نشر ریاضی، سال ۹، شمارهٔ ۲، صص ۳۸ـ۴۲

روشهای هومولوژیک در جبر جابجایی

سیامک یاسمی*

مقدمه

از آغاز دههٔ ۱۹۵۰ روشهای هومولوژیک از جملهٔ مهمترین ابزارها در شاخه‌های مختلف ریاضیات بوده است. استفاده از این روشها مخصوصاً در موضوعات «جبری» مانند هندسهٔ جبری، توپولوژی جبری و جبر جابجایی بسیار بارز است. هدف از نگارش این گزارش، معرفی حدسهایی در جبر جابجایی است که با روشهای هومولوژیک به اثبات رسیده‌اند.

فرض بر این است که خوانندگان با نظریهٔ حلقه‌ها آشنایی مختصری دارند. در این گزارش تمامی حلقه‌ها جابجایی و یکدار (ناصفر) هستند.

۱. جبر جابجایی بدون روشهای هومولوژیک (۱۹۰۰ میلادی)

حلقهٔ R را نوتری گوییم در صورتی‌که هر ایده‌آل آن به‌وسیلهٔ تعداد متناهی عنصر تولید شود. قضیهٔ پایه ی هیلبرت نشان داد که حلقهٔ چندجمله‌ایهای با تعداد متناهی متغیر و با ضرایب مختلط، $R = \mathbb{C}[X_1, X_2, \ldots, X_n]$، یک حلقهٔ نوتری است.

حلقهٔ R را موضعی نامیم در صورتی‌که دقیقاً یک ایده‌آل ماکسیمال داشته باشد. به‌عنوان مثال اگر $\mathfrak{p}$ یک ایده‌آل اول از حلقهٔ R باشد، آنگاه حلقهٔ موضعی‌شدهٔ R به‌وسیلهٔ $\mathfrak{p}$ یعنی

$$R_\mathfrak{p} = \{\frac{a}{s} | a \in R, s \in R\backslash\mathfrak{p}\}$$

یک حلقهٔ موضعی، و مجموعهٔ

$$\{\frac{p}{s} | p \in \mathfrak{p}, s \in R\backslash\mathfrak{p}\}$$

تنها ایده‌آل ماکسیمال آن است.

از این به بعد منظور از R حلقه‌ای نوتری و موضعی است که تنها ایده‌آل ماکسیمال آن $\mathfrak{m}$ است و k میدان $\frac{R}{\mathfrak{m}}$ می‌باشد.

معرفی مفهوم بُعد حلقه به‌وسیلهٔ کرول دریچهٔ جدیدی را به روی مطالعهٔ حلقه‌ها گشود. بُعد کرول حلقهٔ R، که آن را با نماد «$\dim R$» نمایش می‌دهیم، عبارت است از

$\dim R = \sup\{l \in \mathbb{Z} | \mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \ldots \subset \mathfrak{p}_l$ زنجیری از ایده‌آلهای اول $R\}$

یکی از اساسی‌ترین نتایج در جبر جابجایی، قضیه‌ای از کرول است که به «(تعمیم) قضیهٔ ایده‌آل اصلی کرول» معروف است.

قضیهٔ کرول. *فرض کنیم I ایده‌آلی از R باشد که به‌وسیلهٔ n عنصر تولید شده است. همچنین فرض کنیم $\mathfrak{p}$ ایده‌آل اولِ مینیمال I باشد ($I \subseteq \mathfrak{p}$، و ایده‌آل اول دیگری مانند $\mathfrak{q}$ موجود نباشد که $I \subseteq \mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$). در این صورت*

$$\dim R_\mathfrak{p} \leq n$$

نتیجه. *اگر ایده‌آل ماکسیمال R به‌وسیلهٔ n عنصر تولید شود آنگاه*

$$\dim R \leq n$$

معرفی حلقه‌های منظم با توجه به نتیجهٔ فوق امکان‌پذیر می‌شود. فرض کنیم بُعد حلقهٔ R برابر n باشد. آنگاه R را منظم گوییم هرگاه $\mathfrak{m}$ به وسیلهٔ n عنصر تولید شود.

