمی اهمیت یافته است.این اهمیت از آن روست که دانشمندان پلیمر در تحقیقات خود رویه‌هایی بسیار شبیه رویه‌های شرک یافته‌اند.کامپیوتر نه تنها دیدن رویه‌هایی را ممکن ساخته که قبلاً مرموز به نظر می‌رسیدند، و کاملاً تحلیلی هستند (یعنی نقاط آنها عبارت‌اند از ریشه‌های تعدادی متناهی معادلهٔ تحلیلی)، بلکه به دست آمدن تصاویر کامپیوتری در اثباتها و در تولید مثالهای جدید نیز مفید واقع شده است.



شکل ۱.رویهٔ شرک

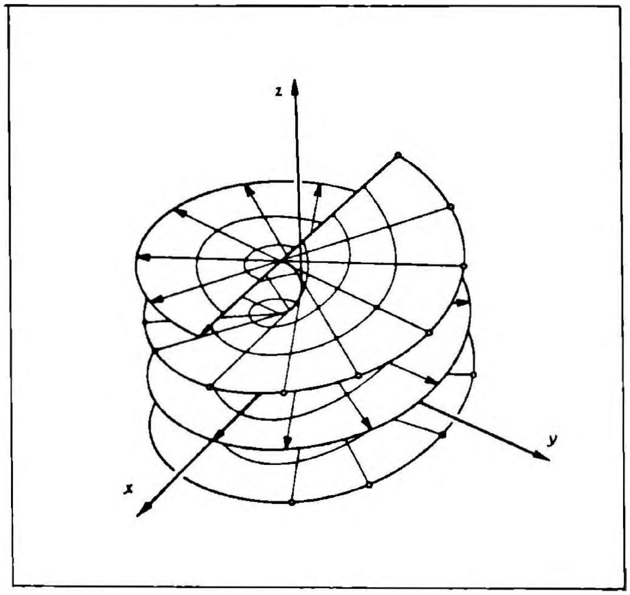
از نظر تاریخی، مطالعهٔ رویه‌های مینیمال را لاگرانژ در سال ۱۷۶۰ شروع کرد.او رویه‌هایی در $\mathbf{R}^3$ را بررسی کرد که به صورت نمودار تابعهای $z = f(x, y)$ که حداقل C^2 باشند قابل معرفی‌اند (زوج (x, y) در دامنه‌ای از $\mathbf{R}^2$ تغییر می‌کند).لاگرانژ در این باره این سؤال را مطرح کرده است:مطلوب است مشخص کردن آن دسته از رویه‌های فوق‌الذکر که هر قسمت فشرده از آنها(آن) دارای کمترین مساحت در بین همهٔ رویه‌هایی است که مرزشان همان مرز قسمت فشردهٔ انتخاب شده است.با توجه به اینکه جزء دیفرانسیل مساحت برای رویه‌های فوق به صورت $dA = (1 + f_x^2 + f_y^2)^{1/2} dx dy$ است (f_x و f_y مشتق f نسبت به x و y هستند). حل این مسأله منجر به حل معادلهٔ دیفرانسیل درجهٔ دوم زیر می‌شود

$$f_{xx}(1 + f^2 y) - 2 f_x f_y f_{xy} + f_{yy}(1 + f_x^2) = 0 \qquad (1)$$

این معادله درحقیقت شرط لازم برای حل مسألهٔ لاگرانژ را ارائه می‌دهد.لاگرانژ مشاهده کرد هر تابع خطی (که نمودارش یک صفحه است) آشکارا یک جواب معادلهٔ (۱) است و البته خاصیت ذکر شده را نیز دارد.او همچنین وجود جوابهایی با هر مرز (هموار) داده شده را حدس زد.

در سال ۱۷۷۶، مونیه (Meusnier) تعبیر هندسی $H \equiv 0$ (صفر بودن خمیدگی متوسط در تمام نقاط) را برای مسألهٔ بالا بیان کرد (به تابلو نگاه کنید).البته، گفتنی است که این شرط ($H \equiv 0$) ضعیفتر از خاصیتی است که لاگرانژ در نظر گرفته بود ولی پس از پیدا شدن این تعبیر، این شرط برای تعریف رویهٔ مینیمال در نظر گرفته شد.غیر از صفحه، پیچوار (helicoid، شکل ۲) که به وسیلهٔ تابع $F : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ با فرمول $F(x, y) = (x\cos ay, x\sin ay, by)$، $0 \neq a, b \in \mathbf{R}$، مشخص می‌شود، رویهٔ دیگری بود که او به عنوان جواب معادلهٔ (۱) به دست آورد.وی همچنین دریافت که زنجیروار (catenoid، شکل ۳) که از دوران خم $\alpha(x) = (x, a\cosh(x/a + b))$، $a \neq 0$، $a, b \in \mathbf{R}$ ، حول محور xها حاصل می‌شود، تنها رویهٔ مینیمال دواردر $\mathbf{R}$ است.

در سال ۱۸۳۵، شرک با حل معادلهٔ (۱) برای توابعی به صورت $f(x, y) = g(x) + h(y)$ مثال جالب دیگری از رویه‌های مینیمال کشف کرد [۱].نمودار این توابع به نام رویهٔ مینیمال شرک (شکل ۱) مشهور است.شرک همچنین کوشید همهٔ رویه‌های مینیمال خط کشی شده (ruled) را مشخص



شکل ۲. پیچوار

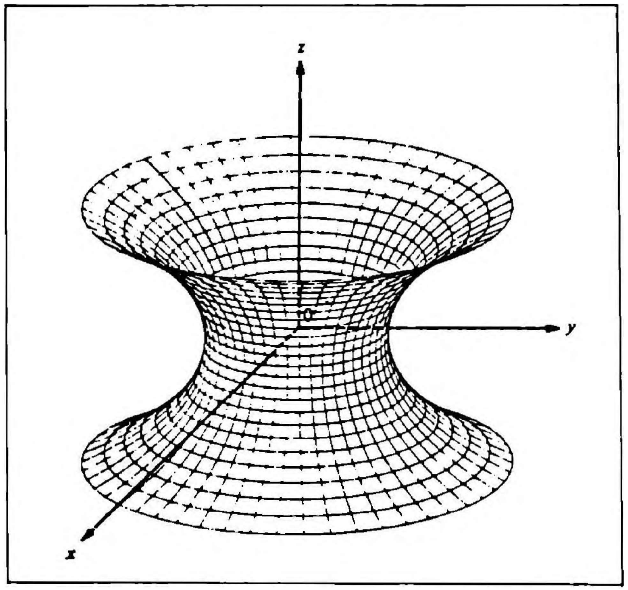
کند ولی موفق به حل کامل مسأله نشد. این مسأله سرانجام در سال ۱۸۴۲ به وسیلهٔ کتلان (Catalan) حل شد. وی ثابت کرد که پیچوار تنها رویهٔ مینیمال **خط‌کشی شده در $\mathbf{R}^3$ است.**

اولین راه حل کلی برای معادلهٔ (۱) را وایرشتراس در سال ۱۸۶۶ ارائه کرد. در روش وی اولاً هر رویهٔ مینیمال ساده همبند را می‌توان برحسب فرمولی بیان کرد که او یافته و به نمایش وایرشتراس از رویه‌های مینیمال موسوم است؛ ثانیاً با در دست داشتن هر دو تابع تحلیلی f و g در یک دامنهٔ ساده همبند، چنانکه $f(z) \neq 0$، می‌توان یک رویهٔ مینیمال به دست آورد (این مطلب را در همین مقاله ملاحظه خواهید کرد). یک نتیجهٔ مستقیم این روش این است که رویه‌های مینیمال دارای توابع مختصات تحلیلی حقیقی هستند.

