نشر ریاضی، سال ۱۰، شمارهٔ ۱، صص ۱۲ـ۲۰

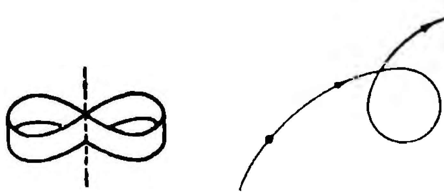
ابررویه‌های فضای هذلولوی

سید محمدباقر کاشانی*

مقدمه

از بدو ابداع هندسهٔ تحلیلی و به‌خصوص پس از به‌کار گرفته شدن حساب دیفرانسیل و انتگرال، خمها و رویه‌ها در فضای اقلیدسی (به‌ویژه در $\mathbb{R}^3$) همواره مورد توجه و مطالعهٔ ریاضیدانان بوده‌اند. ولی کشفهای گاوس در سال ۱۸۲۷ مسیر هندسه دیفرانسیل را از اساس تغییر داد و آن را به‌سوی مطالعهٔ مفهوم مجرد خمینهٔ هموار ــ فضای زمینهٔ هر هندسه ــ و همچنین نظریه‌های ریاضی مهم دیگر رهنمون شد. گاوس در قضیهٔ مشهورش نشان داد که مفهومی از خمیدگی رویه (که امروزه به‌نام او خمیدگی گاوسی نامیده می‌شود) وجود دارد که فقط به چگونگی اندازه‌گیری طول خمهای روی رویه بستگی دارد. این کشف مهم باعث ارائهٔ تعریف رویهٔ مجرد که روی آن اندازه‌گیری طول کمان به‌صورتی میسر است، گردید. پس از آن ریمان در سال ۱۸۵۴ مفهوم خمینه‌های مجرد با بعد دلخواه (خارج از فضای اقلیدسی) را که روی آنها طول کمان تعریف‌شدنی است عرضه کرد.

از این زمان به بعد مطالعهٔ «زیرخمینه‌ها»ی خمینه‌های مجرد (همراه با مفهوم اندازه‌گیری طول کمان) نیز به‌تدریج بر اثر نیاز و علاقه آغاز شد و به‌عنوان یکی از شاخه‌های پرجنب‌وجوش هندسهٔ دیفرانسیل ظاهر گشت. نظر به اینکه در این مطالعه، مفهوم اندازه‌گیری طول کمان نقش اساسی را ایفا می‌کند همواره فرض می‌شود مفهوم اندازه‌گیری طول کمان روی زیرخمینه از مفهوم اندازه‌گیری طول کمان در خمینهٔ زمینه‌ای که آن را دربردارد به ارث رسیده است. در این صورت می‌گوییم زیرخمینه به‌وسیلهٔ غوطه‌ورسازی حافظ متریک در خمینهٔ زمینه نشانده شده است. توپولوژی این زیرخمینه‌ها لزوماً از توپولوژی خمینهٔ زمینه آنها القا نشده است. به‌همین دلیل شکلهایی نظیر شکل (۱) به‌عنوان «زیرخمینه‌هایی» که با حفظ متریک غوطه‌ور شده‌اند،



شکل۱

در $\mathbb{R}^3$ قابل مطالعه‌اند. در مطالعاتی که خواص موضعی زیرخمینه مدنظر است همسایگیهای به‌اندازهٔ کافی کوچک زیرخمینه دارای توپولوژی القایی و البته مفهوم طول کمان القایی از خمینهٔ زمینه می‌باشند.

مطالعهٔ غوطه‌ورسازیهای حافظ متریک از یک خمینهٔ ریمانی M^n با خمیدگی مقطعی ثابت c به یک خمینهٔ ریمانی دیگر $\tilde{M}^{n+p}$ با خمیدگی مقطعی $\tilde{c}$ با کارهای الی کارتان آغاز شده است. ازجمله، او نشان داد اگر $c < \tilde{c}$، وجود چنین غوطه‌ورسازیی ایجاب می‌کند که $p \geq n - 1$. بررسی او محدود به خواص موضعی غوطه‌ورسازیها بود که به‌طور کلی خواصی پیچیده هستند. با فرض شرایط سراسری نظیر تمام‌بودن یا فشرده‌بودن، گاه نتایج مشخصی به‌دست می‌آید. برای حالت $c = \tilde{c}$ و $p = 1$ (ابررویه)، نتایج سراسری زیر به‌دست آمده است.

الف) *حالت اقلیدسی* ($c = \tilde{c} = 0$). اگر خمینهٔ ریمانی تخت[1] و تمام

1. flat

تابلو توضیحات

۱. فرض کنید $f:(M^n,g)\to(\tilde M^{n+p},\tilde g)$ یک نگاشت هموار بین خمینه‌های ریمانی باشد. f را **غوطه‌ورسازی حافظ متریک** نامند هرگاه

$$\tilde g(TfX,TfY)=g(X,Y)\quad \forall X,Y\in\mathcal X(M)$$

۲. فرض کنید ∇ و $\tilde\nabla$ به‌ترتیب التصاق‌های لوی چیویتا برای M و $\tilde M$ باشند. در این صورت داریم

$$\tilde\nabla_X TfY = Tf(\nabla_X Y)+II(X,Y)\quad\forall X,Y\in\mathcal X(M)$$

$II(X,Y)\in(Tf(TM))^\perp$ یک میدان تانسوری است که دومین فرم اساسی f (یا M در $\tilde M$) نامیده می‌شود. این میدان تانسوری درواقع میزان تغییرشکل M در $\tilde M$ را نشان می‌دهد. چنانچه میدان برداری $Z\in(Tf(TM))^\perp$ یافت شود به‌طوری که $g(X,Y)Z=II(X,Y)$، f را تماماً نافی[1] نامند؛ اگر این وضعیت در یک نقطهٔ $p\in M$ رخ دهد، نقطهٔ p را نافی گویند. در صورتی‌که $II(X,Y)\equiv 0$، f (یا M در $\tilde M$) را تماماً ژئودزیک[2] نامند. واضح است که اگر M (در $\tilde M$) تماماً ژئودزیک باشد تماماً نافی است ولی عکس آن در حالت کلی درست نیست.

به‌طور شهودی و ساده می‌توان گفت در حالتی که M (در $\tilde M$) تماماً ژئودزیک است تغییرشکل آن در $\tilde M$ (خمیدگی نسبی آن در $\tilde M$) صفر است و به تعبیر فیزیکی میزان خمیدگی M از دید ناظران M و $\tilde M$ یکی است. در حالتی که M تماماً نافی است میزان خمیدگی نسبی آن در $\tilde M$ در همهٔ جهات مماس بر M یکی است و این خمیدگی نسبی فقط در جهت میدان برداری Z است.

ساده‌ترین مثال برای حالت تماماً ژئودزیک عبارت است از $\mathbb R^n$ نشانده‌شده در $\mathbb R^m$، $n\le m$، که

$$\mathbb R^n=\{x=(x_1,\dots,x_m)\in\mathbb R^m: x_{n+1}=\dots=x_m=0\}$$

ساده‌ترین مثال برای حالت تماماً نافی عبارت است از کرهٔ S^n نشانده‌شده در $\mathbb R^{n+1}$

$$S^n=\{x=(x_1,\dots,x_{n+1})\in\mathbb R^{n+1}:\sum x_i^2=1\}$$

۳. **خمیدگی ریمانی** خمینهٔ ریمانی (M,g) با التصاق لوی چیویتا ∇، عبارت است از میدان تانسوری زیر

$$R(X,Y)Z=\nabla_X\nabla_Y Z-\nabla_Y\nabla_X Z-\nabla_{[X,Y]}Z\quad\forall X,Y,Z\in\mathcal X(M)$$

خمیدگی ریچی M، عبارت است از میدان تانسوری

$$\mathrm{Ric}(X,Y)=\mathrm{tr}\{V\mapsto R(X,V)Y\}\ \forall X,Y,V\in\mathcal X(M)$$

خمیدگی مقطعی M، به‌ازای بردارهای مستقل خطی $u,v\in T_pM$ خمیدگی مقطعی M نسبت به صفحهٔ تولیدشده توسط u، v عبارت است از

$$K(u,v)=\frac{g(R(v,w)v,w)}{g(v,v)g(w,w)-(g(v,w))^2}$$

خمیدگی میانگین M در نقطهٔ $p\in M$ عبارت است از: $H_p=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n II(e_i,e_i)$ که $\{e_1,\dots,e_n\}$ یک پایهٔ یکهٔ متعامد T_pM است.

