خمینه‌های چهاربعدی

سید محمد باقر کاشانی*

هندسه و توپولوژی خمینه‌ها وابستگی کنجکاوی برانگیزی به بُعد آنها دارد. مبحث خمینه‌های دوبعدی، موضوعی کلاسیک است که به‌مدت بیش از یک قرن مورد مطالعهٔ گسترده و همه‌جانبه قرار گرفته است. از نظر تاریخی، پیشرفت مهم بعدی در مبحث خمینه‌های سه‌بعدی به‌دست آمده است. در سال ۱۹۵۲، موئیز[1] نظریهٔ خمینه‌های توپولوژیک سه‌بعدی را به‌نظریهٔ خمینه‌های قطعه‌قطعه خطی (۱) تبدیل کرد که در حالت سه‌بعدی همان نظریهٔ خمینه‌های هموار سه‌بعدی است. رده‌بندی و شناسایی خمینه‌های سه‌بعدی، مبحثی است که هنوز مسائل حل‌نشدهٔ مهمی دارد و پژوهشهای زیادی در آن انجام می‌شود (رک. «خمینه‌های سه‌بعدی»، *نشر ریاضی*، سال ۳، شمارهٔ ۳). پیشرفت عمده‌ای که پس از کار موئیز به‌دست آمد، در مطالعهٔ خمینه‌های بابُعد بزرگتر یا مساوی پنج بود. دو رویداد اساسی در این زمینه عبارت‌اند از توسعهٔ روشهای قطعه‌قطعه خطی و هموار نظریهٔ دستواره‌ها [تابلوی ۱] به‌وسیلهٔ اسمیل در اواخر دههٔ ۱۹۵۰ و تعمیم آن به‌خمینه‌های توپولوژیک به‌وسیلهٔ کربی[2] و سیبنمن[3] در سال ۱۹۶۹. آخرین گام، مطالعهٔ حالت چهاربعدی بود و در دههٔ ۱۹۸۰، افرادی چون فریدمن، کوبین، و دانلدسن نتایج شگفت‌انگیزی در این زمینه به‌دست آوردند. این موضوع اکنون یکی از پرجنب‌وجوش‌ترین بخشهای تحقیقات ریاضی است. فریدمن به‌خاطر کارهای ارزشمندش در زمینهٔ خمینه‌های ۴بعدی توپولوژیک و دانلدسن به‌خاطر تحقیقاتش در خمینه‌های ۴بعدی هموار، در سال ۱۹۸۶ مدال فیلدز گرفتند.

از نظر تکنیکی، چیزی که باعث می‌شود خمینه‌ها برحسب بعدشان در دسته‌های جداگانه بررسی شوند، رفتار قرصهای دوبعدی است. تصویر هر *تابع نوعی* از یک قرص دوبعدی در یک خمینهٔ سه‌بعدی دارای تقاطع یک‌بعدی با خود قرص است، در مورد خمینهٔ چهاربعدی، مقطعها نقاطی مجزا هستند، و در بعدهای پنج و بالاتر، قرصهای دوبعدی عموماً به‌صورت نشانده شده[4] ظاهر می‌شوند. پیشرفت در زمینهٔ هر دسته (بعد) مبتنی بر فهم و کاربرد این قرصها بوده است. در مورد بعد سه، پاپاکیریاکوپولس[5] لم دن[6] را برای نشاندن قرصهای دوبعدی در خمینه‌های سه‌بعدی به‌اثبات رساند. این لم را دن در سال ۱۹۱۰ مطرح کرد و به نام وی معروف شد.

لم دن. *فرض کنید M یک خمینهٔ سه‌بعدی است و $f : D^2 \to M$ یک تابع است (D^2 قرص دوبعدی است) به‌طوری که برای یک همسایگی A از ∂D^2 (مرز D^2) در D^2، $f|A$ یک نشانده[7] است و $A = f^{-1}(f(A))$. دراین صورت $f|\partial D^2$ را می‌توان به‌یک نشاندهٔ $g : D^2 \to M$ توسعه داد.*

اثبات دن از قضیهٔ بالا یک نقص جدی داشت و این مسأله تا اواسط دههٔ ۱۹۵۰ حل نشده بود تا اینکه پاپاکیریاکوپولس اثبات درستی برای آن عرضه کرد. وی همچنین دو قضیهٔ دیگر هم، که آنها را قضیهٔ حلقه و قضیهٔ کره نامید (۲)، در مورد خمینه‌های سه‌بعدی بیان و اثبات کرد. جالب اینجاست که در میان این سه قضیه، لم‌دن از بقیه آسانتر و کم استعمال‌تر است. قضایای حلقه و کره در حقیقت رابط بین جبر (نظریهٔ هوموتوپی) و هندسه (نظریهٔ خمینه‌های سه‌بعدی) هستند. تقریباً همهٔ نتایج به‌دست آمده در نظریهٔ خمینه‌های سه‌بعدی، مبتنی بر این دو قضیه است.