با توجه به مسائلی که تاکنون در زمینهٔ رویه‌های مینیمال بررسی شده‌اند، می‌توان گفت که به طورکلی نظریهٔ رویه‌های مینیمال در $\mathbf{R}^3$ در قرن نوزدهم عمدتاً محدود به خواص موضعی و مثالهایی خاص بوده و بر عکس، در قرن بیستم بر مسائل سراسری (global) و رویه‌های مینیمال کلی تأکید شده است.

در قرن حاضر، اولین نتیجهٔ سراسری مهم را برنشتاین (Bernstein) در سال ۱۹۱۵ به دست آورد. او رویه‌های مینیمال را از دیدگاه نظریهٔ معادلات دیفرانسیل جزئی بیضوی بررسی کرد. چنانچه بحث را به جوابهایی از معادلهٔ (۱) که به صورت نمودار تابع $z = f(x, y) \in \mathbf{R}$ هستند محدود کنیم، چنانکه گفته شد صفحه یک جواب معادلهٔ (۱) است. قضیهٔ مهمی از برنشتاین حاکی است که تنها جوابهای تام (entire) معادلهٔ (۱) توابع خطی هستند (جواب تام آن است که به ازای تمام مقادیر (x, y) در صفحه تعریف شده باشد). یک نتیجهٔ بلافصل قضیهٔ برنشتاین این است که هر جواب کراندار معادلهٔ (۱) تابعی ثابت است. برای آگاهی از اثبات قضیهٔ برنشتاین و تعمیمهای آن می‌توان به [۱۰] مراجعه کرد.

از جمله مسائل سراسری دیگری که در قرن بیستم و به ویژه در سالهای اخیر دربارهٔ رویه‌های مینیمال مورد مطالعه قرار گرفته‌اند، عبارت‌اند از



شکل ۳. زنجیروار

رویه‌های مینیمال کامل (complete)، رویه‌های مینیمال کامل با خمیدگی کل متناهی، رویه‌های مینیمال تناوبی، یک بار تناوبی، دوبار تناوبی، سه‌بار تناوبی، زیر خمینه‌های مینیمال (با بعد ناکمتر از ۳) در $\mathbf{R}^n$ و در فضاهای ریمانی کلیتر ...

بررسی مختصر رابطهٔ رویه‌های مینیمال با شاخه‌های گوناگون ریاضی

به خاطر آورید که یک رویهٔ S در $\mathbf{R}^n$ به وسیلهٔ تابع هموار $F : D \to \mathbf{R}^n$ مشخص می‌شود که در آن، D یک دامنه (زیرمجموعهٔ باز و همبند) در $\mathbf{R}^2$ است. مختصات $x = (x_1, x_2)$ را در D و $y = (y_1, \ldots, y_n)$ را در $\mathbf{R}^n$ به کار می‌بریم. بنابراین داریم $y = F(x)$. اگر قرار دهیم $g_{ij} = < \frac{\partial y}{\partial x_i}, \frac{\partial y}{\partial x_j} >$، آنگاه رویهٔ S در نقطه‌ای از دامنه‌اش عادی (regular) نامیده می‌شود چنانچه $\det(g_{ij}) \neq 0$ یا به بیان دیگر، چنانچه بردارهای $\frac{\partial y}{\partial x_1}$ و $\frac{\partial y}{\partial x_2}$ مستقل خطی باشند.

روش اصلی برای مطالعهٔ یک رویهٔ S در همسایگی نقطه‌ای از آن عبارت است از بررسی کلیهٔ خمهای واقع بر رویه که از آن نقطه می‌گذرند. در این بررسی، «بردارهای خمیدگی» خمها نقش مهمی دارند. چنانچه در نقطهٔ $p \in S$ یک بردار واحد مماس بر رویه چون T را در نظر گرفته و خم عادی α (پارامتری شده به وسیلهٔ طول قوس s) واقع بر S را چنان در نظر بگیریم که در p بر T مماس باشد، مؤلفهٔ عمودی (قائم بر رویه در نقطهٔ p) بردار خمیدگی α، یعنی $k^N(T)$، عبارت است از $k^N(T)' = (\frac{d\alpha'}{ds})^N$ که در آن $\alpha' = \frac{d\alpha}{ds}$ و این مؤلفه، بردار خمیدگی رویه در جهت T نامیده می‌شود. این بردار از آن جهت که مستقل از α است و فقط به S و T بستگی دارد، به S نسبت داده می‌شود. بردار خمیدگی میانگین رویهٔ S در p عبارت است از میانگین همهٔ $k^N(T)$ها هنگامی که T روی دایرهٔ واحد در فضای مماس بر S در p تغییر کند، یعنی $H = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} k^N(T) d\theta$ (بردار خمیدگی متوسط) که θ عبارت است از زاویه‌ای که در جهت مثبت بین T و جهتی ثابت (جهت مماسی) چون T_0 اندازه‌گیری می‌شود. می‌توان نشان

داد $H = \frac{1}{2}(k^N(T_1) + k^N(T_2))$ که T_1 و T_2 دو بردار واحد متعامد مماس می‌باشند.(همچنین نگاه کنید به تابلو).حال بنا به تعریف، یک رویهٔ عادی را مینیمال نامند در صورتی که $H \equiv 0$.اکنون، با در دست داشتن این تعریف، رابطهٔ رویه‌های مینیمال را با شاخه‌های مختلف ریاضی بررسی می‌کنیم.

الف) رابطه با نظریهٔ توابع مختلط

فرض کنید $\hat{F} : \hat{D} \to \mathbf{R}^n$، $\hat{D} \subset \mathbf{R}^2$، یک رویهٔ عادی را تعریف کند.در این صورت، برای هر نقطهٔ $p \in S$، یک همسایگی p را می‌توان به وسیلهٔ تابع همدیسی چون F پارامتری کرد.اگر قرار دهیم $y = F(x)$، $x = (x_1, x_2)$، x_1 و x_2 پارامترهای همدیس یا تکدما (isothermal) نامیده می‌شوند.به طور کلی، پارامتربسازی $y = y(x_1, x_2)$ برای رویهٔ عادی S تکدما نامیده می‌شود اگر

$$< \frac{\partial y}{\partial x_1}, \frac{\partial y}{\partial x_2} >= 0, < \frac{\partial y}{\partial x_1}, \frac{\partial y}{\partial x_1} >=< \frac{\partial y}{\partial x_2}, \frac{\partial y}{\partial x_2} > 0$$

حال اگر $\hat{D}$ ساده همبند باشد، آنگاه رویه را به وسیلهٔ تابع همدیسی چون $F : D \to \mathbf{R}^n$ می‌توان به طور سراسری پارامتری کرد.در اینجا، D دامنه‌ای ساده همبند در صفحه است و به موجب قضیهٔ تابع ریمان، D را می‌توان تمام صفحه یا قرص واحد فرض کرد (به تابلو مراجعه کنید).