خمیدگی اصلی: فرض کنید $\xi\in(Tf(TM))^\perp$، قرار می‌دهیم

$$A_\xi X=(-\tilde\nabla_X\xi)\ \text{مؤلفهٔ مماسی}\quad\forall X\in\mathcal X(M)$$

در این صورت در هر نقطهٔ $p\in M$، $A_\xi:T_pM\to T_pM$ یک نگاشت خطی خودالحاق است که عملگر شکل M در $\tilde M$ نامیده می‌شود. هر مقدار ویژهٔ A را یک خمیدگی اصلی M در امتداد ξ می‌نامند. رابطهٔ بین A_ξ و دومین فرم اساسی M به‌صورت زیر است

$$\tilde g(II(X,Y),\xi)=g(A_\xi X,Y)\ \forall X,Y\in\mathcal X(M)$$

۴. **همنهشتی**[3]: فرض کنید $M\subset\overline M$ زیرخمینهٔ ریمانی $\overline M$ و $N\subset\overline N$ زیرخمینهٔ ریمانی $\overline N$ باشد. یک زوج ایزومتری از $M\subset\overline M$ به $N\subset\overline N$ عبارت است از ایزومتری $\Phi:\overline M\to\overline N$، چنانکه $\Phi|_M$ یک ایزومتری از M به N باشد. چنانچه $\overline M=\overline N$، Φ یک همنهشتی از M به N نامیده می‌شود.

۵. **معادلهٔ گاوس و کوداتسی**: برای زیرخمینهٔ ریمانی $M\subset\overline M$ که M و $\overline M$ هر دو دارای خمیدگی مقطعی ثابت c می‌باشند معادلهٔ گاوس به‌صورت

$$\tilde g(II(X,X),II(Y,Y))-\tilde g(II(X,Y),II(X,Y))=0\quad \forall X,Y\in\mathcal X(M)$$

می‌باشد. در حالت خاصی که M ابررویه است، معادلهٔ بالا به‌صورت ساده‌تر زیر درمی‌آید (A عملگر شکل M در $\overline M$ است)

$$g(AX,X)g(AY,Y)-(g(AX,Y))^2=0\quad\forall X,Y\in\mathcal X(M)$$

معادله کوداتسی برای زیرخمینهٔ ریمانی $M\subset\overline M$ به‌صورت

$$(\tilde\nabla_Z II)(Y,X)=(\tilde\nabla_Y II)(Z,X)\quad\forall X,Y,Z\in\mathcal X(M)$$

می‌باشد و در حالتی که M ابررویه است به‌شکل ساده‌تر

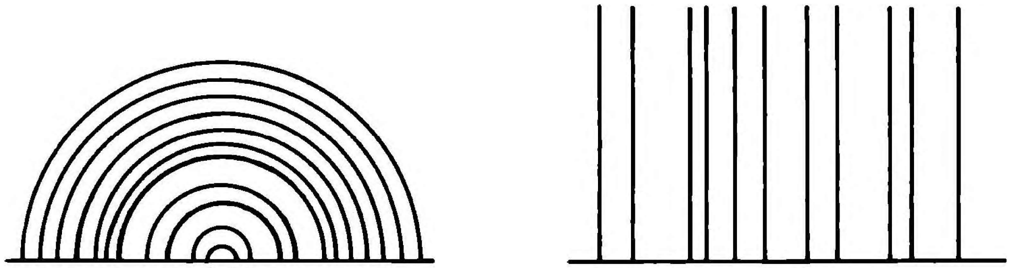
$$(\nabla_X A)(Y)=(\nabla_Y A)(X)\quad\forall X,Y\in\mathcal X(M)$$

درمی‌آید

۶. **صلبیت**[4]: زیرخمینهٔ ریمانی $M\subset\overline M$ در $\overline M$ صلب است اگر برای هر غوطه‌ورسازی حافظ متریک $f:M\to\overline M$، ایزومتری $\phi\in\mathrm{Iso}(\overline M)$ موجود باشد چنانکه $\phi\circ f=i_M$ که $i_M:M\to\overline M$ نگاشت شمول است.

---

1. totally umbilic 2. totally geodesic 3. congruence
4. rigidity



(الف) (ب)

شکل۲

M^n با حفظ متریک در $\mathbb{R}^{n+1}$ غوطه‌ور شده باشد، آنگاه M^n عبارت است از یک *استوانهٔ nبعدی که روی خمی مسطح بنا شده است*، یعنی $M=\mathbb{R}^{n-1}\times\gamma$ که $\mathbb{R}^{n-1}$ یک زیرفضای اقلیدسی $(n-1)$بعدی از $\mathbb{R}^{n+1}$ و γ خمی است که در صفحهٔ عمود بر $\mathbb{R}^{n-1}$ واقع است. این مطالب را هارتمن و نیرنبرگ ثابت کرده‌اند [۷].

ب) *حالت کروی* ($c=\tilde{c}=1$). اگر کرهٔ nبعدی S^n به‌وسیلهٔ f به‌عنوان زیرخمینهٔ ریمانی در S^{n+1} با حفظ متریک غوطه‌ور شده باشد، آنگاه S^n به‌عنوان یک کرهٔ nبعدی (بزرگ) در S^{n+1} نشانده شده است. یعنی برای یک ایزومتری $\phi\in \mathrm{Iso}(S^{n+1})$،

$$\phi(f(S^n))=\{x=(x_1,\dots,x_{n+2})\in S^{n+1}: x_{n+2}=0\}$$

این مطالب حالت خاصی از قضیهٔ اُنیل و استیل است [۱۶].

ج) *حالت هذلولوی* ($c=\tilde{c}=-1$). در این حالت وضعیت بسیار پیچیده است. در سال ۱۹۷۳، نومیزو در [۱۳] سؤال زیر را مطرح کرد. مطلوب است یافتن کلیهٔ غوطه‌ورسازیهای حافظ متریک از $H^n(-1)$ به $H^{n+1}(-1)$، حتی به‌ازای $n=2$. او خود در آن مقاله سه نوع متمایز از غوطه‌ورسازیهای حافظ متریک غیرتماماً ژئودزیک[1] از H^2 به H^3 ارائه داد.

در این مقاله ضمن ارائهٔ دو مثال از مقالهٔ [۱۳] و مرور کارهای تحقیقاتی نومیزو، فروس، آبه، هاس، هو، ژائو، مُری، و تاکاهاشی در این زمینه، طبق روند تاریخی، به معرفی ابررویه‌های با خمیدگی ثابت -1 در $H^{n+1}(-1)$ می‌پردازیم و به پاسخ کامل سؤال نومیزو دست می‌یابیم. همچنین، همراه با توصیف کار تحقیقاتی دُرون و کیانگ، ابررویه‌هایِ با خمیدگی ریچیِ ثابت و خمیدگی میانگین ثابت در H^{n+1} را معرفی می‌کنیم.