در بعدهای پنج به‌بالا، قرصهای دوبعدی در «شگرد ویتنی» که یک ابزار مهم توپولوژی هندسی است به‌کار می‌روند [تابلوی ۲] و نیز، مسألهٔ قابلیت نشاندن این قرصها کلید مشخص کردن این دسته از خمینه‌هاست. همین‌طور در بعد چهار، نتایج تکنیکی مهم عبارت است از قضایای نشاندن قرصهای دوبعدی در خمینه‌های چهاربعدی (۳).

در بعد چهار، پدیده‌های جدیدی ظاهر می‌شود و این خود یکی از دلایلی است که باعث شده بررسی این دسته از خمینه‌ها و روشن شدن جوانب مختلف آنها یک دهه بیشتر به‌طور بینجامد. در بعدهای دیگر، روشهای اصلی نظریهٔ دستواره‌ها یا نظریهٔ رویهٔ نشانده‌شده، در رستهٔ خمینه‌های توپولوژیک یا رستهٔ قطعه قطعه خطی یا رستهٔ هموار کاملاً مشابه هستند ولی در بعد چهار، چنانکه کارهای دانلدسن نشان داد، در رستهٔ هموار پدیده‌های کیفیتاً متفاوت و ظریفتری روی می‌دهد. همچنین، ویژگیهای توپولوژیک خمینه‌های چهار بعدی که مشابه بعدهای بالاترند، اثباتهای پیچیده‌تری دارند.

یک روش کلی در بررسی خمینه‌ها عبارت است از کشف ناورداهایی جبری که‌به‌وسیلهٔ آنها بتوان خمینه‌های n بعدی را رده‌بندی کرد. در اینجا دو مسأله مطرح است: الف) مسألهٔ وجود: فرض کنید ناوردایی داده شده است. یک خمینهٔ n بعدی بسازید (پیدا کنید) که دارای آن ناوردا باشد. ب) مسألهٔ یکتایی: فرض کنید یک ناوردا داده شده است. چند خمینهٔ n بعدی می‌توانند آن ناوردا را داشته باشند؟

برای به‌دست آوردن نتایج جالب توجه در نظریهٔ خمینه‌ها و کاربرد آنها اغلب لازم است ساختارهای دیگری نظیر ساختار قطعه‌قطعه خطی یا ساختار مشتق‌پذیر (C^r)، $r \in \{1, 2, 3, \ldots \infty\}$، بر خمینه‌های توپولوژیک افزود. دراین صورت، مسألهٔ اصلی این است که یک خمینهٔ توپولوژیک تحت چه شرایطی یک ساختار قطعه‌قطعه خطی می‌پذیرد، و درصورتی که بپذیرد، یک ساختار مشتق‌پذیر سازگار هم برای آن خمینه وجود دارد یا نه.

برای $n \leq 3$، رستهٔ خمینه‌های توپولوژیک، هموار و قطعه‌قطعه خطی، یکی است (این موضوع در اوایل دههٔ ۱۹۵۰ معلوم شده بود). اما برای بعدهای بالا، مسأله کاملاً فرق می‌کند. در فاصلهٔ زمانی ۱۹۵۶-۱۹۷۰، بعدهای $n \geq 5$ مورد مطالعهٔ گسترده قرار گرفت. نتیجهٔ حاصل این بود که در حالت کلی نمی‌توان روی خمینه‌های توپولوژیک با بعد $n \geq 5$، ساختار هموار یا قطعه‌قطعه خطی وضع کرد. مانع اصلی در برابر وجود چنین ساختاری، وجود عنصری به‌صورت $k(M) \in H^4(M, \mathbb{Z}_2)$ است (M خمینهٔ مورد نظر است). اگر $k(M) = 0$، درحقیقت مانعی درکار نیست و روی خمینه، ساختارهای قطعه‌قطعه خطی مختلف وجود دارد و تعداد این ساختارها برابر $|H^3(M, \mathbb{Z}_2)|$ است. اگر $k(M) = 1$، روی خمینه هیچ ساختار قطعه‌قطعه خطی وجود ندارد.

در مورد ساختار هموار، جواب بدین گونه است: برای بعدهای کوچکتر یا مساوی هفت، هر خمینهٔ دارای ساختار قطعه‌قطعه خطی، یک ساختار هموار سازگار می‌پذیرد و در حالت $n \geq 6$، این ساختار (به‌ازای یک ساختار قطعه‌قطعه خطی مشخص روی خمینه)، با تقریب دیفئومورفیسم، یکتاست.