پس فرض کنید که رویهٔ S به وسیلهٔ تابع همدیس $F : D \to \mathbf{R}^n$ مشخص شده است و $y = F(x)$.بنا به تعریف تابع همدیس داریم

$$g_{ij} =< \frac{\partial y}{\partial x_i}, \frac{\partial y}{\partial x_j} >= \lambda^2 \delta_{ij}, \lambda \neq 0$$

بنابراین، بردارهای $T = \frac{1}{\lambda}\frac{\partial y}{\partial x_1}$ و $U = \frac{1}{\lambda}\frac{\partial y}{\partial x_2}$ بردارهای مماس واحد متعامد هستند.لذا $H = \frac{1}{2\lambda^2}(\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2})^N$ ولی بردارهای $\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2}$ و $\frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2}$ خود بردارهای قائم هستند.پس

$$H = \frac{1}{2\lambda^2}(\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2}) = \frac{1}{2\lambda^2}\Delta y = \frac{1}{2\lambda^2}(\Delta y_1, \ldots, \Delta y_n)$$

نتیجهٔ واضح رابطهٔ بالا این است که رویهٔ S مینیمال است اگر و تنها اگر هر یک از توابع مختصات y_i همساز باشند.همچنین هنگامی که $n = 3$ و تابع گاوس رویهٔ مینیمال را در نظر بگیریم (به تابلو نگاه کنید)،این تابع همدیس است.این دو نکته‌اولین رابطه‌های بین رویه‌های مینیمال و نظریهٔ توابع مختلط را برقرار می‌کنند زیرا توابع همساز قسمتهای حقیقی توابع تحلیلی مختلط هستند و تابع گاوس هنگامی که به عنوان تابعی از صفحهٔ مختلط به خودش در نظر گرفته شود (با یکسان گرفتن کره منهای یک نقطه با صفحهٔ مختلط) تابعی تحلیلی است.

ب) رابطه با حساب وردشها(واریاسیون)

فرض کنید رویهٔ عادی S_0 به وسیلهٔ تابع $y = F_0 : D \to \mathbf{R}^3$ مشخص شده است.میدان برداری C^1 قائم V (V در هر نقطه قائم بر رویه است) بر S_0 را در نظر گرفته خانوادهٔ یک متغیره از رویه‌های S_t را که در جهت V تغییر می‌کنند به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$y_t(x) = F_t(x) = y(x) + tV(x).$$

اولین فرم اصلی y_t عبارت است از $g_{ij}(t) =< \frac{\partial y_t}{\partial x_i}, \frac{\partial y_t}{\partial x_j} >$. مساحت $F_t(D')$ برای هر زیر دامنهٔ فشردهٔ D' در D به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$A(t) = \iint_{D'} \sqrt{\det(g_{ij}(t))}dx_1 dx_2$$

با به کاربردن بسط اولین فرم اصلی می‌توان به دست آورد

$$\frac{d}{dt}\sqrt{\det(g_{ij}(t))}\ |_{t=0} = -2 < H, V > \sqrt{\det(g_{ij})}$$

که H همان میدان برداری خمیدگی متوسط است.بنابراین داریم

$$\begin{aligned} A'(0) &= -2 \iint_{D'} < H, V > \sqrt{\det(g_{ij})}dx_1 dx_2 \\ &= -2 \iint_{D'} < H, V > dA. \end{aligned} \tag{2}$$

رابطهٔ بالا نشان می‌دهد که

$$A'(0) \geq -2 \iint_{D'} |\ H\ |\ dA \tag{3}$$

و تساوی تنها وقتی برقرار است که در تمام نقاطی که $H \neq 0$، $V = H/\mid H \mid$.

رابطهٔ (۳) منجر به بیان خاصیت مینیم‌سازی مساحت و اصولاً نامگذاری دسته‌ای از رویه‌ها به نام رویه‌های مینیمال شد.خاصیت مینیم‌سازی مساحت به این شرح است:اگر رویهٔ S دارای این ویژگی باشد که هر قسمت فشردهٔ آن دارای کمترین مساحت در بین همهٔ رویه‌ها با همان مرز قسمت فشرده باشد، آنگاه روی S، $H \equiv 0$.در واقع، معادلهٔ (۳) نشان می‌دهد که اگر در نقطهٔ p از رویه، $H \neq 0$، آنگاه با تغییر شکل رویه در یک همسایگی p در جهت H مساحت رویه‌های حاصل کم می‌شود.

خاصیت مینیم‌سازی مساحت به پایداری رویه هم تعبیر می‌شود.از بحث فوق معلوم می‌شود که مینیمال بودن یک رویه شرط لازم برای این است که رویه دارای خاصیت مینیم‌سازی مساحت باشد ولی شرط کافی نیست.چنانچه رویهٔ مینیمال دارای خاصیت مینیم‌سازی مساحت نباشد، رویه ناپایدار نامیده می‌شود.

خاصیت پایداری رویه‌ها مورد توجه و مطالعهٔ زیادی قرارگرفته و ما از بین نتایج به دست آمده به مطالب زیر اشاره می‌کنیم.

قضیه. فرض کنید S رویه‌ای در $\mathbf{R}^3$ باشد.چنانچه تصویر رویهٔ S تحت اثر تابع گاوس دارای مساحتی کمتر از 2π باشد، آنگاه S پایدار است[۱۰].

این قضیه بعداً به رویه‌های مینیمال در $\mathbf{R}^n$ تعمیم داده شده است.از طرف دیگر اگر رویه پایدار باشد، غالباً خواص مهمی دارد.به عنوان نمونه، می‌توان قضیهٔ زیر را ذکر کرد.

قضیه. عدد ثابت c وجود دارد چنانکه اگر S یک رویهٔ مینیمال پایدار در $\mathbf{R}^3$ باشد، آنگاه برای هر نقطهٔ p در S، خمیدگی گاوسی S در نقطهٔ p، $K(p)$، در شرط $|K(p)| \leq c/d^2$ صدق می‌کند که d فاصلهٔ نقطهٔ p تا مرز S است [۱۰].

نامساوی بالا نتایج زیادی دربارهٔ رویه‌های مینیمال به دست می‌دهد. و نه تنها در مورد رویه‌های مینیمال در $\mathbf{R}^3$ بلکه در مورد رویه‌های مینیمال واقع در یک خمینهٔ ریمانی سه بعدی قابل اعمال است.

پ) رابطه با نظریهٔ معادلات دیفرانسیل

رویهٔ S یک نمودار است اگر به شکل

$$y = F(x_1, x_2) = (x_1, x_2, f(x_1, x_2))$$

قابل بیان باشد که در آن، $f : D \to \mathbf{R}^{n-2}$ تابعی است که حداقل C^2 است. در این حالت، شرط $H \equiv 0$ به صورت یک دستگاه معادلات دیفرانسیل ظاهر می‌شود که به شکل زیر است

$$(1+|\frac{\partial f}{\partial x_2}|^2)\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} - 2 < \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2} > \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} + (1+|\frac{\partial f}{\partial x_1}|^2)\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = 0 \qquad (4)$$

در حالتی که $n = 3$، دستگاه فوق به یک معادله تقلیل می‌یابد. (به صفحات ۱۶ و ۱۷ مرجع [۱۰] نگاه کنید).

