نشر ریاضی، سال ۸، شمارهٔ ۲، صص ۴۵ـ۴۶

زنده باد دترمینان!

سیاوش شهشهانی* احمد شفیعی‌ده‌آباد**

برخوردهای ناشی از محدودیت دیدگاه در مورد بخشهایی از ریاضیات که کاربردهای گوناگون یا تعمیمهای متنوع دارند، بسیار معمول است و طبعاً جبر خطی که از این هر دو ویژگی برخوردار است آماج بسیار مناسبی برای اظهار نظرهای یک‌جانبه است. مثلاً برداشتی که متخصصان تحقیق در عملیات و اقتصاد ریاضی از جبر خطی دارند با برداشت کسانی که جبر خطی را در هندسهٔ دیفرانسیل یا توپولوژی به کار می‌گیرند بسیار متفاوت است. گروه اخیر نیز برداشتی کاملاً متمایز از متخصصان محاسبات عددی دارد، و اینان نیز دیدگاهی کاملاً متفاوت از دست‌اندرکاران آنالیز تابعی دارند که سر و کارشان با تعمیمهای بینهایت بعدی جبر خطی است. هر گروه تمایل دارد اهمیت نسبی مفاهیم را به میزان نیاز خود ارزیابی کند، و مبنای ارزیابی «شهودی» بودن تعاریف نیز ناخودآگاه به تجربیات ویژهٔ هر گروه باز می‌گردد. به خصوص کسانی (مانند شلدن اکسلر نویسندهٔ مقالهٔ «مرگ بر دترمینان!») که کارشان بررسی عملگرهای خطی بر فضاهای باناخ و هیلبرت است، توجهشان معطوف به آن جنبه‌های جبر خطی است که به فضاهای خطیِ با بعد نامتناهی، تعمیم‌پذیرند.

در مقالهٔ «مرگ بر دترمینان» که در صفحات پیشین از نظرتان گذشت، این نگرشِ یک‌جانبه، آن هم به شکل افراطی و جنجالی، بازتاب یافته است. مقالهٔ سرشار از ادعاهای مبالغه‌آمیز و جنجال‌برانگیز است. نویسنده با لحنی مطمئن و مسیحاگونه سعی دارد جامعهٔ ریاضی را از چیزی که به نظر او گمراهیِ زیانبار و دیرینهٔ توسل به دترمینان است رها سازد. ما در این نوشتهٔ کوتاه سعی خواهیم کرد نشان دهیم که نظرات وی ناشی از نوعی سوء تفاهم، کمبود اطلاعات، و محدود بودن افق دید ریاضی اوست.

دیدگاه ما نسبت به جبر خطی (و مقولهٔ «دترمینان») این است که درس جبر خطی دورهٔ کارشناسی اساساً در مورد فضاهای خطیِ با بعد متناهی و توابع خطی بین آنهاست، یعنی جنبه‌هایی که صرفاً «جبری» هستند. از این دیدگاه می‌توان جبر خطی را بخش خطیِ هندسهٔ تحلیلی «n بُعدی» تلقی کرد. در بخش ۱ مفهوم «دترمینان» را از این دیدگاه بررسی می‌کنیم. در بخش ۲ به پاره‌ای از موارد مواجهه با دترمینان در خارج از چارچوب جبر خطی خواهیم پرداخت.