1. Moise 2. Kirby 3. Siebenmann 4. embedded 5. Papakyriakopoulos 6. Dehn 7. embedding

به‌منظور تأکید باید گفت که این موضوع حتی در بعد چهار نیز صحیح است. مطلب جالب توجه دیگر در این زمینه، بررسی ساختار(های) هموار (مختلف) روی یک خمینهٔ توپولوژیک است (درصورتی که چنین ساختاری اصلاً وجود داشته باشد). ساده‌ترین مثال، شاید $\mathbf{R}$ باشد که می‌دانیم یک ساختار هموار (استاندارد) می‌پذیرد. درواقع می‌توان نشان داد که این تنها ساختار هموار روی $\mathbf{R}$ است. به‌این منظور، فرض کنید X عبارت است از $\mathbf{R}$ با یک ساختار هموار مفروض. دراین صورت به‌وسیلهٔ افراز واحد می‌توان یک متریک کامل ریمانی روی X قرار داد. حال به‌آسانی می‌توان دید که تابع $\exp : T_{\circ} X \to X$ یک دیفئومورفیسم است ولی $T_{\circ} X$ (فضای مماس بر X در مبدأ) همان $\mathbf{R}$ با ساختمان هموار (استاندارد) است. پس X با $\mathbf{R}$ دیفئومورفیک است. بنابراین، روی $\mathbf{R}$ هیچ ساختار هموار (غیراستاندارد)ی وجود ندارد. این مسأله در مورد فضاهای پیچیده‌تر به‌گونهٔ دیگری است. در سال ۱۹۵۶، میلنر وجود ۲۸ ساختار هموار مختلف روی S^7 را به‌اثبات رساند[۹]. از آن زمان به‌بعد، ساختارهای هموار (غیراستاندارد)ی روی کره‌های با بعد بیشتر از ۷ نیز کشف شده است و رده‌بندی این ساختارها به یک مسألهٔ نظریهٔ هموتوپی تبدیل گشته است. همچنانکه انتظار می‌رود، فضای $\mathbf{R}^n$ فضای خوشرفتاری است. در حقیقت می‌توان نشان داد که به‌ازای $n \neq 4$، $\mathbf{R}^n$ دارای ساختار هموار و قطعه‌قطعه خطی یکتاست در حالی که $\mathbf{R}^4$ دارای تعدادی ناشمارا ساختار هموار مختلف (در حقیقت، خانواده‌ای از ساختارها که به‌وسیلهٔ $\mathbf{R}^4$ پارامتری می‌شود) است. وجود چنین ساختارهایی با به‌کار بردن ترکیبی از مطالب پیشرفتهٔ توپولوژی، آنالیز و هندسه به‌اثبات می‌رسد.

یک مسألهٔ جالب توجه در نظریهٔ خمینه‌ها حدس پوانکاره است. این حدس چنین است: فرض کنید M^n یک خمینهٔ n بعدی بسته (فشرده و بی‌لبه) و ساده‌همبند است که با S^n هم‌ارزِ هموتوپی است. آیا M^n با S^n همسانریخت است؟ حالت $n = 2$ نسبتاً به‌آسانی ثابت می‌شود و جواب مثبت به‌دست می‌آید. حالت $n \geq 5$ مسأله‌ای مشکل است. اسمیل در خلال دههٔ ۱۹۶۰ آن را بررسی کرد وبرایش جواب مثبت یافت ([۱۰] و [۱۴]). حالت $n = 4$ را فریدمن در سال ۱۹۸۲ اثبات کرد ([۳] و [۴]). حالت $n = 3$ هنوز مسأله‌ای حل نشده به‌شمار می‌رود.

خمینه‌های چهاربعدی

اکنون بحث خود را به‌خمینه‌های چهاربعدی فشرده، بی‌لبه، ساده‌همبند، و جهت‌پذیر محدود می‌کنیم. ناورداهای (جبری) استاندارد برای این خمینه‌ها عبارت‌اند از گروههای هومولوژی H و گروههای کوهومولوژی H^*. به‌موجب قضیهٔ دوگانی پوانکاره داریم $H_i(M) \cong H^{4-i}(M)$. چون خمینه‌های مورد مطالعه، ساده‌همبند هستند یعنی $\pi_1(M) = 0$، به‌موجب قضیهٔ هورویچ، $H_1(M) = 0$. بنابراین، براساس قضیهٔ پوانکاره، $H^3(M)$ و در نتیجه، $H_3(M)$ نیز برابر صفرند. پس همهٔ اطلاعات هومولوژیک در گروه $H_2(M)$ نهفته است. همچنین به‌موجب توپولوژی جبری داریم $H^2(M, \mathbb{Z}) \cong \mathrm{Hom}(H_2(M, \mathbb{Z}))$. چون طرف راست گروه آزاد تعویض‌پذیر است، طرف چپ نیز چنین است.

یک ناوردای بسیار مهم خمینه‌های چهاربعدی *فرم تقاطع* ω است که به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

الف) خمینه‌های هموار: فرض کنید $a, b \in H_2(M, \mathbb{Z})$ به‌وسیلهٔ دو رویهٔ دو بعدی جهتدار A و B در M که در تعدادی متناهی نقطه، اشتراک

تابلوی ۱

نظریهٔ دستواره‌ها (فصل ۹ از [۴]): فرض کنید W یک خمینه است و $N \subset \partial W$ زیرخمینه‌ای (با نقص بعد[1] صفر) از لبهٔ W است. یک ساختار دستواره‌ای نسبی روی (W, N) عبارت است از دنباله‌ای چون $W_0 \subset W_1 \subset \cdots \subset W$ به‌طوری که

الف) W_0 به‌صورت $N \times I$ (یقه[2]) است.

ب) W_{i+1} از W_i به‌وسیلهٔ چسباندن یک دسته به $\partial W_i - N$ به‌دست می‌آید.

پ) دسته‌ها موضعاً متناهی هستند یعنی هر $x \in W$ دارای یک همسایگی است که تنها تعدادی متناهی از مجموعه‌های $W_i - W_{i-1}$ را قطع می‌کند.