برای آگاهی از کاربردهای رویه‌های مینیمال در قسمتهای مختلف ریاضی و نیز در فیزیک، می‌توان به ضمیمهٔ ۳ از مرجع [۱۰] نگاه کرد.

در آنچه ذیلاً می‌آید، بعضی از ویژگیهای سراسری رویه‌های مینیمال به طور خیلی خلاصه مورد مطالعه قرار می‌گیرد.

رویه‌های مینیمال مرزدار

یک سؤال اساسی که از ابتدا در مورد رویه‌های مینیمال مطرح بوده است این است که آیا برای هر خم هموار داده شدهٔ γ در $\mathbf{R}^3$ که خود را قطع نمی‌کند، یک رویهٔ مینیمال وجود دارد که مرزش γ باشد؟ این سؤال قدمت زیادی دارد و در طول سالیان دراز تلاشهای فراوانی صورت گرفته تا جواب مثبتی برای آن پیدا شود و سرانجام به صورت زیر به آن پاسخ داده شده است.

قضیه. فرض کنید γ یک خم ژوردان دلخواه در $\mathbf{R}^3$ باشد. در این صورت، رویهٔ عادی، مینیمال و ساده همبندی وجود دارد که مرزش γ است [قضیه داگلاس و دیگران].

دو سؤال مهم که در مورد این قضیه قابل طرح است این است که آیا جواب به دست آمده در $\mathbf{R}^3$ نشانده (embedded) شده است و آیا جواب به دست آمده یکتاست یا نه. به سؤال اول با در نظر گرفتن شرایط اضافی جواب مثبت داده شده است. جواب سؤال دوم در حالت کلی منفی است.

چنانچه قضیهٔ فوق را در $\mathbf{R}^n$ مطرح کنیم، باز هم رویهٔ مینیمال وجود دارد ولی خاصیت عادی بودن خود را از دست می‌دهد.

رویه‌های مینیمال کامل در $\mathbf{R}^3$

مثالهای اولیهٔ رویه‌های مینیمال (صفحه، زنجیروار، پیچوار، رویهٔ شرک، ...) همگی با متریک القا شده از $\mathbf{R}^3$ فضاهای متریک کامل هستند. به عبارت دیگر، هر ژئودزیک ماکسیمال در این رویه‌ها دارای دامنهٔ $\mathbf{R}$ است. جستجو برای یافتن رویه‌های مینیمال کامل از نظر هندسی با مثالهای ساده شروع شده است. در سال ۱۹۱۵، برنشتاین قضیهٔ زیر را ثابت کرد.

قضیه. اگر $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ یک تابع C^2 باشد که نمودار آن یک رویهٔ مینیمال S است، آنگاه f تابعی خطی است.

اثبات اولیهٔ برنشتاین از این قضیه کامل نبود و این نقص تا سال ۱۹۵۰ برطرف نشد. در این مدت، اثباتهای متعددی از این قضیه ارائه شد که برعکس روش برنشتاین (که مبتنی بر نظریهٔ معادلات دیفرانسیل جزئی بود) بر نظریهٔ توابع مختلط اتکا داشتند. اکنون به اثبات قضیه که مبتنی بر نظریهٔ توابع مختلط است می‌پردازیم.

همان‌طور که قبلاً اشاره شد، می‌توان رویهٔ مینیمال S را به وسیلهٔ تابع همدیس $F : D \to \mathbf{R}^3$ بیان کرد که D را به موجب قضیهٔ تابع ریمان می‌توان تمام صفحه یا قرص واحد در نظر گرفت. حال تابع $g(z) = \sigma \circ N \circ F(z)$ را در نظر بگیرید. به موجب فرض، تابع F همدیس است. همچنین تابع گاوس (N) هر رویهٔ مینیمال، همدیس است و σ که تابع گنجنگاری (stereographic projection) است هم‌واره همدیس می‌باشد. بنابراین، g تابعی تمام‌ریخت (تحلیلی مختلط) است. حال اگر S یک نمودار باشد، جهت‌پذیر است و بردارهای قائم بر آن یا همگی به سوی بالا و یا همگی به سوی پایین هستند؛ بنابراین، $N(S)$ در یک نیمکره واقع می‌شود. با انتخاب σ به عنوان تابع گنجنگاری از قطب مخالف (مخالف نیمکره‌ای که $N(S)$ را در بر دارد) همهٔ نیمکره به داخل دایرهٔ واحد تصویر می‌شود، یعنی $|g(z)| < 1$. در اینجا دو حالت ممکن است اتفاق بیفتد.

حالت اول: D همهٔ صفحه است. در این صورت، $g(z)$ یک تابع تام و کراندار است؛ پس بنا به قضیهٔ لیوویل، تابعی ثابت است. بنابراین، $N(S)$ یک نقطه است. یعنی S دارای جهت قائم واحد N است که از آن نتیجه می‌شود S صفحه‌ای است عمود بر N و بنابراین، f تابعی خطی است.

حالت دوم: D قرص واحد است یعنی $|z| < 1$. در این مورد این سؤال مطرح می‌شود که آیا چنین حالتی می‌تواند اتفاق بیفتد؟ اگر جواب منفی باشد، قضیهٔ برنشتاین ثابت شده است. بنابراین لازم است نشان دهیم چنانچه S یک نمودار مینیمال روی همهٔ صفحهٔ xy باشد، آنگاه S نمی‌تواند تصویر همدیس یک قرص باشد. این امر سبب شد که لونر (Loewner) سؤال کلی زیر را مطرح کند. فرض کنید S رویه‌ای هموار و عادی و به صورت نموداری روی همهٔ صفحهٔ xy باشد. آیا S می‌تواند تصویر یک قرص واحد تحت اثر یک تابع همدیس باشد؟ اگر جواب این سؤال منفی باشد، مسلماً قضیهٔ برنشتاین ثابت شده است ولی در این حالت جواب مثبت است یعنی رویه‌ای با خصوصیات ذکر شده در سؤال وجود دارد. بنابراین، برای اثبات قضیهٔ برنشتاین بایستی شرط مینیمال بودن را به کار ببریم. اثباتهای متعددی از این مطلب ارائه شده است که هر نمودار مینیمال تام، باید تصویر همدیس یک صفحه باشد و نه قرص واحد. قبل از آنکه بحث را تمام کنیم به اثبات مطلبی کلیتر از قضیهٔ برنشتاین می‌پردازیم. نیرنبرگ (Nirenberg) با بررسی

روشی که در بالا برای اثبات قضیهٔ برنشتاین ارائه شد، حدس زیر را مطرح کرد.

حدس. یک رویهٔ مینیمال کامل سادهٔ همبند، یک صفحه است اگر $N(S)$ یکی از این دو وضعیت را داشته باشد: ۱) $N(S)$ برابر تمام کره‌منهای یک همسایگی یک نقطه باشد؛ ۲) $N(S)$ برابر تمام کره‌منهای سه نقطه باشد.