مطالب اصلی

حداقل دو روش برای ارائهٔ غوطه‌ورسازیهای حافظ متریک از H^n به H^{n+1} وجود دارد. یک روش عبارت است از ساختن یک زیرخمینهٔ M^n در H^{n+1} و نشان‌دادن اینکه M^n با متریک القایی با H^n ایزومتریک است. روش دیگر عبارت است از ارائهٔ یک میدان تانسوری A از نوع $(1,1)$ روی H^n که در معادلات گاوس و کوداتسی

$$\langle AX,X\rangle\langle AY,Y\rangle-\langle AX,Y\rangle^2=0$$

$$(\nabla_X A)(Y)=(\nabla_Y A)(X)$$

صدق کند (در اینجا ∇ التصاق لوی چیویتا[1] روی H^n است و X و Y میدانهای برداری روی H^n هستند). آنگاه بنا بر قضیهٔ اساسی ابررویه‌ها در فضای هذلولوی (مشابه قضیهٔ ۲.۷ از فصل ۷ در [۱۰]) یک غوطه‌ورسازی حافظ متریک از H^n به H^{n+1} وجود دارد که A عملگر شکل آن است. در حالت کلی جهت پوچ A[2]: $\{X\in TH^n:\langle AX,Y\rangle=0\ \ \forall_Y\in TH^n\}$ یک برگ‌بندی روی H^n تعریف می‌کند که برگهای آن زیرخمینه‌های *تماماً ژئودزیک* H (برگ‌بندی ژئودزیک) هستند.

پیچیدگی حالت هذلولوی (حتی برای $n=2$) را می‌توان با ارائهٔ برگ‌بندی‌های ژئودزیک متمایز مختلف روی H^2 نشان دارد (شکل ۲). توجه کنید که در شکل ۲، (الف) و (ب) متمایزند زیرا در (الف) همهٔ ژئودزیکها از یک نقطهٔ در ∞ می‌گذرند در حالی که در (ب) نقاط بینهایت دور ژئودزیکها متمایزند. در حالت اقلیدسی، به‌آسانی دیده می‌شود که فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^n$ به‌طور اساسی یک برگ‌بندی ژئودزیک از بعد $n-1$ دارد. یعنی هر دو برگ‌بندی ژئودزیک $\mathbb{R}^n$ توسط یک ایزومتری $\mathbb{R}^n$ بر هم منطبق می‌شوند (هر برگ یک برگ‌بندی به‌طور ایزومتریک بر برگی از برگ‌بندی دیگر تصویر می‌شود). در حالت کروی، واضح است که S^n هیچ برگ‌بندی ژئودزیک کامل از بعد $(n-1)$ نمی‌پذیرد. زیرا تنها ابررویه‌های تماماً ژئودزیک کامل در S^n عبارت‌اند از کره‌های $S^{n-1}\subset S^n$ و واضح است که هر دو چنین ابررویه‌ای برای $n\geq 2$ همدیگر را قطع می‌کنند.

۱. مثال. ابتدا یک «حاصلضرب تابیده[3]» روی $H^n\times H^p$ تعریف می‌کنیم و به‌عنوان کاربرد مستقیم آن، مثالی از یک غوطه‌ورسازی حافظ متریک از H^n به H^{n+1} تعریف می‌کنیم که یک «استوانهٔ nبعدی» در H^{n+1} تلقی می‌شود (حالت خاص $n=2$، اولین مثال غوطه‌ورسازی از H^2 به H^3 است).

1. non-totally-geodesic

1. Levi-Civita connection
2. null direction of A
3. warped product

برای تثبیت قراردادها ابتدا $H^n(-1)$ را تعریف می‌کنیم

$$H^n = H^n(-1) = \{x = (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}_1 : -x_0^2 + \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = -1, x_0 \geq 1\} \underset{\text{زیرخمینه ریمانی}}{\subseteq} \mathbb{R}^{n+1}_1$$

$$= (\mathbb{R}^{n+1}, \langle , \rangle)$$

$$\langle x, y\rangle = -x_0y_0 + \sum_{i=1}^{n} x_iy_i \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

(این تعریف $H^n(-1)$ ایزومتریک با تعریف دیگر به‌صورت

$$H^n(-1) = (\{x \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}, d\bar{x}^2 = \frac{1}{x_n^2}(dx_1^2 + \dots + dx_n^2))$$

است).

نگاشت $\phi : H^n \times H^p \to H^{n+p}$ را به‌صورت

$$\phi(x, y) = (y_0x_0, y_0x_1, \dots, y_0x_n, y_1, \dots y_p)$$

در نظر بگیرید که در آن

$$x = (x_0, \dots, x_n) \in H^n, y = (y_0, \dots, y_p) \in H^p$$

نگاشت ϕ یک وابر‌یختی (هموار) است. متریک $d\sigma^2$ روی H^{n+p} برحسب متریک‌های dx^2 روی H^n و dy^2 روی H^p به‌صورت $d\sigma^2 = y_0^2dx^2 + dy^2$ قابل بیان است. بدین جهت H^{n+p} را *حاصلضرب تابیدهٔ* H^n و H^p می‌نامند. اکنون *استوانهٔ* n*بعدی* در H^{n+1} را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم. نگاشت $\phi : H^2 \times H^{n-1} \to H^{n+1}$ را در نظر می‌گیریم، برای خم (عادی) دادهٔ شدهٔ $\gamma : \mathbb{R} \to H^2$ که برحسب طول قوس s پارامتری شده است، حاصلضرب ریمانی $M^n = \mathbb{R} \times H^{n-1}$ و نگاشت $f : M \to H^{n+1}$ را به‌صورت $f(s, y) = \phi(\gamma(s), y)$ تعریف می‌کنیم. به‌آسانی دیده می‌شود که f یک غوطه‌ورسازی است. نگاشت f (یا به‌طور هندسی تصویر آن) *استوانهٔ* n*بعدی ساخته‌شده روی خم مسطح* γ نامیده می‌شود. به‌ویژه وقتی $n = 2$، مفهوم استوانه در H^3 به‌دست می‌آید. خواص این استوانه در گزارهٔ زیر آمده است.

۲. گزاره. [۱۳] فرض کنید $\gamma : \mathbb{R} \to H^2$ یک خم هموار باشد که به‌وسیلهٔ طول قوس s پارامتری شده است. استوانهٔ nبعدی ساخته شده روی γ در H^{n+1} با H^n ایزومتریک است. خم γ در $f(M) \cong M$ یک ژئودزیک است. خمیدگی‌های اصلی M همگی صفرند جز یک خمیدگی که برابر $k(s)/y_0$ (در نقطهٔ $(s, y) \in M$) است، $k(s)$ خمیدگی γ به‌عنوان یک خم در H^2 است. بنابراین M تماماً ژئودزیک است اگر و فقط اگر γ یک ژئودزیک در H^2 باشد.

حالت خاص زیر یک نشانندهٔ حافظ متریک (هموار) از H^2 به H^3 است که تماماً ژئودزیک نمی‌باشد. فرض کنید $\gamma : \mathbb{R} \to H^2$ خمی با فرمول $\gamma(s) = (\frac{1+s^2}{2}, s, \frac{s^2}{2})$ باشد. خمیدگی γ برابر مقدار ثابت یک است. H^2 را به‌عنوان یک صفحه در H^3 در نظر بگیرید؛ استوانهٔ M^2 در H^3، ساخته شده روی γ، تصویر یک نشانندهٔ حافظ متریک $f : H^2 \to H^3$ است. خمیدگی اصلی ناصفر استوانه در این حالت عبارت است از $1/y_0$ که در $(0, 1]$ تغییر می‌کند. (توجه کنید که در این مثال، رویه به‌طور صریح ساخته شده است).