اگر بعد W، n باشد و $k \leq n$، آنگاه W' از W با چسباندن یک دستهٔ kبعدی به آن به‌دست می‌آید اگر $W' = (W \cup D^k \times D^{n-k})/\sim$ که رابطهٔ هم‌ارزی $\sim$ به این صورت تعریف می‌شود که نقاط $S^{k-1} \times D^{n-k}$ با تصویرشان در ∂W تحت اثر یک نشاننده یکی گرفته می‌شوند. یک قضیهٔ اساسی در این مورد، قضیهٔ زیر است:

قضیه. *هر جفت (W, N) دارای یک ساختار توپولوژیک دستواره‌ای نسبی است که در اینجا W یک خمینهٔ ۵بعدی و $N \subset \partial W$ دارای نقص بعد صفر است.*

همهٔ خمینه‌های هموار دارای ساختاری دستواره‌ای هستند که از شار میدان برداری گرادیان یک تابع مُرس روی خمینه حاصل می‌شود. خمینه‌های دارای ساختار قطعه‌قطعه خطی نیز ساختاری دستواره‌ای دارند که با در نظرگرفتن همسایگیهای عادی[3] سادکها در یک مثلث‌بندی به‌دست می‌آید. برعکس، همهٔ خمینه‌های توپولوژیک، دارای ساختار دستواره‌ای نیستند و هنگامی هم که چنین ساختاری وجود دارد ساختن آن مشکل است.

چون خمینه‌های با بعد کمتر از چهار دارای ساختار هموار هستند، ساختار دستواره‌ای نیز دارند. هر خمینهٔ چهاربعدی که ساختار دستواره‌ای داشته باشد، ساختار هموار نیز دارد. ثابت می‌شود که خمینه‌های چهاربعدیِ بدون ساختار دستواره‌ای، دقیقاً آنهایی هستند که ساختار هموار نمی‌پذیرند، و به‌موجب قضیهٔ دانلدسن می‌دانیم خمینه‌های چهاربعدی زیادی وجود دارند که ساختار هموار نمی‌پذیرند.

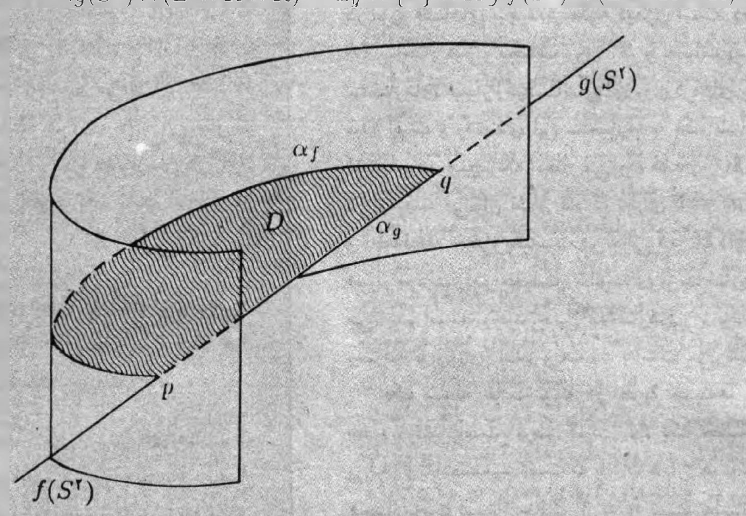
نشان داده می‌شود که خمینه‌های با بعد شش به بالا، ساختار دستواره‌ای دارند. بنابراین، قضیهٔ زیر را داریم:

قضیه. *جفتی از خمینه‌ها چون (W, N) که $N \subset \partial W$ و N دارای نقص بعد صفر است، نمی‌تواند یک ساختار توپولوژیک دستواره‌ای نسبی بپذیرد اگر و تنها اگر W یک خمینهٔ چهاربعدی باشد که ساختار هموار نپذیرد.*

1. codimension 2. collar 3. regular neighbourhoods

تابلوی ۲

شگرد ویتنی. شگرد ویتنی، (فصل XII از مرجع [۷])، عبارت است از روشی برای حذف یک جفت نقطهٔ تقاطع با علامتهای مخالف. این روش در بعدهای بالاتر از ۵ به‌کار می‌آید. برای فهم شگرد ویتنی مدل زیر را در بعد چهار در نظر بگیرید: p و q نقاط تقاطع (با علامتهای مختلف) رویه‌های $f(S^2)$ و $g(S^2)$ در M^4 هستند، α_f و α_g خمهایی، به‌ترتیب، در $f(S^2)$ و $g(S^2)$ هستند که p و q را به‌هم وصل می‌کنند. فرض می‌کنیم یک همسایگی α_f در $f(S^2)$، مطابق شکل، در $\mathbb{R}^3$ واقع می‌شود ($\mathbb{R}^3 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : t = 0\}$) و یک همسایگی α_g در $g(S^2)$ به‌صورت (α_g, t)، $t \in (-1, 1)$ است. بنابراین، تنها قسمتی از این همسایگی که ما در زمان $t = 0$ **می‌بینیم** عبارت است از α_g. همچنین فرض کنید (همان‌طور که در شکل دیده می‌شود)، یک قرص دوبعدی D^2 (قرص ویتنی) با شرایط زیر موجود است: $\partial D = \alpha_f \cup \alpha_g$، و D به‌طور هموار داخل M نشانده شده است، $D \cap f(S^2) = \alpha_f$ و $D \cap g(S^2) = \alpha_g$، و کلاف قائم D (در M) عبارت است از $D \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ چنانکه $f(S^2) \cap (D \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}) = \alpha_f \times \mathbb{R} \times \{0\}$ و $g(S^2) \cap (D \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}) = \alpha_g \times \{0\} \times \mathbb{R}$.