چنانچه بتوان ثابت کرد که در نمایش همدیس $F : D \to S$، D باید تمام صفحه باشد، حدس اثبات شده است زیرا با فرض اینکه حالت (۱) حدس اتفاق افتاده است یعنی $N(S)$ برابر تمام کره‌منهای یک همسایگی یک نقطه است، با به کاربردن تابع گنج‌نگاری به مرکز یک نقطهٔ درونی همسایگی سوده (با توجه به این فرض که D تمام صفحه است) نتیجه می‌شود که $g = \sigma \circ N \circ F$ یک تابع کراندار و تام است ؛ بنابراین ثابت است.لذا اثبات حالت اول مذکور در بالا نشان می‌دهد که S یک صفحه است.

چنانچه حالت (۲)ی حدس اتفاق بیفتد، با انتخاب تابع گنجنگاری به مرکز یکی از نقاط حذف شده (و با توجه به این فرض که D تمام صفحه است) نتیجه می‌شود g تابعی تام است که تنها دو نقطه را اختیار نمی‌کند.بنابراین، به موجب قضیهٔ پیکار (Picard)، g تابعی ثابت است و دوباره با استناد به اثبات حالت اول، S باید یک صفحه باشد.

حال به ادامهٔ بحث ناتمام خود می‌پردازیم.برای اینکه نشان دهیم حالت دوم اتفاق نمی‌افتد، نمایش وایرشتراس برای رویه‌های مینیمال را شرح می‌دهیم.

فرض کنید S یک رویهٔ مینیمال سادهٔ همبند باشد که توسط تابع همدیس $F : D \to \mathbf{R}^3$ مشخص شده است.نیز فرض کنید $N(S)$ حداقل یک نقطه را اختیار نکند.آنگاه S را می‌توان به صورت زیر نمایش داد

$$y = F(z) = \mathrm{Re}\{\int \tfrac{1}{2} f(-g^2), \int \tfrac{i}{2} f(1+g^2), \int fg\} \qquad (5)$$

که g تابعی است که در بالا معرفی شد یعنی $g = \sigma \circ N \circ F$ و σ تابع گنج‌نگاری به مرکز نقطهٔ حذف شده است و f تابعی تحلیلی است که هرگز صفر نمی‌شود.به عکس اگر f و g دو تابع تحلیلی در یک ناحیهٔ سادهٔ همبند باشند که $f(z) \neq 0$، آنگاه معادلهٔ (۵) یک رویهٔ مینیمال تعریف می‌کند که برای آن g برحسب تابع گاوس آن رویه، نمایش فوق را دارد.

برای رویه‌ای چون S که به صورت (۵) مشخص شود، معادلهٔ طول قوس ds روی رویه به صورت زیر است.

$$ds = \lambda(z) \mid dz \mid \quad , \lambda(z) = \frac{1}{2} \mid f(z) \mid (1+ \mid g(z) \mid^2)$$

با به کار بردن این رابطه‌ها در مورد قضیهٔ برنشتاین که در آن S یک نمودار است، داریم $\mid g(z) \mid < 1$.در حالت اول حدس نیرنبرگ که $G(S)$ یک همسایگی نقطه‌ای ازکره را اختیار نمی‌کند، $\mid g(z) \mid$ کراندار است، مثلاً $\mid g(z) \mid < M$. برای خم C در دامنهٔ F داریم

$$l(F(C)) = \int_C ds = \frac{1}{2} \int_C \mid f(z) \mid (1+ \mid g(z) \mid^2) \mid dz \mid < \frac{1+M^2}{2} \int_C \mid f(z) \mid . \mid dz \mid$$

در هر رویهٔ کامل S، هر خم واگرا دارای طول بی‌نهایت است (خم $\alpha(t)$ در S را که به ازای $t \geq 0$ تعریف شده واگرا گوییم اگر برای هر زیر مجموعهٔ فشردهٔ Q از S، عدد t_0 موجود باشد چنانکه به ازای $t > t_0$، $\alpha(t) \notin Q$).در این صورت ، حدس نیرنبرگ به صورت زیر ساده می‌شود.فرض کنید $f(z)$ روی $\mid z \mid < 1$ تحلیلی باشد، و $f(z) \neq 0$، آیا همواره خم واگرای C وجود دارد چنانکه $\int_C \mid f(z) \mid . \mid dz \mid < \infty$ ؟

جواب این سؤال مثبت است و این مطلب از اینجا نتیجه می‌شود که تابع $F(z) = \int f(z)dz$ در شرط $F'(z) = f(z) \neq 0$ صدق می‌کند و بنابراین یک تابع همدیس از قرص واحد به صفحهٔ w تعریف می‌کند.این تابع نمی‌تواند یک به یک و پوشا باشد زیرا در آن صورت، وارونش تابعی تام وکراندار، و بنابراین ثابت خواهد بود.پس خم واگرایی با طول متناهی وجود دارد زیرا

$$\int_C \mid f(z) \mid\mid dz \mid = \int_C \mid F'(z) \mid\mid dz \mid = \int_{F(C)} \mid dw \mid$$

با در نظر گرفتن همهٔ مطالب بالا، تحت شرایط اولین حدس نیرنبرگ، رویهٔ S نمی‌تواند تصویر همدیس یک قرص باشد، بنابراین باید تصویر تمام صفحه باشد؛ لذا g تابعی ثابت است و بنابراین، S یک صفحه است.اکنون این سؤال مطرح می‌شود که آیا می‌توان استدلالی مشابه را برای حدس دوم نیرنبرگ ارائه کرد؟جواب این سؤال منفی است و درحقیقت، حدس دوم صحیح نیست.با به کاربردن نمایش وایرشتراس و با انتخاب مناسب توابع f و g می‌توان مثالی صریح از رویه‌های مینیمال کامل ارائه کرد که تابعهای گاوس آنها نه سه مقدار، بلکه چهار مقدار را کنار می‌گذارند.

پس از طی مراحل میانی زیاد، سرانجام این مطلب در سال ۱۹۸۸ به وسیلهٔ فوجی‌موتو (Fujimoto) به صورت زیر بیان و اثبات شد:

«اگر رویهٔ مینیمال کامل S در $\mathbf{R}^3$ دارای تابع گاوسی باشد که بیش از چهار نقطه را کنار بگذارد، آنگاه S یک صفحه است.»

ایدهٔ فوجی‌موتو این است که گرچه تابع g کراندار نیست ولی می‌توان نوعی شرط رشد یافت که همگرایی $\int_C \mid f \mid (1+ \mid g \mid^2) \mid dz \mid$ را برای یک خم C تضمین کند.درحقیقت با به کار بردن متریکی روی صفحه منهای تعدادی متناهی نقطه، با شرط $K \equiv -1$ (خمیدگی مقطعی همواره برابر ۱- باشد) و با به کاربردن لم آلفورس (Ahlfors)، فوجی موتو یک کران بالا برای $\mid g'(z) \mid$ یافت که نتیجهٔ مطلوب را به دست می‌دهد (به تابلو مراجعه کنید).

بعداً صورت ظریفتری از قضیهٔ فوجی‌موتو به صورت زیر بیان و اثبات شد [۹].

قضیه.اگر S یک رویهٔ مینیمال کامل و غیر از صفحه باشد و اگر $N(S)$ چهار مقدار را اختیار نکند آنگاه $N(S)$ نه تنها سایر مقادیر را اتخاذ می‌کند بلکه هر یک از آن مقادیر را بینهایت بار اتخاذ می‌کند.