مثال ۱. الف) $\mathbb{Z}_{2\mathbb{Z}}$ یک حلقهٔ منظم است؛ ب) حلقهٔ $R = \frac{\mathbb{Z}}{4\mathbb{Z}}$ منظم نیست زیرا $\dim R = 0$ ولی $\mathfrak{m} = \frac{2\mathbb{Z}}{4\mathbb{Z}}$ با یک عنصر تولید می‌شود.

حدسهای زیر را کرول مطرح کرده است.

حدسهای کرول. *۱) اگر R منظم باشد، آنگاه به ازای هر ایده‌آل اول $\mathfrak{p}$ از R، حلقهٔ $R_\mathfrak{p}$ منظم است. ۲) اگر R منظم باشد آنگاه R یک حوزهٔ [= دامنهٔ] صحیح با تجزیهٔ یکتا (UFD) می‌باشد. (طبق یکی از نتایج قبلی هر حلقهٔ منظم یک حوزهٔ صحیح است.)*

در بخش بعد تاریخچهٔ اثبات حدسهای فوق را می‌آوریم.

۲. مدولها و روشهای هومولوژیک (۱۹۵۵ میلادی)

می‌توان گفت که در اواخر دههٔ ۱۹۵۰ با استفاده از روشهای هومولوژیک انقلابی در جبر جابجایی صورت گرفت. افرادی مانند اوسلندر[1]، باکسبام[2]، سِر[3] و دیگران با استفاده از روشهای هومولوژیک موفق به حل تعدادی از حدسهای مهم در جبر جابجایی شدند. به‌علاوه حدسهای جدیدی نیز در حالتهای مختلف مطرح کردند. این حدسها را بعدها حدسهای هومولوژیک نامیدند. شاید بتوان گفت که مهمترین دستاورد دههٔ ۱۹۵۰، اثبات حدسهای کرول بوده است.

فرض کنیم M یک Rـمدول متناهی‌مولد و $\{x_1,x_2,\dots,x_{n_0}\}$ مجموعهٔ مولد M باشد. دراین صورت همریختیِ پوشای $\varphi_0: R^{n_0} \longrightarrow M$ موجود است که iامین عضو پایهٔ استاندارد R^{n_0} را با iامین مولد M یعنی x_i نظیر می‌کند. فرض کنیم L_0 هستهٔ φ_0 و $\{l_1,l_2,\dots,l_{n_1}\}$ مجموعهٔ مولد L_0 باشد (چون R نوتری است، L_0 متناهی‌مولد است). در نتیجه رشتهٔ دقیق کوتاه

$$0 \longrightarrow L_0 \xrightarrow{\lambda_0} F_0 \xrightarrow{\varphi_0} M \longrightarrow 0$$

را خواهیم داشت که در آن $F_0 = R^{n_0}$ و λ_0 تابع شمول است. (منظور از *رشتهٔ دقیق کوتاه* این است که λ_0 یک به یک است، $\mathrm{Im}\lambda_0 = \mathrm{Ker}\varphi_0$، و φ_0 پوشاست.) چون L_0 نیز متناهی‌مولد است، رشتهٔ دقیق کوتاه

$$0 \to L_1 \xrightarrow{\lambda_1} F_1 \xrightarrow{\varphi_1} L_0 \to 0$$

را خواهیم داشت که در آن $F_1 = R^{n_1}$. با ادامهٔ این روش به‌ازای هر $i \geq 0$ رشتهٔ دقیق کوتاه

$$0 \to L_i \xrightarrow{\lambda_i} F_i \xrightarrow{\varphi_i} L_{i-1} \to 0$$

را داریم که در آن $F_i = R^{n_i}$. با وصل کردن این رشته‌های دقیق کوتاه به یکدیگر، رشتهٔ دقیق طولانی

$$F_M: \cdots \longrightarrow F_i \xrightarrow{\partial_i} F_{i-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_1 \xrightarrow{\partial_1} F_0 \xrightarrow{\partial_0} M \longrightarrow 0$$

به‌دست می‌آید که در آن

۱) $\partial_0 = \varphi_0$

۲) $\partial_i = \lambda_{i-1}\varphi_i$ به‌ازای هر $i > 0$

۳) $\mathrm{Im}\partial_i = \mathrm{Ker}\partial_{i-1}$ به‌ازای $i \geq 1$

رشتهٔ دقیق طولانی F_M را *تحلیل آزاد متناهی‌مولد* M گوییم.