در این مدل، توصیف اینکه چگونه جفت نقاط مضاعف p و q حذف شوند آسان است به این منظور، کافی است $f(S^2)$ را در امتداد D به‌وسیلهٔ یک ایزوتوپی (که تکیه‌گاهش در کلاف برداری قرصی که کمی بزرگتر از D' است قرار دارد) تغییر دهید. مدل در بعدهای بالاتر اساساً با مدل توصیف‌شده در بالا یکی است. بعدهای $f(S^2)$ و $g(S^2)$ ممکن است بیشتر باشد ولی p، q، α_f، α_g، و D مانند فوق هستند و کلاف قائم (بدیهی) D به دو قسمت تجزیه می‌شود، یکی برای α_f و دیگری برای α_g، درست مانند حالتی که در بالا توصیف کردیم. آنگاه ایزوتوپی در بعدهای بالا با حالت توصیف‌شده یکی است با این تفاوت که در امتداد مکمل فضای چهاربعدی، ایزوتوپی را تابع همانی می‌گیریم. برای به‌کاربردن شگرد ویتنی لازم است بتوان مدل مذکور را ساخت. α_f و α_g همیشه موجودند (همبندی را فرض می‌کنیم) و معمولاً $\alpha_f \cup \alpha_g$ با صفر هوموتوپیک است. بنابراین D را می‌توان به‌صورت غوطه‌ورشده[1] در نظر گرفت. در همهٔ بعدهای بالاتر از ۴ به‌کمک نظریهٔ اشتراکهای تقاطعی، این غوطه‌ورسازی را می‌توان یک نشانندهٔ هموار فرض کرد.

اما در بعد چهار، نشاندن D آسانتر از نشاندن کره‌های دوبعدی در مکان اولیه نیست! و همین مشکل است که بررسی بعد چهار را بسیار دشوارتر از بعدهای بالاتر می‌کند. در حقیقت، فریدمن ثابت می‌کند که D می‌تواند به‌صورت توپولوژیک نشانده شود و به‌کمک این موضوع است که مسائل دیگر در بعد چهار نسبتاً به‌آسانی قابل‌بررسی است.

1. immersed

تقاطعی[1] دارند، نمایش داده شده است (برای خمینه‌های هموار چهاربعدی این نمایش همیشه ممکن است). تعریف می‌کنیم $\omega(a,b) = A.B$ که $A.B$ عبارت است از جمع جبری اعداد تقاطعی A و B. یعنی فرض می‌کنیم $A \cap B = \{t_1, \cdots, t_m\}$ و $T_{t_i}M \cong T_{t_i}A \oplus T_{t_i}B$. حال عدد تقاطعی برابر با $\epsilon(t_i) = +1$ است اگر جهت فضاهای برداری دو طرف تساوی یکی باشد و برابر با $\epsilon(t_i) = -1$ است اگر جهتها متفاوت باشد. بنابراین، $\omega(a,b) = \sum_{i=1}^{m} \epsilon(t_i) \in \mathbb{Z}$. پس در این تعریف، $\omega : H_2(M, \mathbb{Z}) \otimes H_2(M, \mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}$. روش دیگر برای تعریف فرم تقاطع (در حالتی که M هموار است) به‌کاربردن کوهومولوژی $H^*(M)$ به‌شرح زیر است. فرض می‌کنیم $\alpha, \beta \in H^2_{\mathrm{DR}}(M)$، و تعریف می‌کنیم $\omega(\alpha, \beta) = \int_M \alpha \wedge \beta$.

ب) خمینه‌های توپولوژیک: به‌موجب قضیهٔ پوانکاره،

1. transversal intersection

$H_۲(M, \mathbb{Z}) \cong H^۲(M, \mathbb{Z})$. پس ω را به‌جای اینکه روی $H_۲(M, \mathbb{Z}) \otimes H_۲(M, \mathbb{Z})$ تعریف کنیم به‌شرح زیر روی $H^۲(M, \mathbb{Z}) \otimes H^۲(M, \mathbb{Z})$ تعریف می‌کنیم. فرض می‌کنیم $\alpha, \beta \in H^۲(M, \mathbb{Z})$ و نیز فرض می‌کنیم $[M] \in H_۴(M, \mathbb{Z})$ ردهٔ بنیادی M باشد [۸] که به وسیلهٔ جهت M مشخص می‌شود. تعریف می‌کنیم $\omega : H^۲(M, \mathbb{Z}) \otimes H^۲(M, \mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}$ ، $\omega(\alpha, \beta) = (\alpha \cup \beta)[M]$ (که در آن $\alpha \cup \beta \in H^۴(M, \mathbb{Z})$ عبارت است از حاصلضرب ناوی α و β [۸]).