نتیجه:تحت شرایط قضیهٔ بالا، خمیدگی کل S بینهایت است، یعنی $\int_S \mid K \mid dA = +\infty$.

درحقیقت، به موجب تعریف خمیدگی K، $\int \mid K \mid dA$ دقیقاً برابر مساحت تصویر S تحت اثر تابع گاوس است؛ حال اگر تابع گاوس همهٔ کره (به استثنای چهار نقطه) را بینهایت بار بپوشاند، مساحت تصویر به وضوح بینهایت خواهد بود.برای اطلاع از مطالبی دیگر در مورد رویه‌های مینیمال کامل به ضمیمهٔ A از مرجع [۱۰] مراجعه کنید.

رویه‌های مینیمال کامل با خمیدگی کل متناهی

دربارهٔ این رویه‌ها اطلاعات زیادی در دست است.قبل از آنکه قضیه‌ای اساسی در مورد آنها بیان کنیم، لازم است ابتدا تعریف خمیدگی کل را یادآوری کرده و مفهوم پایانه (end) را برای یک رویهٔ مینیمال تعریف نماییم.

چنانچه K خمیدگی گاوسی رویهٔ S و dA جزء دیفرانسیل مساحت باشد، آنگاه، $\int_S KdA$ = خمیدگی کل S.

مقصود از یک «پایانه» از یک رویهٔ غوطه‌ور (immersed) در $\mathbf{R}^3$ عبارت است از بخشی از رویه که با یک قرص توپولوژیک منهای مرکزش، همسانریخت (homeomorphic) باشد چنانکه هر خم واقع بر قرص که از مرکزش دور می‌شود، دارای طول بینهایت باشد.

فرض کنید $\bar{M}$ یک رویهٔ فشرده باشد و $p_1,\dots,p_l$ تعدادی متناهی نقطه از $\bar{M}$ و $F:\bar{M}-\{p_1,\dots,p_l\}\to\mathbf{R}^3$ یک تابع غوطه‌ورسازی (immersion) باشد که تصویرش یک رویهٔ مینیمال کامل در $\mathbf{R}^3$ است.اگر $D\subset\bar{M}$ یک همسایگی p_j در $\bar{M}$ باشد، آنگاه $F(D-\{p_j\})$ یک پایانه برای $F(\bar{M}-\{p_1\dots p_l\})$ است.بنابراین، $F(\bar{M}-p_1,\dots p_l\})$ یک رویهٔ غوطه‌ور شده در $\mathbf{R}^3$ با l پایانه است.مثلاً، زنجیروار، یک رویهٔ مینیمال کامل با دو پایانه است.

اکنون به بیان قضیهٔ اساسی می‌پردازیم.

قضیه.فرض کنید S یک رویهٔ مینیمال کامل در $\mathbf{R}^3$ با خمیدگی کل متناهی و G تابع گاوس رویهٔ S باشد. در این صورت:

۱.$N(S)$ حداکثر می‌تواند سه مقدار را اتخاذ نکند مگر اینکه S یک صفحه باشد؛

۲.S به طور همدیس برابر است با یک رویهٔ فشردهٔ $\bar{M}$ که تعدادی متناهی از نقاطش، $p_1,\dots,p_l$، $l\neq 0$ حذف شده‌اند؛

۳.قائمهای رویه در هر پایانه (که وابسته به یک p_j است) به یک حد میل می‌کنند،درحقیقت، تابع g در نمایش وایرشتراس S قابل گسترش به یک تابع برخه‌ریخت ($meromorphic$) روی $\bar{M}$ است؛

۴. $\int_S |K|\,dA=4\pi m$، $m=0,1,2,\dots$؛

۵. $m=0 \iff S$ یک صفحه است؛

$m=1 \iff S$ یک زنجیروار یا یک رویهٔ انپر ($Enneper$) است (شکل ۴)؛

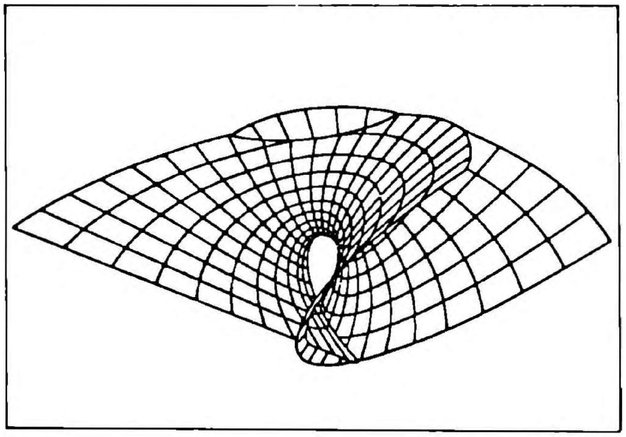
۶. اگر χ شاخص اویلر S باشد آنگاه

$$\int_S KdA \le 2\pi(\chi - l)$$

که l برابر است با تعداد نقاط حذف شده از $\bar{M}$ و برابر است با تعداد پایانه‌های S.

نامساوی آخر با توجه به قضیهٔ کوهن ـ واسن (Cohn - Vossen) که می‌گوید برای هر رویهٔ S، $\int_S KdA \le 2\pi\chi$، جالب است زیرا با توجه به نامساوی (۴)، برای رویهٔ S که در شرایط قضیهٔ اساسی صدق کند تساوی در رابطهٔ بالا اتفاق نمی‌افتد.برای آگاهی از اثبات این قضیهٔ اساسی به مرجع [۱۰]، قضایای ۱.۹، ۲.۹، ۳.۹، ۴.۹ و لم ۵.۹ رجوع کنید.

باز یک سؤال در مورد اولین حکم این قضیه این است که آیا می‌توان این حکم را قویتر کرد؟برای پاسخ دادن به این سؤال باید مثالی از یک رویهٔ



شکل ۴.رویهٔ انپر

مینیمال کامل با خمیدگی کل متناهی یافت که تابع گاوس آن دقیقاً سه نقطه را اختیار نکند، و یا حکم را بهتر کرد به طوری که $N(S)$ دقیقاً دو نقطه را اتخاذ نکند.

برای آشنایی با مثالهای رویه‌های مینیمال کامل با خمیدگی کل متناهی به [۱] مراجعه کنید.

قضیهٔ زیر نیز در مورد رویه‌های مینیمال کامل با خمیدگی کل متناهی جالب توجه است.

قضیهٔ هورگه ـ میکز (Jorge & Meeks).تنها رویه‌های مینیمال کامل با خمیدگی کل متناهی که تصویر $S^2-\{p_1,\dots,p_l\}$، $1\le l\le 5$، در $\mathbf{R}^3$ تحت اثر یک نشانده باشند عبارت‌اند از صفحه ($l=1$) و زنجیروار ($l=2$).حالتهای $l=3,4,5$ نمی‌تواند اتفاق بیفتد (برای ملاحظهٔ اثبات به [۱] مراجعه کنید.)