مثال ۲. فرض کنیم $R = \frac{\mathbb{Z}}{4\mathbb{Z}}$ و $\mathfrak{m} = \frac{2\mathbb{Z}}{4\mathbb{Z}}$ و $M = \frac{R}{\mathfrak{m}}$. در این صورت

$$\cdots \longrightarrow R \xrightarrow{2\cdot} R \xrightarrow{2\cdot} \cdots \xrightarrow{2\cdot} R \xrightarrow{2\cdot} R \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

تحلیل آزاد متناهی‌مولد M خواهد بود. همان‌طور که مشاهده می‌شود، زنجیر فوق از سمت چپ نامتناهی است و می‌توان نشان داد که در این مثال، تحلیل آزاد متناهی‌مولدی برای M که از سمت چپ کراندار باشد، موجود نیست.

1. Auslander 2. Buchsbaum 3. Serre

در بین Rـمدولها، Rـمدولهای آزادِ متناهی‌مولد (مدولهایی که برای آنها $n \in \mathbb{N}$ موجود باشد به‌طوری‌که مدول با R^n یکریخت شود) ساده‌ترین ساختار را دارند و هر چه تحلیل آزاد متناهی‌مولدِ یک مدول طویلتر باشد ساختار Rـمدول پیچیده‌تر خواهد بود.

یکی از نتایج جالبی که از کارهای هیلبرت و سِر به‌دست آمده است، نشان می‌دهد که هر مدول متناهی‌مولد M روی حلقهٔ چندجمله‌ای $R = k[X_1,X_2,\dots,X_n]$ (k میدان است) دارای یک تحلیل آزاد متناهی‌مولدِ از چپ کراندار می‌باشد.

فرض کنیم M یک Rـمدول متناهی‌مولد باشد. طول کوتاهترین تحلیل آزاد متناهی‌مولد M را *بُعد پروژکتیو* M می‌نامیم و با نماد $\mathrm{pd}_R(M)$ نمایش می‌دهیم:

$$\mathrm{pd}_R(M) = \inf\{l \in \mathbb{Z} | 0 \longrightarrow F_l \longrightarrow F_{l-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0 \ \text{تحلیل آزاد متناهی‌مولد}\ M\}$$

مثال ۳. در مثال ۲، بُعد پروژکتیو M نامتناهی است.

اوسلندر و باکسبام در [1] از یک طرف و سِر در [11] (به‌طور مستقل) از طرف دیگر نتیجهٔ مهم زیر را به‌دست آوردند.

قضیه. *حلقهٔ R منظم است اگر و فقط اگر بُعد پروژکتیو هر Rـمدول متناهی‌مولد، متناهی باشد.*

یکی از نتایج بسیار مهمی که از قضیهٔ فوق به‌دست آمد، اثبات حدسهای کرول بود. با این موفقیت، کاربرد روشهای هومولوژیک در جبر جابجایی آغاز شد. یکی از سؤالهای هومولوژیک که پس از اثبات قضیهٔ فوق مطرح شد آن بود که «آیا مدولهای با بُعد پروژکتیوِ متناهی روی حلقهٔ دلخواه، رفتاری مشابه با مدولهای روی حلقه‌های منظم دارند یا نه». حدس اشتراک[1] یکی از مهمترین حدسهای این دوره است. قدم بعدی درگزارش ما، معرفی این حدس است.

همانند موضعی‌سازیِ یک حلقه نسبت به یک ایده‌آل اول، می‌توان مفهوم موضعی‌سازی یک مدول نسبت به یک ایده‌آل اول را مطرح کرد. فرض کنیم M یک Rـمدول و $\mathfrak{p}$ یک ایده‌آل اول از R باشد. در این‌صورت *موضعی‌سازیِ* M نسبت به $\mathfrak{p}$ عبارت است از تشکیل مدولی که آن را با $M_\mathfrak{p}$ نمایش می‌دهیم و به صورت زیر است

$$M_\mathfrak{p} = \{\frac{x}{s} | x \in M, s \in R\backslash\mathfrak{p}\}$$

که یک $R_\mathfrak{p}$ـمدول می‌باشد. همچنین *محمل* مدول M را با $\mathrm{Supp}(M)$ نمایش می‌دهیم و عبارت است از

$$\mathrm{Supp}(M) = \{\mathfrak{p}\ \text{ایده‌آل اول}\ | M_\mathfrak{p} \neq 0\}$$

تذکر. اگر حلقهٔ R را به‌عنوان Rـمدول در نظر بگیریم، $\mathrm{Supp}(R)$ مجموعهٔ همهٔ ایده‌آلهای اول حلقهٔ R خواهد بود.