۳. مثال. γ را مطابق حالت خاص در مثال ۱ در نظر بگیرید. میدان برداری یکهٔ عمود بر γ عبارت است از

$$Y(s) = (-\frac{s^2}{2}, -s, 1 - \frac{s^2}{2})$$

نگاشت $x : \mathbb{R}^2 \to H^2$ را با فرمول

$$x(s, t) = (\cos\mathrm{h}t)\gamma(s) + (\sin\mathrm{h}t)Y(s)$$

در نظرگیرید. به‌آسانی دیده می‌شود این نگاشت یک وابر‌یختی است، بنابراین یک دستگاه مختصات سراسری (s, t) روی H^2 تعریف می‌کند. میدانهای برداری $x_s = \frac{\partial}{\partial s}$ (مماس بر sـخمها برای هر t ای ثابت) و $x_t = \frac{\partial}{\partial t}$ (مماس بر tـخمها برای هر s ثابت) به‌وسیلهٔ فرمولهای زیر داده می‌شود

$$x_s = (se^{-t}, e^{-t}, se^{-t}),$$
$$x_t = (\sin\mathrm{h}t - \frac{s^2e^{-t}}{2}, -se^{-t}, \cos\mathrm{h}t - \frac{s^2e^{-t}}{2})$$

چون میدان برداری $\partial x_s/\partial t = (-se^{-t}, -e^{-t}, -se^{-t})$ برابر $-x_s$ است، برای التصاق لوی چیویتا، ∇، روی H^2 داریم $\nabla_{x_t}x_s = -x_s$. از آنجاکه x_t و x_s جابه‌جا می‌شوند ($[x_t, x_s] = 0$) داریم $\nabla_{x_s}x_t = -x_s$. حال عملگر شکل A را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$A(x_s) = \lambda x_s, \quad A(x_t) = 0$$

که $\lambda = \lambda(s, t)$ یک نگاشت مناسب است. معادلهٔ کوداتسی که عبارتست از رابطهٔ $\nabla_{x_s}(A(x_t)) = \nabla_{x_t}(A(x_s))$ باید برآورده شود. این معادله در اینجا به‌صورت $\frac{\partial\lambda}{\partial t} = \lambda$ است، بنابراین داریم $\lambda(s, t) = \mu(s)e^t$ که $\mu = \mu(s)$ یک نگاشت هموار دلخواه است.

پس برای هر انتخاب نگاشت $\mu(s)$، قضیهٔ اساسی برای رویه‌های واقع در H^3 وجود یک غوطه‌ورسازی از H^2 به H^3 با خمیدگیهای اصلی 0 و $\mu(s)e^t$ را تضمین می‌کند. به‌ویژه می‌توان μ را یک نگاشت ناصفر ثابت گرفت، در این حالت A هیچ‌وقت صفر نمی‌شود و خمیدگی اصلی ناصفر روی M^2 بیکران است (این مثال را با مثال ۱ مقایسه کنید. در این مثال غوطه‌ورسازی f از طریق میدان تانسوری A داده شده است).

واضح است که این دو مثال همنهشت نیستند زیرا خمیدگی اصلی ناصفر در مثال ۱، کراندار و در مثال ۲ بیکران است.

برگ‌بندی ژئودزیک

اگر غوطه‌ورسازی حافظ متریک $f : H^n \to H^{n+1}$ هیچ *نقطهٔ نافی* نداشته باشد، عملگر شکل f، یعنی A، در هر نقطه دارای اندیس پوچی $(n-1)$ است. اندیس پوچی در x عبارت است از بعد

$$\{X : X \in T_x H^n, A(X) = \circ\} = T_\circ(x)$$

در این حالت، برگ‌بندی پوچی $T_\circ$ *انتگرال‌پذیر* است و هر برگ، یک زیرخمینهٔ *تماماً ژئودزیک کامل* $(n-1)$بعدی است. به‌طور کلی یک برگ‌بندی kبعدی روی یک خمینهٔ ریمانی را *ژئودزیک* نامند اگر هر برگ یک زیرخمینهٔ kبعدی *تماماً ژئودزیک کامل باشد*. غوطه‌ورسازیهای حافظ متریک، در مثالهای ۱ و ۲ نقطهٔ نافی ندارند و می‌توان دید برگ‌بندیهای ژئودزیک وابسته به آنها (برگ‌بندی پوچی $T_\circ$) به‌وسیلهٔ هیچ ایزومتری H^2 همنهشت نیستند. برعکس به‌ازای هر برگ‌بندی ژئودزیک $T_\circ$ روی H^2، غوطه‌ورسازی حافظ متریک $f : H^2 \to H^3$ وجود دارد چنانکه $T_\circ$، برگ‌بندی پوچی عملگر شکل آن (معرفی شده در بالا) باشد.

معادلهٔ کوداتسی که باید عملگر شکل فوق‌الذکر در آن صدق کند، یک معادلهٔ دیفرانسیل است که باید خمیدگیهای اصلی ناصفر در آن صادق باشد. توجه کنید که مثال ۲ درواقع با این روش ساخته شد.

فروس در همان سال ۱۹۷۳ در [۵] نشان داد که چگونه می‌توان همهٔ برگ‌بندیهای ژئودزیک $(n-1)$بعدی روی H^n را به‌دست آورد و اینکه هر برگ‌بندی ژئودزیک روی H^n برگ‌بندی پوچی یک غوطه‌ورسازی حافظ متریک بدون نقطهٔ نافی از H^n به H^{n+1} است. او نتایج زیر را در این خصوص به‌دست آورده است.

۴. قضیه. (قضیهٔ ۳ از [۵]): فرض کنید J بازه‌ای باز در $\mathbb{R}$ باشد و $q : J \to H^n$ یک خم با سرعت واحد و خمیدگی $\kappa \leq 1$ باشد. همچنین فرض کنید $\pi : N(q) \to J$ کلاف قائم q و $\bar{q} : N(q) \to TH^n$ ترفیع معمولی q $(\tau_{H^n} \circ \bar{q} = q \circ \pi)$ باشد، و نیز $\exp : TH^n \to H^n$ نگاشت نمایی H^n باشد. قرار دهید $E = \exp \circ \bar{q} : N(q) \to H^n$.

در این صورت E یک غوطه‌ورسازی ۱_۱ است. اگر $J = \mathbb{R}$، آنگاه E یک وابربریختی است که برگ‌بندی $N(q)$ به‌وسیلهٔ تارها را به یک برگ‌بندی $F(q)$ از H^n تبدیل می‌کند. برگهای برگ‌بندی اخیر ابررویه‌های تماماً ژئودزیک H^n هستند که خم q بر آنها عمود است.

۵. نتیجه. (نتیجهٔ ۱ از [۵]). فرض کنید F یک برگ‌بندی H^n به‌وسیلهٔ ابررویه‌های تماماً ژئودزیک H^n باشد، آنگاه یک خم با سرعت واحد $q : \mathbb{R} \to H^n$ و با خمیدگی $\kappa \leq 1$ وجود دارد چنانکه $F = F(q)$.

ایدهٔ اثبات. این نتیجه به‌آسانی از قضیهٔ بالا و این مطلب به‌دست می‌آید که برای هر برگ‌بندی H^n به‌وسیلهٔ خانواده‌ای از ابررویه‌های تماماً ژئودزیک آن، یک خم هموار کامل در H^n عمود بر برگهای برگ‌بندی وجود دارد که خمیدگی آن کمتر یا مساوی یک است.

۶. قضیه (قضیه ۴ از [۵]). فرض کنید $q : \mathbb{R} \to H^n$ یک خم با سرعت واحد و خمیدگی نابیشتر از ۱ و $\lambda_\circ : \mathbb{R} \to \mathbb{R} - \{\circ\}$ یک نگاشت هموار باشد. همچنین فرض کنید $F(q)$ برگ‌بندی H^n القا شده توسط q باشد (به قضیهٔ قبل رجوع کنید). آنگاه غوطه‌ورسازی حافظ متریک $f : H^n \to H^{n+1}$ بدون نقطهٔ نافی وجود دارد به‌طوری که:

i) یک میدان برداری یکهٔ عمود بر f وجود دارد که عملگر شکل f وابسته به این میدان برداری به‌صورت $A\dot{q} = \lambda_\circ \dot{q}$ است.

ii) برگ‌بندی پوچی f با $F(q)$ یکی است.