یک مسألهٔ جالب کلی دربارهٔ رویه‌های مینیمال کامل با خمیدگی کل متناهی، یافتن رویه‌های نشانده شده در $\mathbf{R}^3$ است یعنی رویه‌هایی که خودشان را قطع نکنند.در مقاله‌ای از هورگه و میکز [۶] نشان داده می‌شود که اگر چنین رویه (یا رویه‌هایی) موجود باشند باید در شرایط خاصی صدق کنند یعنی قائمهای رویه در تمام نقاط انتهایی $p_1,\dots,p_l$ باید محدود به دو نقطهٔ متقاطر روی کره باشند و نامساوی (۴) بایستی برای آن رویه به تساوی تبدیل شود.

کستا (Costa) مثالی از یک رویه با گونهٔ (genus) یک و سه پایانه یافت که در این شرایط صدق می‌کند[۴].سپس هافمن (Hoffman) و میکز نشان دادند که رویهٔ کستا در واقع یک رویهٔ مینیمال است[۵].آنها همچنین نشان دادند خانواده‌ای یک پارامتری از رویه‌های مینیمال که حاصل تغییر شکل رویهٔ کستا هستند وجود دارد که آنها نیز مینیمال می‌باشند.و نیز این دو نفر ثابت کردند رویه‌های مشابه با گونه‌های بالاتر با پایانه‌های بیشتر یا هر دو وجود دارند.

کستا نشان داد تنها رویه‌های نشانده شده در $\mathbf{R}^3$ با گونهٔ یک و سه پایانه عبارت‌اند از رویه‌ای که خودش کشف کرده بود و رویه‌هایی که از تغییر شکل رویهٔ او به وسیلهٔ هافمن و میکز به دست آمد.

لپی (Lopey) و راس (Ros) نشان دادند که صفحه و زنجیروار تنها

تابلو توضیحات

۱.**تعریف**.فرض کنید رویهٔ عادی S در $\mathbf{R}^3$ داده شده و $p \in S$ و $N : S \to S^2 = \{x \in \mathbf{R}^3 :< x, x >= 1\}$ تابع گاوس رویهٔ S باشد.در هر نقطهٔ $p \in S$، $N(p)$ عبارت است از بردار واحدی در $\mathbf{R}^3$ و به پایهٔ $0 \in \mathbf{R}^3$ چنانکه بر T_pS (فضای مماس بر رویه در نقطهٔ p) عمود باشد.N به صورت موضعی موجود و هموار است.آنگاه پایه‌ای واحد و متعامد چون $\{e_1, e_2\}$ برای T_pS وجود دارد چنانکه $d_pN(e_1) = -K_1e_1$ و $d_pN(e_2) = -K_2e_2$ (d_pN عبارت است از مشتق تابع N در نقطهٔ p. همچنین K_1 و K_2، $(K_1 \geq K_2)$ عبارت‌اند از ماکسیمم و مینیمم دومین فرم اصلی رویه در نقطهٔ p هنگامی که به دایرهٔ واحد در T_pS تحدید شود).مقدار دومین فرم اصلی رویهٔ S در نقطهٔ p به ازای بردار مماس X برابر است با $\Pi_p(X, X)$ که این هم برابر است با $- < d_pN(X), X >$ که $| \Pi_p(X, X) |$ مستقل از انتخاب N است ولی علامت $\Pi_p(X, X)$ به انتخاب N بستگی دارد.با این شرایط، K_1, K_2 را خمیدگیهای اصلی رویه در نقطهٔ p، $(K_1 + K_2)/2$ را خمیدگی متوسط رویه در p و $K = K_1K_2$ را خمیدگی گاوسی S در نقطهٔ p می‌نامند.بردار $(K_1 + K_2)N(p)/2$ بردار خمیدگی متوسط رویه در نقطهٔ p نام دارد.خمیدگی کل رویه عبارت است از $\int_S KdA$ که dA عبارت است از جزء دیفرانسیل مساحت روی S.

****

۲.**قضیهٔ نگاشت ریمان**:فرض کنید D ناحیه‌ای ساده همبند در صفحه است که تمام صفحه نیست و $a \in D$، در این صورت، تابع تحلیلی یکتای $f : D \to \mathbf{C}$ وجود دارد چنانکه $f(a) = 0$ و $f'(a) > 0$. f یک‌به‌یک است و $f(D) = \{z :| z |< 1\}$.

****

۳.**لم آلفورس**:فرض کنید متریک استاندارد هذلولوی روی $D = \{z \in \mathbf{C} :| z |< 1\}$ به وسیلهٔ تابع $\lambda(z) = 2/(1- | z |^2)$ داده شده است یعنی $g(v_z, w_z) = \lambda^2 < v_z, w_z >$ که $<.,.>$ حاصلضرب داخلی اقلیدسی روی $\mathbf{R}^2$ است و v_z، w_z بردارهایی از $\mathbf{R}^2$ به پایهٔ $z \in D$ هستند.فرض کنید $\hat{\lambda}(z)$ تابعی همدیس روی D باشد که مطابق روش بالا متریک همدیس دیگری روی D تعریف می‌کند.اگر خمیدگی D با متریک حاصل از $\hat{\lambda}$، $\hat{K}$، در شرط $-1 \leq \hat{K}$ صدق کند، آنگاه روی D، $\lambda(z) \leq \hat{\lambda}(z)$.

****

۴.**تعریف**.مقصود از یک عمل هموار گروه‌ای G بر خمینهٔ هموار M عبارت است از تابع هموار $F : G \times M \to M$ چنانکه تابع $g \to F(g, \circ)$ یک همریختی از G به گروه دیفئومرفیسمهای M باشد.چنانچه $N \subset M$ یک زیر خمینه باشد و به ازای یک $g \in G$ و به ازای هر $x \in N$ داشته باشیم $F(g, x) \in N$، گوییم N تحت اثر g ناورداست.عمل G را روی M آزاد گوییم اگر برای هر $x \in M$، زیرگروه H، $H = \{g \in G : F(g, x) = x\} \subset H$ بدیهی یعنی برابر $\{e\}$ باشد.

رویه‌های نشانده شده با گونهٔ صفر هستند.برای کسب اطلاعات بیشتر در این زمینه به ضمیمهٔ A از مرجع [۱۰] مراجعه کنید

رویه‌های مینیمال تناوبی در $\mathbf{R}^3$

در سالهای اخیر پیشرفت زیادی در نظریهٔ رویه‌های مینیمال تناوبی که به طور سره (properly) در $\mathbf{R}^3$ نشانده شده‌اند، حاصل شده است.این پیشرفتها شامل نتایج نظری سراسری و تعداد زیادی مثال است که در شرایط قضایای جدید صدق می‌کنند.عده‌ای از این رویه‌ها نیز به وسیلهٔ فیزیکدانها کشف شده‌اند.

بنا به تعریف، یک رویهٔ مینیمال تناوبی خوانده می‌شود اگر همبند بوده و تحت اثر یک گروه گسستهٔ G از ایزومتریهای $\mathbf{R}^3$ که آزادانه عمل می‌کنند، ناوردا باشد.مطالعهٔ این رویه‌ها از طریق مطالعهٔ رویه‌های خارج قسمت حاصل از آنها در $\mathbf{R}^3/G$ انجام می‌گیرد (تابلو را ببینید).غیر از صفحه، یک مثال غیر بدیهی از این رویه‌ها، پیچوار است.گروههای تقارن این دو رویه نامتناهی‌اند و این دو، تنها رویه‌های مینیمال نشانده شده در $\mathbf{R}^3$ با چنین خاصیتی هستند.