1. intersection conjecture

به روش مشابهٔ بُعد کرول Rـمدول M را تعریف می‌کنیم

$$\dim M = \sup\{l \in \mathbb{Z} | \mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \ldots \subset \mathfrak{p}_l$$

{زنجیری از ایده‌آلهای اول در محمل M}

حکم زیر را سِر اثبات کرده و به نام قضیهٔ اشتراک نامگذاری شده است.

قضیهٔ اشتراک. *فرض کنیم R یک حلقهٔ منظم، و M و N دو Rـمدول متناهی‌مولد باشند. در این صورت*

$$\dim M + \dim N \leq \dim R + \dim(M \otimes N)$$

تذکر. قضیهٔ فوق در حالت کلی برقرار نیست. برای این منظور به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۴. فرض کنیم $R = \frac{K[X,Y]}{(XY)}$ و $M = \frac{R}{(X)}$ و $N = \frac{R}{(Y)}$. در این صورت $M \otimes N \cong k$ و بنابراین $\dim(M \otimes N) = 0$. از طرف دیگر $\dim M + \dim N = 1 + 1 = 2 > 1 = \dim R$.

حدس اشتراک. *فرض کنیم R یک حلقه (نه لزوماً منظم) باشد و M و N دو Rـمدول متناهی‌مولد باشند به‌طوری که بُعد پروژکتیو M متناهی باشد. در این صورت*

$$\dim M + \dim N \leq \dim R + \dim(M \otimes N)$$

وجه تسمیهٔ قضیهٔ اشتراک

فرض کنیم V و W دو زیرفضای برداری از یک فضای برداری nبعدی باشند. در این صورت طبق یکی از نتایج مقدماتی در جبر خطی

$$\dim V \cap W \geq \dim V + \dim W - n$$

مشابه این نتیجه در هندسهٔ جبری نیز برقرار است. براساس قضیهٔ «بُعد اشتراک آفین» (رجوع شود به [۵] قضیهٔ ۱.۷)، اگر X و Y دو واریتهٔ آفین از بُعدهای r و s در فضای آفین nبُعدی باشند و $X \cap Y$ ناتهی باشد، بُعد آن از $r + s - n$ کمتر نیست.

فرض کنیم $R = k[X_1, X_2, \ldots, X_n]$ حلقهٔ چندجمله‌ایهای nمتغیره روی میدان k باشد. همچنین فرض کنیم X و Y دو واریتهٔ آفین در R باشند و ایده‌آلهای تعریف‌کنندهٔ آنها I و J باشد. در این صورت بُعد X و Y به ترتیب با بُعد کرول حلقه‌های R/I و R/J برابر است. ایده‌آل $I + J$ مجموعهٔ جبری $X \cap Y$ را تعریف می‌کند و داریم $\frac{R}{I+J} \cong \frac{R}{I} \otimes_R \frac{R}{J}$ و لذا طبق قضیه بُعد اشتراک آفین

$$\dim R/I \otimes_R R/J \geq \dim R/I + \dim R/J - \dim R$$

که حالت خاصی از قضیهٔ اشتراک است.

تذکر. حدس فوق تاکنون (زمان نگارش این گزارش) به‌طور کامل اثبات نشده است.

افراد بسیاری برای اثبات یا در رد این حدس تلاش کرده‌اند و در این میان حدسهای قویتر و ضعیفتری از حدس فوق مطرح شده است که از آن جمله می‌توان از حدس ضعیف اشتراک نام برد.

حدس ضعیف اشتراک. *فرض کنیم M و N دو Rـمدول متناهی‌مولد باشند. در این صورت* $\dim N \leq \mathrm{pd}M + \dim(M \otimes N)$.