ایدهٔ اثبات. به موجب قضیهٔ اساسی برای ابررویه‌ها کافی است وجود میدان تانسوری از نوع $(1,1)$، A روی H^n را ثابت کنیم که از رتبهٔ ۱ باشد و روی بردارهای مماس بر برگهای $F(q)$ صفر شود و در رابطهٔ $A\dot{q} = \lambda_\circ \dot{q}$ و نیز معادلهٔ کوداتسی صدق کند. درواقع A باید به‌صورت $A(\circ) = \lambda g(\circ, Y)Y$ باشد که $\lambda : H^n \to \mathbb{R} - \{\circ\}$ چنان است که $\lambda \circ q = \lambda_\circ$ و Y میدان برداری یکه روی H^n عمود بر برگهای برگ‌بندی داده شده است. در این صورت معادلهٔ کوداتسی به‌ازای همهٔ میدانهای برداری X عمود بر Y به‌صورت $d\lambda(X) = \lambda g(X, \nabla_X Y)$ است. برای اثبات برقراری این معادله، ۱_فرم w به‌صورت $w(Z) = g(Z, \nabla_Y Y)$ تعریف می‌شود چنانچه برای هر برگ $L \in F(q)$، $i_L : L \hookrightarrow H^n$ نگاشت شمول باشد. دیده می‌شود که معادلهٔ کوداتسی فوق معادل است با

$$d(\log|\lambda| \circ i_L) = i_L^* w$$

ثابت می‌شود فرم $i_L^* w$ بسته و در نتیجه دقیق است و درواقع رابطهٔ فوق برقرار است.

۷. نتیجه (نتیجهٔ ۲ از [۵]). هر برگ‌بندی H^n به‌وسیلهٔ ابررویه‌های تماماً ژئودزیک عبارت است از برگ‌بندی پوچی یک غوطه‌ورسازی حافظ متریک بدون نقطهٔ نافی از H^n به H^{n+1}.

دو نتیجهٔ بالا توصیف کاملی از برگ‌بندیهای H^n ارائه می‌دهند. این برگ‌بندیها به‌صورت برگ‌بندیهای پوچ غوطه‌ورسازیهای حافظ متریک، بدون نقطه نافی ظاهر می‌شوند.

نتایج نومیزو و فروس، غوطه‌ورسازیهای حافظ متریک بدون نقطهٔ نافی از H^n به H^{n+1} را مشخص می‌کند. آبه و هاس در سال ۱۹۹۳ در [۱] خانوادهٔ بزرگتری از غوطه‌ورسازیها از H^n به H^{n+1} را مشخص کرده‌اند. قبل از آنکه قضیهٔ مهم آنها را بیان کنیم باید مفهوم تورق[1] را معرفی نماییم.

۸. تعریف. فرض کنید U زیرمجموعه‌ای باز از H^n باشد که مؤلفه‌های همبندی آن را به U_i، $i = 1, 2, \ldots$ نمایش می‌دهیم. فرض کنید هر U_i دارای برگ‌بندی C^∞، $\mathscr{F}_i$ به‌وسیلهٔ ابررویه‌های تماماً ژئودزیک کامل باشد. $\mathscr{F}_U$ عبارت است از اجتماع مجزای $\mathscr{F}_i$ها. در این صورت سه‌تایی $(U, \mathscr{F}_U, H^n - U)$ یک تورق C^∞ برای H^n خوانده می‌شود.

حال فرض کنید $f : H^n \to H^{n+1}$ یک غوطه‌ورسازی حافظ متریک و A عملگر شکل این غوطه‌ورسازی باشد. از رابطهٔ

$$\langle AY, Z\rangle AX = \langle AX, Z\rangle AY$$

1. lamination

برای هر $X, Y, Z \in TH^n$ نتیجه می‌شود $\mathrm{rank}A \leq 1$. قرار دهید $U = \{x \in H^n : \mathrm{rank}A = 1\}$، U در H^n باز است و به‌وسیلهٔ میدان پوچی نسبی[1] A برگ‌بندی می‌شود که برگهای مربوطه، ابررویه‌های تماماً ژئودزیک کامل هستند. U متشکل از حداکثر تعدادی شمارا مؤلفهٔ همبندی باز می‌باشد که هر کدام از آنها به‌وسیلهٔ برگهای فوق برگ‌بندی شده است. $H^n - U$ مجموعه‌ای بسته است و عبارت است از نقاطی که A برابر صفر است. $H^n - U$ غالباً مجموعهٔ نافی f نامیده می‌شود. سه‌تایی $\mathcal{L}_f = (U, \mathscr{F}_U, H^n - U)$ تورق C^∞ روی H^n وابسته به غوطه‌ورسازی f خوانده می‌شود. $\mathcal{L}_f$ به‌طور یکتا توسط f مشخص می‌گردد.

۹. قضیه ([۱]). برای تورق C^∞ داده شده روی H^n، خانواده‌ای از غوطه‌ورسازیهای حافظ متریک از H^n به H^{n+1} وجود دارد چنانکه برگ‌بندیهای پوچی القاشده توسط تمام اعضای خانواده به‌وسیلهٔ آن تورق مشخص می‌شود.

ایدهٔ اثبات . درواقع ابتدا گزاره زیر ثابت می‌شود و سپس با تغییرات مختصری در گزاره، قضیه نتیجه می‌شود.

۱۰. گزاره (گزارهٔ ۱ از [۱]). فرض کنید تورق C^∞ $(U, \mathscr{F}_U, H^2 - U)$ که U مجموعهٔ بازی در H^2 است، داده شده باشد. در این صورت غوطه‌ورسازی حافظ متریک $f : H^2 \to H^3$ وجود دارد چنانکه تورق وابسته به آن دقیقاً $(U, \mathscr{F}_U, H^n - U)$ است. درواقع بی‌نهایت غوطه‌ورسازی از این نوع وجود دارد.

برای اثبات این گزاره نیز با استفاده از تورق داده شده میدان تانسوری A از نوع $(1, 1)$ چنان ساخته می‌شود که در معادلات گاوس و کوداتسی صدق کند. آنگاه با به‌کار بردن قضیهٔ اساسی برای ابررویه‌ها، وجود f اثبات می‌شود.

قضیهٔ ۹ ضمن اینکه نتایج نومیزو و فروس را دربردارد، مثالهایی از غوطه‌ورسازیهای حافظ متریک با مجموعه نقاط نافی ارائه می‌دهد. درواقع کلیهٔ مجموعه‌های نقاط نافی از این روش به‌دست می‌آیند. با وجود این، این روش کاستی هم دارد. مثلاً یک غوطه‌ورسازی حافظ متریک تحلیلی با نقاط نافی را نمی‌توان از این روش به‌دست آورد.

آنچه تاکنون گفته شد، همگی جوابهای جزئی به سؤال نومیزو در [۱۳] است. در سال ۱۹۹۷، هو و ژائو در دو مقالهٔ [۸] و [۹] سؤال فوق را در حالت $n = 2$ به‌طور کامل پاسخ دادند. نتایج آنها به‌شرح زیر است.

۱۱. قضیه [۹]. هر غوطه‌ورسازی حافظ متریک از $H^2(-1)$ به $H^3(-1)$ متناظر با یک جواب معادلهٔ دیفرانسیل مونژ-آمپر[2] به‌صورت زیر است

$$\det\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi_i \partial \xi_j}\right) = 0, \xi = (\xi_1, \xi_2) \in D = \{\xi \in \mathbb{R}^2 : ||\xi|| < 1\} \tag{1}$$

به‌عکس، برای هر جواب u از معادلهٔ فوق، تعریف می‌کنیم

$$\begin{cases} g_{ij} = \lambda^{-4}(\lambda^2\delta_{ij} + \xi_i\xi_j) & \lambda = \sqrt{1 - \xi_1^2 - \xi_2^2} \\ h_{ij} = \lambda^{-1}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi_i \partial \xi_j} & i, j = 1, 2 \end{cases} \tag{2}$$

در این‌صورت u یک غوطه‌ورسازی حافظ متریک از $H^2(-1)$ به $H^3(-1)$ را مشخص می‌کند که $g = (g_{ij})$ و $h = (h_{ij})$ به ترتیب اولین و دومین فرم اساسی آن هستند.