مطالعهٔ این رویه‌ها نشان می‌دهد که توپولوژی و هندسهٔ سراسری آنها شدیداً به هم مرتبط است.در اینجا تنها به بیان چند حدس و سؤال پاسخ داده نشده اکتفا می‌کنیم.خوانندهٔ علاقه‌مند می‌تواند به مقالات روزنبرگ (H.Rosenberg) و همکارانش در این زمینه مراجعه کند.قبل از بیان سؤالها به یادآوری یک تعریف می‌پردازیم.[۱۵]

تعریف.یک رویه را دارای توپولوژی متناهی گوییم اگر با یک رویهٔ بسته که تعدادی متناهی از نقاطش حذف شده است، همسانریخت باشد.

سؤال ۱.آیا پیچوار تنها رویهٔ مینیمالی است که به طور سره در $\mathbf{R}^3$

نشانده شده و دارای توپولوژی متناهی ولی خمیدگی کل نامتناهی است؟

سؤال ۲.انواع توپولوژیهای ممکن برای رویه‌های مینیمالی که به طور سره در $\mathbf{R}^۳$ نشانده شده‌اند، چیستند؟

خانوادهٔ رویه‌های مینیمالی که به طور سره در $\mathbf{R}^۳$ نشانده شده‌اند، خیلی غنی است ولی چنانکه از سؤال اول برمی‌آید، همهٔ مثالهای جدید دارای خمیدگی کل متناهی هستند.برای درک سؤال اول لازم است هندسهٔ «پایانه‌های حلقوی» (annular ends) یک رویهٔ مینیمال که به طور سره در $\mathbf{R}^۳$ نشانده شده درک شود (یک پایانهٔ حلقوی از رویهٔ S عبارت است از یک نشاندهٔ هموار سره از $\{z \in \mathbf{C} : ۰ < z \leq ۱\}$ به S) زیرا هنگامی که M دارای توپولوژی متناهی است، همهٔ پایانه‌های آن از نوع حلقوی هستند.

حدس زیر توسط هافمن و میکز ارائه شده است.

حدس ۱.فرض کنید $S \subset \mathbf{R}^۳$ یک رویهٔ مینیمال باشد که به طور سره نشانده شده و حداقل دو پایانه دارد.دراین صورت، هر پایانهٔ حلقوی S دارای خمیدگی کل متناهی است.

از حدس ۱ نتیجه می‌شود رویهٔ مینیمالی که به طور سره در $\mathbf{R}^۳$ نشانده شده و حداقل دو پایانه و توپولوژی متناهی داشته باشد، دارای خمیدگی کل متناهی است.

اخیراً هافمن و میکز ثابت کردند هر رویهٔ مینیمالی که به طور سره در $\mathbf{R}^۳$ نشانده شده می‌تواند حداکثر دو پایانه با خمیدگی کل متناهی داشته باشد.بنابراین، برای اثبات حدس باید ثابت کرد که دو پایانهٔ باقیمانده نیز دارای خمیدگی کل متناهی هستند.

سؤال مشخص‌تری که در ارتباط با سؤال ۱ و حدس ۱ مطرح می‌شود، چنین است.

سؤال ۳.فرض کنید S یک رویهٔ مینیمال است که به طور سره نشانده شده و دارای گونهٔ صفر است.آیا S یک صفحه یا یک زنجیروار یا یک پیچوار یا یکی از مثالهای تناوبی ریمان است؟

حدس زیر در ارتباط با سؤال ۳ عرضه شده است.

حدس ۲.هنگامی که رویهٔ مینیمال دارای گروه تقارن (گروه ایزومتریهای) نامتناهی باشد، جواب سؤال ۳ مثبت است.

زیرخمینه‌های مینیمال در یک خمینهٔ ریمانی

در سالهای اخیر در این زمینه مطالعات زیادی انجام شده است.یکی از نکات اساسی در اینجا این است که زیرخمینه‌های مینیمال می‌توانند فشرده باشند.از بین کارهای فراوانی که در این زمینه صورت گرفته، به ذکر چند قضیه اکتفا می‌کنیم.خواننده برای کسب اطلاعات بیشتر می‌تواند به ضمیمهٔ A از مرجع [۱۰] نگاه کند.

قضیه.فرض کنید M یک خمینهٔ ریمانی فشرده nبعدی از ردهٔ C^k باشد که $۳ \leq n \leq ۶$ و $۵ \leq k \leq \infty$.در این صورت، یک ابر رویهٔ فشردهٔ مینیمال از ردهٔ $C^{k-۱}$ وجود دارد که در M نشانده شده است.

این قضیه بعداً به $n = ۷$ نیز تعمیم یافته است.قضایای وجودی خاصتری نیز وجود دارند که به نوبهٔ خود مهم‌اند.به عنوان نمونه دو قضیهٔ زیر را می‌توان ذکر کرد.

قضیه.در کرهٔ سه‌بعدی رویه‌های مینیمال فشرده از هر گونه وجود دارند.

قضیه.هیچ زیرخمینهٔ مینیمال فشردهٔ پایداری در یک کرهٔ n بعدی وجود ندارد.

مراجع

1.J.Barbosa, *Minimal Surfaces in* $\mathbf{R}^n$, notes distributed at ICTP, Italy (1989).

2.M.do Carmo, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice - Hall, Inc.New Jersey, (1976).

3.J.B.Conway, *Functions of One Complex Variable*, Springer- Verlag, NewYork (1975).

4.C.Costa, "Examples of a complete minimal immersion in $\mathbf{R}^n$ of genus one and three embedded ends," *Bull.Soc.Bras.Math.*, **15** (1984)47-54.

5.D.A.Hoffman & W.H.Meeks , "A complete embedded minimal surface in $\mathbf{R}^۳$ with genus one and three ends", *J.Diff. Geom.*, **21** (1985) 109-127.

6.L.P.M.Jorge & W.H.Meeks, "The topolgy of complete minimal surfaces of finite total curvature", *Topology*, **22** (1983) 203 -221.

7.W.Meeks & H.Rosenberg: "The global theory of doubly periodic minimal surfaces", *Invent.Math.*,**97** (1989) 351-379.

8.________ ,"The geometry of periodic minimal surfaces", Preprint.

9.X.Mo & R.Osserman,"On the Gaus map and total curvature of complete minimal surfaces and an extension of Fujimoto's theorem", *J.Diff. Geom.*(2) **31** (1990).

10.R.Osserman, *A Survey of Minimal Surfaces*, Dover , New_York (1989).

11.________ , *Conformal Maps*, notes distributed at ICTP, Italy (1989).

12.________ , *Minimal Surfaces*, notes distributed at ICTP, Italy (1989).

13.________ , *Complete Minimal Surfaces*, notes distributed at ICTP, Italy (1989).

14.________ ,*The Hyperbolic Plane and the Shwarz- Pick - Ahlfors Lemma*, notes distributed at ICTP, Italy (1989).

15.H.Rosenberg, *The Geometry, Topology and Existance of Periodic Minimal Surfaces*, notes distributed at ICTP, Italy (1989).

16.J.Wolf, *Spaces of Constant Curvature*, Publish or Perish, Inc., U.S.A.(1984).

****

★ محمدباقر کاشانی، دانشگاه تربیت مدرس