ω را به هر صورت که تعریف کنیم، فرم [یا صورت] تقاطع M نامیده می‌شود و ناوردای اصلی یک خمینهٔ چهاربعدی فشرده است. ω یک فرم [صورت] دوخطی متقارن و دارای دترمینان ± ۱ است یعنی اگر فرم را به‌صورت یک ماتریس (با ضرایب اعداد صحیح) نسبت به یک پایهٔ $H^۲(M, \mathbb{Z})$ بنویسیم، آنگاه دترمینان این ماتریس ± ۱ است. در حالتی‌که $H^۲(M, \mathbb{Z}) = \{۰\}$، قرارداد $\det = +۱$ همچنان اعمال می‌شود.

گزاره. (وایتهد، ۱۹۴۹): *دو خمینهٔ فشردهٔ ساده‌ـهمبند چهاربعدی، هم‌ارز هوموتوپیک، هستند اگر و تنها اگر فرمهای تقاطعشان یکریخت باشند*[۱۳].

حال به معرفی چند اصطلاح جبری در مورد فرم تقاطع می‌پردازیم. فرض کنید m یک مدول آزاد روی $\mathbb{Z}$ با رتبهٔ متناهی و $\omega : \mathrm{m} \times \mathrm{m} \to \mathbb{Z}$ یک فرم دوخطی متقارن با دترمینان ± ۱ باشد. قرار می‌دهیم $q(x) = \omega(x, x)$. در این‌صورت، q را فرم [صورت] دوجمله‌ای می‌گویند و رتبهٔ q عبارت است از رتبهٔ m. اگر q را یک فرم دوجمله‌ای روی $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{m}$ محسوب کنیم، آنگاه می‌توان آن را به‌صورت مجموع مجذورات $q(x) = x_۱^۲ + \cdots + x_p^۲ - x_{p+۱}^۲ - \cdots - x_N^۲$ نوشت. در این‌صورت، علامت q عبارت است از تعداد جمله‌های مثبت در بسط بالا منهای تعداد جمله‌های منفی یعنی برابر است با $۲p - N$ (علامت را در فرمولها با signature نشان می‌دهیم). q را *زوج* می‌نامیم اگر $q(x)$ به‌ازای هر x زوج باشد. اگر q زوج نباشد آن را *فرد* می‌نامیم. q را *معیّن* گوییم اگر به‌ازای هر $x \neq ۰$، $q(x)$ ناصفر باشد. در غیر این‌صورت، q را *نامعیّن* گوییم. از این به‌بعد، ω را با q یکی می‌گیریم.

گزاره. *دو فرم (صحیح) نامعین با دترمینان ± ۱ روی $\mathbb{Z}$ هم‌ارز هستند اگر و تنها اگر دارای یک رتبه، یک علامت، و از یک نوع (زوج یا فرد) باشند.*

رده‌بندی فرمهای معین مشکل است. در هر بعد اگرچه (با تقریب هم‌ارزی) تعدادی متناهی از این فرمها وجود دارد ولی این تعداد می‌تواند خیلی زیاد باشد.

گزاره. *اگر q فرمی زوج باشد، علامت آن بر ۸ قابل تقسیم است*[۶].

اکنون چند مثال از فرم تقاطع خمینه‌های چهاربعدی عرضه می‌کنیم.

۱. $S^۴$؛ چون $H^۲(S^۴) = H_۲(S^۴) = ۰$، بنابراین $\omega_{S^۴} = \varnothing$.

۲. $\mathbb{CP}^۲$؛ چون $H_۲(\mathbb{CP}^۲, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ (و مولد استاندارد $H_۲(\mathbb{CP}^۲, \mathbb{Z})$ به‌وسیلهٔ $\mathbb{CP}^۱ = S^۲ \subset \mathbb{CP}^۲$ نمایش داده می‌شود) داریم $\omega_{\mathbb{CP}^۲} = (۱)$

۳. $\overline{\mathbb{CP}^۲}$ عبارت است از $\mathbb{CP}^۲$ با جهت مخالف جهت معمولی و بنابراین $\omega_{\overline{\mathbb{CP}^۲}} = (-۱)$ (توجه کنید که هیچ دیفئومورفیسم جهت‌برگردان از $\mathbb{CP}^۲$ وجود ندارد).

۴. $S^۲ \times S^۲$؛ $H_۲(S^۲ \times S^۲, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. می‌توان مولدهای $H_۲(S^۲ \times S^۲, \mathbb{Z})$ را با رویه‌های نشانده‌شدهٔ $A = S^۲ \times \{\text{نقطه}\}$ و $B = \{\text{نقطه}\} \times S^۲$ نمایش داد چنانکه $A \cap B = \{\text{نقطه}\}$ و بنابراین، نسبت به پایهٔ $\{A, B\}$، $\omega_{S^۲ \times S^۲} = \begin{pmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{pmatrix}$.