۱. دترمینان در جبر خطی

یک شیوهٔ کار روزمرهٔ ریاضیدانْ یافتن همریختی‌ها یا فانکتور [تابعگون]های سودمند از یک رسته مسائل به مسائل دیگر است. در یک مسألهٔ پیچیدهٔ داده شده ممکن است بسیاری از عوامل موجود، ارتباطی با سؤال مورد نظر نداشته باشند. هنر ریاضیدانْ یافتن همریختی یا فانکتوری است که مسأله را از عوامل بی‌ربط پاک سازد و روابط منطقی عوامل ذیربط را به صورتی ساده نمایان کند. یکی از معمولترین نمونه‌های این روش، یافتن ناورداهای عددی ست. در اینجا به هر شیء مورد بررسی عددی نسبت داده می‌شود که تحت اثر تبدیلات، شیء مورد نظر به صورتی مشخص تغییر می‌کند و عملیات و ترکیبات میان اشیاء، بازتابی تعریف شده در بین اعداد نسبت داده شده دارند. ما با اکسلر همعقیده‌ایم که اشیاء اساسی مورد بررسی در جبر خطی تبدیلات خطی هستند و نیز رهیافت اجتناب از مختصات را ارجح می‌دانیم. دترمینان یگانه ناوردای عددی (مستقل از مختصات به کار رفته برای نمایش ماتریسی تبدیل خطی) است که چند خاصیت مفید و دلپذیر دارد. مقصود ما از «عدد»، عنصری از میدانی است که فضای خطی روی آن تعریف شده است. فرض کنید E یک فضای خطی nبُعدی روی میدان [هیأت] k باشد؛ تابعهای δای در نظر می‌گیریم که به هر nتایی مرتب $(v_1, \ldots, v_n)$ از عناصر E، عنصر $\delta(v_1, \ldots, v_n)$ از k را که در دو شرط زیر صدق می‌کند، نسبت می‌دهند:

(الف) هر جایگشت اندیسهای ۱ تا n، $\delta(v_1, \ldots, v_n)$ را در علامت جایگشت ضرب می‌کند.

$$\delta(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(n)}) = \epsilon(\sigma)\delta(v_1, \ldots, v_n)$$

بالاخص به ازای $k = \mathbb{R}$، δ مجموعه‌های nتایی مرتب عناصر E را به دو دستهٔ «راستگرد» و «چپگرد» تقسیم می‌کند.

(ب) هرگاه $(n-1)$ عنصر از $\{v_1, \ldots, v_n\}$ ثابت نگاه داشته شوند، $\delta(v_1, \ldots, v_n)$ نسبت به عنصر باقیمانده خطی است.

یک نمونهٔ (بی‌خاصیت) از تابعهای فوق، $\delta \equiv 0$ است. در حالت $k = \mathbb{R}$، هر نمونهٔ $\delta \not\equiv 0$ را می‌توان نوعی «حجم جبری» به معنی زیر تلقی کرد: بحث زیر در حالت دوبعدی (مساحت) و سه‌بعدی (حجم معمولی) کاملاً شهودی و ملموس است. متوازی‌السطوح تعریف شده توسط $\{v_1, \ldots, v_n\}$ یعنی مجموعهٔ زیر را در نظر بگیرید:

$$p(v_1, \ldots, v_n) = \{t_1 v_1 + \ldots + t_n v_n | 0 \leq t_i \leq 1, i = 1, \ldots, n\}$$

حال $\delta(v_1, \ldots, v_n)$ با خواص ذکر شده دقیقاً خواص حجم را دارد با این ملاحظه اضافی که برای «حجم» علامت جبری $\pm$ ملحوظ شده است به ترتیبی که تعویض ترتیب یک nتایی مرتب از راستگرد به چپگرد (یا بالعکس) علامت حجم را عوض می‌کند.

نکتهٔ زیر برای هر میدان k به‌سادگی ثابت می‌شود:

(*) اگر $\delta_0 \not\equiv 0$ در شرایط (الف) و (ب) صدق کند، به ازای هر δی واجد شرایط (الف) و (ب)، عنصر یکتای $c \epsilon k$ وجود دارد که $\delta = c\delta_0$.