ایدهٔ اثبات . لم زیر جوهر اصلی اثبات است.

لم (گزارهٔ ۱.۳.۳ از [۱۴]). فرض کنید (M, g) یک خمینهٔ ریمانی با خمیدگی ثابت c (احتمالاً صفر) و T یک میدان تانسوری کوداتسی روی M باشد (یعنی T میدان تانسوری از نوع $(1, 1)$ و متقارن است و به ازای هر X، Y، و Z متعلق به TM، $(\nabla_X T)(Y, Z) = (\nabla_Y T)(X, Z)$، ∇ التصاق لوی چیویتا روی M است). آنگاه برای هر نقطه از M همسایگی U و یک نگاشت هموار $f : U \to \mathbb{R}$ وجود دارد که در U رابطهٔ زیر برقرار است: $T \equiv \mathrm{Hess}f + cfg$. به‌علاوه اگر M ساده-همبند باشد، آنگاه چنین نمایش T در سراسر M برقرار است. به‌عکس روی هر خمینهٔ ریمانی (M, g) با خمیدگی ثابت c، هر نگاشت حقیقی هموار f یک میدان تانسوری کوداتسی به‌صورت $T = \mathrm{Hess}f + cfg$ تعریف می‌کند.

اکنون با توجه به اینکه h دومین فرم اساسی غوطه‌ورسازیِ داده شدهٔ یک میدان تانسوری کوداتسی است، با به‌کار بردن لم بالا داریم $h = \mathrm{Hess}f - fg$ برای یک $f : H^2 \to \mathbb{R}$ مناسب. معادلهٔ گاوس برای h معادل است با $\det h = 0$ یعنی $\det(\mathrm{Hess}f - fg) = 0$. با تغییر مختصری در این معادله، معادلهٔ مونژ-آمپر به‌دست می‌آید.

از طرف دیگر، اگر u یک جواب هموار معادلهٔ (۱) باشد، آنگاه hای که به‌وسیلهٔ معادلهٔ (۲) تعریف می‌شود یک میدان تانسوری کوداتسی روی $H^2(-1)$ است و g و h یک غوطه‌ورسازی (هموار) حافظ متریک از $H^2(-1)$ به $H^3(-1)$ را مشخص می‌کند که معادلهٔ (۱)، معادلهٔ گاوس آن است.

۱۲. قضیه (گزارهٔ ۱ از [۸]). هر غوطه‌ورسازی حافظ متریک از $H^2(-1)$ به $H^3(c)$، $c < -1$، متناظر با یک جواب معادلهٔ دیفرانسیل مونژ-آمپر به‌صورت زیر است

$$\det\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi_i \partial \xi_j}\right) = \frac{-c-1}{(1 - \xi_1^2 - \xi_2^2)^2}, \tag{3}$$
$$\xi = (\xi_1, \xi_2) \in D = \{\xi \in \mathbb{R}^2 : ||\xi|| < 1\}$$

به‌عکس، برای هر جواب u از معادلهٔ (۳) تعریف می‌کنیم

$$\begin{cases} g_{ij} = \lambda^{-4}(\lambda^2\delta_{ij} + \xi_i\xi_j), \quad \lambda = \sqrt{1 - \xi_1^2 - \xi_2^2} \\ h_{ij} = \lambda^{-1}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi_i \partial \xi_j} \end{cases} \tag{4}$$

آنگاه u یک غوطه‌ورسازی حافظ متریک از $H^2(-1)$ به $H^3(c)$ مشخص می‌کند که g و h فوق به‌ترتیب اولین و دومین فرم اساسی آن هستند.

اثبات مشابه اثبات قضیه قبل است.

1. relative null distribution 2. Monge-Ampère

۱۳. **قضیه** (قضیهٔ ۱ از [۸]). به‌ازای هر $\varphi \in C^\infty(\partial D)$، معادلهٔ دیفرانسیل همراه با شرایط مرزی زیر

$$\det(\frac{\partial^2 u}{\partial\xi_i\partial\xi_j}) = \frac{-c-1}{(1-\xi_1-\xi_2)^2} \text{ در } D \text{ و } u=\varphi \text{ روی } \partial D \quad (۵)$$

دارای جواب یکتای محدب $u \in C^\infty(D)\cap C^\infty(\partial D)$ است. همچنین جواب u از معادلهٔ (۵) به‌وسیلهٔ معادلات (۴)، یک غوطه‌ورسازی حافظ متریک هموار از $H^2(-1)$ به $H^3(c)$ با خمیدگی‌های اصلی کراندار مشخص می‌کند.

اثبات این قضیه طولانی و حاوی تکنیکها و جزئیات زیاد است که از ارائه آن صرف‌نظر می‌کنیم. علاقه‌مندان به مرجع [۸] رجوع کنند.

۱۴. **نکته**. فرض کنید $M_1^3(c)$ خمینهٔ نیمه‌ریمانی ۳بعدی ساده‌ـهمبند کامل با اندیس یک و خمیدگی ثابت c باشد. اگر $c=0$، $M_1^3(c)$ فضای مینکوفسکی $\mathbb{R}_1^3$ است. اگر $c>0$ (یا $c<0$)، $M_1^3(c)$ عبارت است از شبه‌کرهٔ سه‌بعدی $S_1^3(c)$ (یا فضای شبه‌هذلولوی $H_1^3(c)$). حال $c>-1$ و غوطه‌ورسازیهای حافظ متریک از $H^2(-1)$ به $M_1^3(c)$ را در نظر بگیرید. در این صورت دو قضیهٔ قبل با تغییر مختصر زیر برقرار است. $H^3(c)$ را به $M_1^3(c)$ تبدیل کنید و سمت راست معادلات (۳) و (۴) را به $\frac{c+1}{(1-\xi_1^2-\xi_2^2)^2}$.

۱۵. **نکته**. هانو و نومیزو در [۶] ثابت کرده‌اند که $H^2(-1)$ در $\mathbb{R}_1^3$ صلب (رک. تابلو توضیحات) نیست. درواقع، در این مرجع یک خانواده یک‌پارامتری از نشانده‌های حافظ متریک ناهمنهشت از $H^2(-1)$ به $\mathbb{R}_1^3$ ارائه شده است. از طرف دیگر، لی در [۱۱]، به‌عنوان یک حالت خاص، رویه‌های کامل، فضا مانند (یعنی رویه‌هایی که طول بردارهای ناصفر مماس بر آنها مثبت است) و محدب با خمیدگی‌های اصلی کراندار و خمیدگی گاوسی (مشخص‌شده) در $\mathbb{R}_1^3$ را رده‌بندی کرده است.

سرانجام آبه، مُری، و تاکاهاشی در [۲] به‌طور کامل به سؤال نومیزو که در سال ۱۹۷۳ مطرح کرده بود پاسخ دادند. نتیجهٔ مهم آنها به‌صورت زیر قابل بیان است. برای بیان قضیه‌های آنها ابتدا لازم است چند مطلب مقدماتی آورده شود.