۵. $M^۴ \# N^۴$ (جمع همبند M و N)؛ داریم

$$H_۲(M \# N, \mathbb{Z}) \cong H_۲(M, \mathbb{Z}) \oplus H_۲(N, \mathbb{Z})$$

بنابراین

$$\omega_{M\#N} = \omega_M \oplus \omega_N = \left(\begin{array}{c|c} \omega_M & ۰ \\ \hline ۰ & \omega_N \end{array}\right)$$

۶. رویهٔ کومر

$$K = \{[z_۰, \cdots, z_۳] \in \mathbb{CP}^۳ : Z_۰^۴ + \cdots + Z_۳^۴ = ۰\}$$

در اینجا داریم $\mathrm{rank} H_۲(K, \mathbb{Z}) = ۲۲$ و $\omega_K = E_۸' \oplus E_۸ \oplus ۳ \begin{pmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{pmatrix}$ که $E_۸$ عبارت‌است از ماتریس زیر

$$E_۸ = \begin{bmatrix} ۲ & -۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ -۱ & ۲ & -۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۲ & -۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۱ & ۲ & -۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & -۱ & ۲ & -۱ & ۰ & -۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & -۱ & ۲ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & -۱ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۲ \end{bmatrix}$$

رده‌بندی خمینه‌های توپولوژیک چهاربعدی بسته و ساده‌ـهمبند

در سال ۱۹۸۲، بالاخره فریدمن مسألهٔ رده‌بندی خمینه‌های توپولوژیک چهاربعدی را پس از کوششهای فراوان به‌شرح زیر حل و فصل کرد. خمینه‌های توپولوژیک چهاربعدی بسته (فشرده و بی‌لبه) و ساده‌ـهمبند، به‌وسیلهٔ دو ناوردا کاملاً رده‌بندی می‌شوند. این دو ناوردا عبارت‌اند از فرم تقاطع ω و مانع کربی‌ـسیبنمن $\alpha(M) \in H^۴(M, \mathbb{Z}_۲) \cong \mathbb{Z}_۲$ ($\alpha = ۰ \Leftrightarrow M \times S^۱$ یک ساختار هموار می‌پذیرد، و در غیر این‌صورت، $\alpha = ۱$). به‌عبارت دیگر، خمینه‌های توپولوژیک چهاربعدی بسته و ساده‌ـهمبند در تناظر یک‌به‌یک با جفتهای (ω, α) هستند که ω می‌تواند هر فرم دوخطی (صحیح)، متقارن، و دارای دترمینان ± ۱ باشد و $\alpha \in \mathbb{Z}_۲$ با این شرط که اگر ω زوج باشد، $\alpha = \frac{\mathrm{signature}\,\omega}{۸} \pmod{۲}$. بنابراین، در مورد خمینه‌های چهاربعدی جوابهایی برای مسألهٔ وجود و یکتایی به‌شرح زیر خواهیم داشت.

قضیهٔ فریدمن. *بهازای هر فرم دوخطی ω روی یک $\mathbb{Z}$ ـمدول آزاد که متقارن، صحیح، و دارای دترمینان ±۱ باشد، یک خمینهٔ چهاربعدی M وجود دارد که فرم تقاطعش ω است. اگر ω زوج باشد، آنگاه M با تقریب همسانریختی بهطور یکتا بوسیلهٔ ω مشخص میشود. اگر ω فرد باشد، آنگاه دقیقاً دو خمینهٔ چهاربعدی وجود دارد که فرم تقاطعشان ω است (هر خمینهٔ چهاربعدی دیگر با فرم تقاطع ω، با یکی از این دو خمینه همسانریخت است). یکی از این دو خمینه در شرط $\alpha = 0$ صدق میکند و دیگری، αی ناصفر دارد.*

نتیجهٔ ۱. *(حدس پوانکاره برای حالت $n = 4$). هرگاه خمینهٔ چهاربعدی توپولوژیکِ سادهـهمبند M با S^4 از یک ردهٔ هوموتوپی باشد، آنگاه M با S^4 همسانریخت است.*

اثبات. باتوجه به گزارهٔ وایتهد، قسمت یکتایی قضیه را در مورد زوج $(\varnothing, 0)$ اعمال کنید.

نتیجهٔ ۲. *(یکی از مسائل کلاسیک). یک خمینهٔ توپولوژیک چهاربعدی یکتا وجود دارد که فرم تقاطعش E_8 است.*

خمینههای چهاربعدی هموار

حال این سؤال را مطرح میکنیم که آیا هر فرم صحیح متقارن با دترمینان ±۱ میتواند بهصورت فرم تقاطع یک خمینهٔ چهاربعدی فشرده، هموار، و سادهـهمبند ظاهر شود؟ ابتدا یک شرط لازم برای این امر بهوسیلهٔ روخلین به اثبات رسید که به شرح زیر است.