حکم (*) در حالت $k = \mathbb{R}$ تعبیر هندسی زیر را دارد: هر تابع $\delta (\not\equiv 0)$ که واجد شرایط (الف) و (ب) باشد نوعی حجم به p نسبت می‌دهد و

تفاوت هر دو δ در یک ثابت c (تغییر مقیاس حجم) است. برای تثبیت یک «واحد حجم»، به وضعیت کلی عملگر خطی $f : E \to E$ باز می‌گردیم. پایهٔ مرتب دلخواهی چون $(e_1, \ldots, e_n)$ برای E در نظر می‌گیریم (نهایتاً به سادگی دیده می‌شود که این انتخاب پایه اثری بر موضوع ندارد) و «حجم» متوازی‌السطوح $p(e_1, \ldots, e_n)$ را عددی دلخواه و غیرصفر چون α قرارداد می‌کنیم. فرض کنید δ تابعی روی nتایی‌های مرتب E واجد شرایط (الف) و (ب) باشد. دترمینان f به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\det f = \frac{\delta(f(e_1), \ldots, f(e_n))}{\alpha}$$

بدین ترتیب، دترمینان تابع همانی برابر واحد است. از ملاحظات قبلی می‌توان نتیجه گرفت که این تعریف نه به مقدار خاصی از $\alpha \neq 0$ بستگی دارد و نه به تابع $\delta(\not\equiv 0)$ انتخاب شده. این سؤال باقی می‌ماند که آیا اصلاً چنین تابع δی مخالف صفری وجود دارد؟ در اینجا فرمول کلاسیک دترمینان یک ماتریس، مثال زندهٔ چنین تابعی است. تعریف بالا، رابطهٔ حجم و دترمینان را به‌روشنی نمایان می‌سازد و به علاوه در حالت $k = \mathbb{R}$ ضابطه‌ی قاطع برای تمیز دادن دو nتایی با گردش متمایز (راستگرد یا چپگرد) ارائه می‌کند.

حال روش فوق را با آنچه در مقالهٔ «مرگ بر دترمینان!» آمده است مقایسه کنید. نویسندهٔ آن مقاله هیچگاه مشخص نکرده است که با کدام تعریف دترمینان سر عناد دارد، ولی به هر حال دترمینان را «مفهومی مشکل و غیرشهودی که معمولاً بدون تمهید انگیزه تعریف می‌شود» می‌خواند (آیا نویسنده اسیر خاطرات ناخوشایندی از دوران تحصیل خود است؟!). در مقابل، وی پیشنهاد می‌کند که دترمینان یک تابع خطی $f : E \to E$ که E یک فضای خطی حقیقی nبعدی است به صورت زیر تعریف شود. مختلط شدهٔ f و E را به‌دست آورید، سپس با استفاده از مطالب متن مقاله، n مقدار ویژهٔ (مختلط) مختلط شدهٔ f را در نظر بگیرید. دترمینان f برابر حاصلضرب این n مقدار ویژه تعریف می‌شود! توجه کنید که نویسنده اصالتی برای دترمینان یک عملگر خطی روی فضای برداری حقیقی (یا در واقع هیچ میدان جبری‌ـ‌نابسته) قایل نیست، و به علاوه قطعاً ایدهٔ او در مورد «تعریف شهودی» کمی سؤال برانگیز است. جای تعجب است که آقای آکسلر در هنگام نوشتن بخشهای ۹ و ۱۰ مقالهٔ خود در مورد رابطهٔ دترمینان با حجم و قضیهٔ تعویض متغیر در انتگرال، کمی عمیقتر در مسأله غور نکرده و به حقانیت تعریف مستقیمی که ما ارائه کردیم (و چیز تازه‌ای هم نیست) پی نبرده است. به هر حال به نظر ما روش نویسندهٔ مقاله «مرگ بر دترمینان!» دو نقطهٔ ضعف اساسی زیر را دارد:

(۱) تعریف دترمینان، که یک مفهوم ابتدایی است، در گرو اثبات قضایای مربوط به مقادیر ویژه قرار گرفته و مستقیماً به مفهوم شهودی حجم پرداخته نشده است.

(۲) برای میدانهای جبری‌ـ‌نابسته هیچ روش مستقیمی ارائه نشده است.