فرض کنید Λ یک مجموعه حداکثر شمارا و $r_\alpha(t)$، $c_{1\alpha}(t)$، ...، $c(t)_{n-1,\alpha}$ نگاشتهای هموار حقیقی تعریف شده روی $J_\alpha=(a_\alpha,b_\alpha)\subset(0,\infty)$ به‌ازای هر $\alpha\in\Lambda$ باشد که در شرایط زیر صدق می‌کنند

$$r_\alpha(t)\not\equiv 0, \sum_{i=1}^{n-1} c'_{i\alpha}(t)^2 \le 1 \quad (۶)$$

تعریف می‌کنیم

$$q_\alpha:(a_\alpha,b_\alpha)\times(0,\pi)^{n-1}\to \mathbb{R}_+^n=\{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n : x_n>0\}$$

$$q_\alpha(t,\theta_2,\dots,\theta_n)=(\dots,t\sin\theta_{2\alpha}\dots\sin\theta_{i\alpha}\cos\theta_{i+1\alpha}+c_{i\alpha}(t),\dots)$$

۱۶. **قضیه** (قضیهٔ ۱.۱ از [۲]). برای غوطه‌ورسازیهای حافظ متریک داده شدهٔ $f:H^n\to H^{n+1}$، یک خانوادهٔ حداکثر شمارا از nتایی‌های $\{r_\alpha(t),c_{1\alpha}(t),\dots,c_{n-1,\alpha}(t)\}$ متشکل از نگاشتهای هموار حقیقی تعریف شده روی $J_\alpha=(a_\alpha,b_\alpha)$ وجود دارد که در شرط (۶) و شش شرط دیگر (که برای اختصار از ذکر آنها خودداری می‌شود) صدق می‌کند. همچنین ایزومتری ρ از H^n وجود دارد چنانکه درایه‌های عملگر شکل A مربوط به غوطه‌ورسازی $\rho\circ f$ به‌وسیلهٔ فرمولهای زیر داده می‌شود:

$$a_{ij}(q_\alpha(t,\theta_2,\dots,\theta_n)) = r_\alpha(t)\sigma_i\sigma_j\sigma_n/\tau$$

$$\alpha_{ij}(Z)=0, Z\in\mathbb{R}_+^n\setminus\cup_\alpha\Omega_\alpha$$

$$\Omega_\alpha = q_\alpha(J_\alpha\times(0,\pi)^{n-1}) \quad (۷)$$

که $\sigma_i=\sin\theta_2\dots\sin\theta_i\cos\theta_{i+1}$، $i=1,2,\dots,n$،

$$\tau = 1+\sum_{k=1}^{n-1}\sigma_k c'_{k\alpha}(t)$$

در اینجا فرض می‌کنیم

$$\theta_n=0, c_{n\alpha}(t)\equiv 0, \forall\alpha\in\Lambda, \sigma_1=\cos\theta_2$$

به‌عکس به‌ازای هر خانوادهٔ حداکثر شمارا از nتایی‌های $\{r_\alpha(t),c_{1\alpha}(t),\dots,c_{n-1,\alpha}(t)\}$ از نگاشتهای حقیقی هموار تعریف شده روی $(a_\alpha,b_\alpha)\subset(0,\infty)$ که در شرایط قبل صدق کند، یک غوطه‌ورسازی حافظ متریک f از H^n به H^{n+1} وجود دارد که عملگر شکل آن، A دارای درایه‌های a_{ij} است که فرمول (۷) به‌دست می‌دهد.

برای بیان قضیهٔ بعدی آبه بیان مطالب زیر لازم است.

فرض کنید $k>0$ (به‌ترتیب $k>1$) عددی ثابت و $\tau(k)$ (به‌ترتیب $\rho(k)$) یک ایزومتری از $(\mathbb{R}_+^2, g_\circ)$ طبق تعریف زیر باشد

$$\tau(k)(x,y)=(x+k,y), (\rho(k)(x,y))=(kx,ky)) \quad \forall(x,y)\in\mathbb{R}_+^2$$

در اینجا $g_\circ$ عبارت است از متریک پوآنکاره روی $\mathbb{R}_+^n$ که به‌صورت زیر است

$$g_\circ = x_n^{-2}(dx_1^2+\cdots+dx_n^2)$$

گروه کلاینی Γ_i، $i=1,2$، به این شکل تعریف می‌شود

$$\Gamma_1=\{\tau(mk):m=0,\pm1,\pm2,\dots\}$$

$$\Gamma_2=\{\rho(k^m):m=0,\pm1,\pm2,\dots\}$$

۱۷. **قضیه** (قضیهٔ ۲.۱ از [۲]). به‌ازای هر ثابت $k>0$ یک خانوادهٔ یک‌پارامتری از غوطه‌ورسازیهای حافظ متریک $f(k,\lambda)$، $0\le\lambda<\epsilon$ از چندگونای هموار $(\mathbb{R}_+^2,g_\circ)/\Gamma_1$ به $(\mathbb{R}_+^3,g_\circ)$ وجود دارد. به‌ازای هر ثابت $k>1$ یک غوطه‌ورسازی حافظ متریک از چندگونای هموار $(\mathbb{R}_+^2,g_\circ)/\Gamma_2$ به $(\mathbb{R}_+^3,g_\circ)$ وجود دارد.

ایدهٔ اثبات. با انتخاب یک خم γ در $\mathbb{R}^2$، غوطه‌ورسازی حافظ متریک $p:(\mathbb{R}_+^2,g_\circ)\to(\mathbb{R}_+^3,g_\circ)$ با فرمول $p(u,v)=(\gamma(u),v)$ را در نظر می‌گیریم؛ به‌کمک این غوطه‌ورسازی و قضیهٔ تابع ضمنی، وجود یک خانوادهٔ یک پارامتری از خمها به‌صورت $\gamma(0,\lambda):\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$، $-\epsilon<\lambda<\epsilon$،

$0<\epsilon$، که همهٔ اعضای خانوادهٔ تناوبی با دورهٔ تناوب k هستند، نشان داده می‌شود. این خانواده چنان است، که به‌ازای λ و μی متفاوت متعلق به $[0,\epsilon)$، خمهای $\gamma(0,\lambda)$ و $\gamma(0,\mu)$ همنهشت نیستند. بنابراین یک خانوادهٔ یک پارامتری از غوطه‌ورسازیهای حافظ متریک $f(.,.,\lambda):\mathbb{R}^2_+\to\mathbb{R}^2_+$ تعریف شده با فرمول $f(u,v,\lambda)=(\gamma(u,\lambda),v)$ با شرط

$$f(u+k,v,\lambda)\equiv f(u,v,\lambda)$$

که $(u,v)\in\mathbb{R}^2_+$، $\lambda\in[0,\epsilon)$، وجود دارد. برای گروه کلاینی Γ_1، خانوادهٔ یک پارامتری از غوطه‌ورسازیهای حافظ متریک

$$F(.,.,\lambda):(\mathbb{R}^2_+,g_0)/\Gamma_1\to(\mathbb{R}^2_+,g_0)$$

با تعریف $F(\pi(u,v),\lambda)=f(u,v,\lambda)$ وجود دارد که $\mathbb{R}^2_+/\Gamma_1$ دارای ساختار هموار و متریک القاشده از افکنش طبیعی $\pi:\mathbb{R}^2_+\to\mathbb{R}^2_+/\Gamma_1$ می‌باشد.

برای گروه Γ_2، نشان داده می‌شود که یک رویهٔ دوار در H^3 به‌وسیلهٔ غوطه‌ورسازی حافظ متریک $f:(\mathbb{R}^2_+,g_0)\to(\mathbb{R}^3_+,g_0)$ با فرمول زیر مشخص می‌شود

$$f(r\cos\theta,r\sin\theta)=(\sqrt{1+a^2}+\cos\theta)^{-1}(a\cos(a^{-1}\log r),\ a\sin(a^{-1}\log r),\sin\theta)$$

که در آن $0<r<\infty$ و $0<\theta<\pi$.

حال می‌توان نشان داد که f غوطه‌ورسازی حافظ متریک زیر را القا می‌کند

$$F:(\mathbb{R}^2_+,g_0)/\Gamma_2\to(\mathbb{R}^3_+,g_0),$$
$$F(\pi(u,v))=f(u,v)\qquad\forall(u,v)\in\mathbb{R}^2_+$$

و $\pi:\mathbb{R}^2_+\to\mathbb{R}^2_+/\Gamma_2$ افکنش معمولی است.

سرانجام می‌خواهیم خانوادهٔ بزرگتری از ابررویه‌های H^{n+1} را معرفی نماییم. این خانواده توسط مُرون و کیانگ در [۱۲] بررسی شده است. نتایج آنها به‌شرح زیر است.

مُرون و کیانگ حدس زیر را مطرح و سعی کرده‌اند به مطالعهٔ حدس و یافتن پاسخی مثبت (حداقل جزئی) برای آن بپردازند.