قضیهٔ روخلین. *اگر یک خمینهٔ هموار چهاربعدی دارای فرم تقاطع زوج باشد، علامت آن فرم باید بر ۱۶ قابلتقسیم باشد.*

برای ملاحظهٔ اثبات قضیهٔ روخلین به فصل XIمرجع [۷] رجوع کنید. بهموجب این قضیه، E_8 نمیتواند فرم تقاطع یک خمینهٔ هموار چهاربعدی باشد. ولی آیا $E_8 \oplus E_8$ میتواند؟ جواب منفی این سؤال، نتیجهای است از قضیهٔ شگفتآوری که دانلدسن به اثبات رسانده است.

قضیهٔ دانلدسن. *فرض کنید M یک خمینهٔ چهاربعدی فشرده، هموار، و سادهـهمبند باشد؛ اگر q، فرم تقاطع M، مثبت و معین باشد، آنگاه نسبت به یک $\mathbb{Z}$ − پایهٔ $\{e_i\}$ برای $H^2(M, \mathbb{Z})$ باید داشته باشیم* $q(x) = x_1^2 + \cdots + x_N^2$ ، $x = \sum x_i e_i$.

در اینجا بعضی از نتایج مهم قضیهٔ دانلدسن را میآوریم.

۱. از ترکیب قضیهٔ دانلدسن با کارهای ذکرشدهٔ فریدمن میتوان نتیجه گرفت که هیچ فرم مثبت و معین و زوج نمیتواند بهصورت فرم تقاطع یک خمینهٔ چهاربعدی فشرده، هموار، و سادهـهمبند ظاهر شود مگر اینکه $N = 0$. بهویژه، $E_8 \oplus E_8$ نمیتواند بهصورت فرم تقاطع یک خمینهٔ چهاربعدی هموار و سادهـهمبند ظاهر شود.

۲. روی $\mathbf{R}^4$ یک ساختار هموار غیراستاندارد وجود دارد [۷].

۳. روی $\mathbf{R}^4$ تعدادی ناشمارا ساختار هموار مختلف وجود دارد (تاوبز[1] و گومپف[2]، ۱۹۸۸) [۷].

1. Taubes 2. Gompf

مسألههای حلنشده

حال به ذکر چند مسألهٔ حلنشده دربارهٔ خمینههای چهاربعدی میپردازیم.

۱. ردهبندی خمینههای توپولوژیکِ چهاربعدیِ غیرسادهـهمبند.

۲. بررسی خمینههای چهاربعدی لبهدار.

۳. آیا S^4 ساختار هموار غیراستاندارد میپذیرد؟

یادداشتها

۱. **خمینهٔ قطعهقطعه خطی.** فرض کنید $U, V \subset \mathbb{R}^n$، و هر دو قابلمثلثبندی باشند. تابع $f : U \to V$ را یک تابع قطعهقطعه خطی گویند اگر تحدید f به هر سادکِ مثلثبندی U، تابعی خطی (بهسادکی از مثلثبندی V) باشد. خمینهٔ توپولوژیک M^n را یک خمینهٔ قطعهقطعه خطی گویند اگر دارای اطلسی باشد که توابع تغییر مختصات آن اطلس همگی توابعی قطعهقطعه خطی باشند.

۲. برای اطلاع از قضیههای حلقه و کره به فصل ۴ از مرجع [۵] رجوع کنید.

۳. برای اطلاع از قضیههای نشاندن قرصهای ۲بعدی در بعد ۴، به فصل ۵ از مرجع [۴] رجوع کنید.

۴. برای اطلاع از نظریهٔ کوبوردیسم به مرجع [۹] مراجعه کنید.

مراجع *

1. S. K. Donaldson & P. B. Kronheimer, *The Geometry of 4-Manifolds*, Oxford University Press (1990).
2. D. Freed & K. Uhlenbeck, *Instantons and 4-Manifolds*, Springer-Verlag (1991).
3. M. H. Freedman, "The topology of 4-dimensional manifolds," *J. Differential Geom.* **17** (1982) 357-453.
4. M. H. Freedman & F. Quinn, *The Topology of 4-Manifolds*, Princeton University Press (1990).
5. J. Hemple, *3-Manifolds*, Princeton University Press (1976).
6. D. Husemoller & J. Milnor, *Symmetric Bilinear Forms*, Springer-Verlag (1973).
7. R. Kirby, *The Topology of 4-Manifolds*, lect. notes in math. 1374, Springer-Verlag (1989).
8. C. R. F. Maunder, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press (1980).
9. J. W. Milnor, "On manifolds homeomorphic to the 7-sphere, *Ann. Math.* (2) **64** (1956) 399-405.
10. J. W. Milnor, *Lectures on h-Cobordism Theorem*, Princeton University Press (1965).
11. J. W. Milnor, *Topology from the Differentiable Viewpoint*, University Press Virginia (1976).
12. M. S. Narasimhan, *Topology of Compact Simply Connected Smooth 4-Manifolds*, lecture notes, ICTP (1991).
13. D. Repoves, *An Introduction to Topology of 4-Manifolds*, lecture notes, ICTP (1991).
14. S. Smale, "Generalized Poincaré conjecture in dimensions greater than 4", *Ann. Math.* **64** (1956) 339-405.
15. J. H. C. Whitehead, "On simply connected 4-dimensional polyhedra", *Comment Math. Helv.* **22** (1949) 48-92.

******

* سید محمدباقر کاشانی، دانشگاه تربیت مدرس