نکتهٔ نهایی: نویسندهٔ مقالهٔ «مرگ بر دترمینان!» در چند مورد از قضیهٔ «تجزیهٔ قطبی» استفاده کرده است. قابل ذکر است که به کمک همین قضیه می‌توان نشان داد که دو پایهٔ راستگرد (یا دو پایهٔ چپگرد) را می‌توان با «تغییر پیوسته» به یکدیگر تبدیل کرد، یا به‌طور دقیق، $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ از دو مؤلفهٔ همبندی (کمانی) تشکیل شده است که یکی مرکب از عناصر دارای دترمینان مثبت و دیگری متشکل از عناصر دارای دترمینان منفی است (برای ملاحظهٔ اثبات، به کتاب کلاسیک C. Chevalley زیرعنوان *Theory of Lie Groups I* مراجعه کنید).

۲. دترمینان در بیرون جبر خطی

ارتباط بین بخشهای مختلف ریاضیات، تمایزگذاشتن بین «دترمینان در جبر خطی» و «دترمینان در بیرون جبر خطی» را دشوار می‌سازد و شاید بتوان تفکیکی دقیق میان آنها قایل شد. ما در اینجا به ذکر چند نمونه که مستقیماً در کتابهای جبر خطی ظاهر نمی‌شوند اکتفا می‌کنیم:

(۱) فرمول تعویض متغیر در انتگرال (که به نظر می‌آید نویسندهٔ «مرگ بر دترمینان!» به عمق اهمیت آن پی نبرده است) نمونه‌ای از یک رشته مطالب «جبر برونی» است. الی کارتان به این واقعیت مرموز پی برد که وابستگی ظاهری مشتق به مختصات را می‌توان با استفاده از جبر برونی مرتفع ساخت. به روایت آندره ویل (در سخنرانیش درکنگرهٔ بین‌المللی ریاضیدانان، سال ۱۹۷۸، هلسینکی) ریشهٔ این مطلب به ابداع نماد دیفرانسیل توسط لایب‌نیتس باز می‌گردد.

(۲) در مبحث میدانهای غیرجابجایی [حلقه‌های تقسیم] سالها در جستجوی جایگزینی برای دترمینان بوده‌اند تا آنکه دیودونه موفق شد مفهوم دترمینان غیرجابجایی را که حربهٔ نیرومندی در این رشته است ارائه کند (مراجعه کنید به کتاب کلاسیک امیل آرتین به نام *Geometric Algebra*).

(۳) در نظریهٔ گروههای کوانتومی که از مقولات مهم و پرجنب و جوش «میان‌رشته‌ای» در فیزیک ریاضی است مقادیر ویژه وجود ندارند ولی دترمینان تعریف‌پذیر است و از اهمیت ویژه‌ای برخوردار می‌باشد.

(۴) مفهومی از دترمینان برای عملگرهایی مانند عملگر لاپلاس‌ـ‌بلترامی و عملگر دیراک که روی فضاهای بینهایت بعدی عمل می‌کنند و به‌طور کلی عملگرهای بیضوی مطرح می‌شود که در معادلات دیفرانسیل جزئی و فیزیک ریاضی نقشی اساسی دارد. در اینجا دترمینان برابر حاصلضرب مقادیر ویژه نیست!

در متون ریاضی کمتر به موردی برمی‌خوریم که مؤلفی با اینگونه احساسات شدید به مبارزه علیه یک مفهوم ریاضی برخیزد. امیدواریم انگیزهٔ نویسندهٔ مقالهٔ «مرگ بر دترمینان» اعتقاد راسخ به مطالبی باشد که در این نوشته به اختصار مورد نقد قرار گرفت، و این تصور بدبینانه صحیح نباشد که نویسنده خواسته است با جنجال برانگیختن، برای فروش کتاب جبر خطی خود زیرعنوان پرطمطراق *Linear Algebra Done Right* تبلیغ کند.

* * * * * *

* سیاوش شهشهانی، دانشگاه صنعتی شریف و پژوهشگاه دانشهای بنیادی
shahshah@ipm.ac.ir

** احمد شفیعی ده‌آباد، دانشگاه تهران و پژوهشگاه دانشهای بنیادی
shafei@vax.ipm.ac.ir