حدس. فرض کنید M یک ابررویهٔ کامل با خمیدگی ریچی نامنفی و خمیدگی میانگین ثابت در H^{n+1} باشد. آنگاه M عبارت است از یک کرهٔ فاصله‌ای ژئودزیک[1]، یا یک کرهٔ ساعتی[2] یا یک ابراستوانهٔ ژئودزیک.

ابتدا لازم است تعریف سه اصطلاح مطرح شده در حدس بالا ارائه شود.

۱۸. تعریف. مقصود از یک *کرهٔ فاصله‌ای ژئودزیک*، در H^{n+1} عبارت است از مجموعهٔ نقاطی از H^{n+1} که فاصله‌شان تا یک نقطهٔ H^{n+1} مقداری ثابت باشد. یک *ابراستوانه*، خمینه‌ای ریمانی ایزومتریک با $R\times S^{n-1}$ است که در H^{n+1} به‌عنوان کلاف کروی عمودی یک ژئودزیک نشانده شده است.

1. geodesic distance sphere 2. horosphere

در حاصلضرب $R\times S^{n-1}$، R نشانگر یک خط (ژئودزیک کامل) است. یک *کرهٔ ساعتی* در H^{n+1} عبارت است از یک ابررویهٔ تخت (نافی) در H^{n+1} که از تقاطع یک ابرصفحهٔ $\mathbb{R}^{n+2}_1$ با H^{n+1} به‌دست می‌آید.

اکنون به بیان قضایای اثبات‌شده توسط مُرون و کیانگ که در راستای پاسخ به حدس آنهاست می‌پردازیم.

۱۹. قضیه (قضیهٔ ۱ از [۱۲]). فرض کنید M یک ابررویهٔ فشرده در H^{n+1} با خمیدگی ریچی نامنفی و خمیدگی میانگین ثابت باشد، آنگاه M یک کرهٔ فاصله‌ای ژئودزیک (تماماً نافی) است.

ایدهٔ اثبات. ابتدا نشان داده می‌شود دومین فرم اساسی M موازی است و در نتیجه M ایزوپارامتریک می‌باشد (یعنی خمیدگیهای اصلی M ثابت است. برای کسب اطلاعات بیشتر در مورد ابررویه‌های ایزوپارامتریک به [۳] مراجعه کنید). چون M فشرده است از نتایج [۱۷] به‌دست می‌آید که M یک کرهٔ ژئودزیک است (توجه کنید که این نتیجه مرتبط با حالت خاصی از قضیهٔ الکساندروف[1] است که می‌گوید هر ابررویهٔ فشرده نشانده شده در فضای اقلیدسی یا هذلولوی با خمیدگی میانگین ثابت یک کرهٔ مدور است، [۴]).

برای بیان قضیهٔ بعدی به مطالب زیر نیاز داریم.

به‌موجب گزارهٔ ۵ از [۱۲] چنانچه M ابررویه‌ای کامل، نافشرده و با خمیدگی ریچی نامنفی و خمیدگی میانگین ثابت در H^{n+1} باشد، آنگاه خمیدگی مقطعی M نامنفی است. در این صورت به موجب نتیجه‌ای کلاسیک، M با یک کلاف برداری همسانریخت است. پایهٔ این کلاف برداری را جوهر[2] M نامند. جوهر M خمینه‌ای فشرده با خمیدگی مقطعی نامنفی است.

۲۰. قضیه (قضیهٔ ۲ از [۱۲]). فرض کنید M یک ابررویهٔ کامل (نافشرده) در H^{n+1} با خمیدگی ریچی نامنفی و خمیدگی میانگین ثابت باشد. در این صورت خمیدگی مقطعی M نامنفی است. همچنین فرض کنید یکی از دو شرط زیر برقرار است:

۱. جوهر M به یک نقطه تقلیل نمی‌یابد.

۲. جوهر M به یک نقطهٔ p تقلیل می‌یابد و $\|\mathrm{grad}Q\|<\infty$ و کره‌های ژئودزیک با مرکز p، محدب هستند. (Q خمیدگی ریچی است).

آنگاه M در صورت برقراری شرط اول یک ابراستوانهٔ ژئودزیک و در صورت برقراری شرط دوم یک کرهٔ ساعتی است.

ایدهٔ اثبات. ابتدا نشان داده می‌شود M ایزوپارامتریک است (گزاره‌های ۶ و ۸ از [۱۲])، سپس با به‌کار بردن رده‌بندی ابررویه‌های ایزوپارامتریک [۳]، نتیجه (حالت ابراستوانهٔ ژئودزیک) به‌دست می‌آید. برای حالت دوم ابتدا نشان داده می‌شود $\|A\|^2$ (A عملگر شکل M است) ثابت و در نتیجه M ایزوپارامتریک است. با توجه به اینکه جوهر M به یک نقطه تقلیل می‌یابد تنها امکان برای M این است که یک کرهٔ ساعتی باشد.

سپاسگزاری

از آقای دکتر شهشهانی به خاطر پیشنهادهای مفید و اصلاحات ارزنده‌شان صمیمانه سپاسگزارم.

1. A. D. Aleksandrov 2. soul

مراجع

1. K. Abe, A. Haas, "Isometric immersions of H^n into H^{n+1}", *Proc. Symp. Pure Math.* AMS, Vol 54, part 3 (1993) 23-30.

2. K. Abe, H. Mori, H. Takahashi, "A parametrization of isometric immersions between hyperbolic spaces", *Geom. Ded.*, **65** (1997).

3. T. Cecil, P. Ryan, *Tight and Taut Immersions of Manifolds*, Pitman (1985) 31-46.

4. J. H. Eschenburg, "Maximum principle for hypersurfaces", *Manuscripta Math.* **64** (1989) 55-75.

5. D. Ferus, "On isometric immersions between hyperbolic spaces, *Math. Ann.*, **205** (1973) 193-200.

6. J. Hano, K. Nomizu, "On isometric immersion of the hyperbolic plane into the Lorentz-Minkowski space, *Math. Ann.* **262** (1983) 245-253.

7. P. Hartman, L. Nirenberg, "On spherical image maps whose Jacobian do not change signs", *Amer. J. Math*, **81** (1969) 901-920.

8. Z. J. Hu. Hu, G. S. Zhao, "Classification of isometric immersions of the hyperbolic space H^2 into H^3, *Geom. Ded.*, **65** (1997) 47-57.

9. ______. "Isometric immersion from the hyperberbolic space $H^2(-1)$ into $H^3(-1)$", *Proc. Amer. Math. Soc.* (9) **125** (1997) 2693-2697.

10. S. Kobayashi, K. Nomizu: *Foundation of Differential Geometry*, vol I, II, Wiley Interscience (1963,1969).

11. A-M. Li, "Space-like hypersurfaces with constant Gauss curvature in Minkowski space", *Arch. Math.* **64** (1995) 534-551.

12. J-M. Morvan, W. B-Qiang, "Hypersurfaces with constant mean curvatures in hyperbolic space from", *Geom Ded.*, **59** (1996) 197-222.

13. K. Nomizu, "Isometric immersions of the hyperbolic plane into the hyperbolic space", *Math. Ann.* **205** (1973) 181-192.

14. V. Oliker, U. Simon, "Codazzi tensors and equations of Monge-Ampère ...," *J. Reine Angew. Math.* **342** (1983) 35-63.

15. B. O. Neill: Semi-Riemannian Geometry, Acad Press, (1983).

16. B. O' Neill, E. Stiel, "Isometric immersions of constant curvature manifolds", *Michigan Math.* J., **10** (1963) 335-339.

17. R. Walter: "Compact hypersurfaces with a constant. higher mean curvature function", *Math. Ann.*, **270** (1985) 125-145.

* * * * * *

* سید محمدباقر کاشانی، دانشگاه تربیت مدرس

kashanim@net1cs.modares.ac.ir