تذکر. با قراردادن $N = R$ در حکم فوق خواهیم داشت

$$\dim R \leq \mathrm{pd}M + \dim M$$

و بنابراین $\dim R - \dim M \leq \mathrm{pd}M$. از طرف دیگر $\dim N \leq (\dim R - \dim M) + \dim(M \otimes N)$ همان حدس اشتراک است. روابط فوق نشان می‌دهد که چرا حدس ضعیف اشتراک از حدس اشتراک ضعیفتر است.

همچنین حدس جدید اشتراک مطرح شده که قویتر از حدس ضعیف اشتراک است. با توجه به اینکه حدس جدید اشتراک نیز با روشهای هومولوژیک به اثبات رسیده است، در بخش بعد به معرفی و تاریخچهٔ اثبات آن می‌پردازیم.

۳. همبافتها و روشهای هومولوژیک (۱۹۸۰ میلادی)

در اواخر دههٔ ۱۹۸۰ با استفاده از روشهای ابرهومولوژیک (روشهای هومولوژیک در مورد همبافتها) اثبات حدس ضعیف اشتراک (به‌طور دقیقتر حدس جدید اشتراک) کامل شد. در اینجا ابتدا مطالب مختصری از نظریهٔ همبافتها را برای آشنایی مقدماتی خوانندگان به رشتهٔ تحریر درمی‌آوریم. برای مطالعهٔ عمیقتر همبافتها می‌توانید به [۴] مراجعه کنید.

فرض کنیم $\{X_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ خانواده‌ای از Rـمدولها باشد. همچنین فرض کنیم به ازای هر $n \in \mathbb{Z}$، $d_n^X : X_n \longrightarrow X_{n-1}$ یک Rـهمریختی باشد به‌طوری‌که به‌ازای هر $n \in \mathbb{Z}$، $d_n^X d_{n+1}^X = 0$ (به‌عبارت دیگر $\mathrm{Im}d_{n+1}^X \subseteq \mathrm{Ker}d_n^X$). در این صورت

$$X = \cdots \longrightarrow X_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}^X} X_n \xrightarrow{d_n^X} X_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

را یک Rـهمبافت می‌نامیم. nامین هومولوژی مدول X را با علامت $\mathrm{H}_n(X)$ نمایش می‌دهیم و عبارت است از

$$\mathrm{H}_n(X) = \frac{\mathrm{Ker}d_n^X}{\mathrm{Im}d_{n+1}^X}$$

فرض کنیم X و Y دو Rـهمبافت باشند. منظور از مورفیسم $\alpha : X \longrightarrow Y$ خانوادهٔ $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ از Rـهمریختی‌هاست که در آن به‌ازای هر $n \in \mathbb{Z}$.

$\alpha_n : X_n \longrightarrow Y_n$، و نمودار زیر جابجایی باشد

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots \longrightarrow & X_{n+1} & \xrightarrow{d^X_{n+1}} & X_n & \xrightarrow{d^X_n} & X_{n-1} & \longrightarrow \cdots \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
\cdots \longrightarrow & Y_{n+1} & \xrightarrow{d^Y_{n+1}} & Y_n & \xrightarrow{d^Y_n} & Y_{n-1} & \longrightarrow \cdots
\end{array}$$

به‌ازای هر Rـهمبافت X، *همبافت هومولوژیک وابسته به* X را با $\mathrm{H}(X)$ نمایش می‌دهیم و عبارت است از

$$\mathrm{H}(X) = \ldots \longrightarrow \mathrm{H}_{n+1}(X) \xrightarrow{d^{\mathrm{H}(X)}_{n+1}} \mathrm{H}_n(X) \xrightarrow{d^{\mathrm{H}(X)}_n} \mathrm{H}_{n-1}(X) \longrightarrow \ldots$$

که در آن $d^{\mathrm{H}(X)}_n = 0$ به‌ازای هر $n \in \mathbb{Z}$.

فرض کنیم X و Y دو Rـهمبافت باشند و $\alpha : X \longrightarrow Y$ یک مورفیسم باشد. در این صورت به‌سادگی می‌توان دید که به‌ازای هر $n \in \mathbb{Z}$، $\alpha(\mathrm{Ker} d^X_n) \subseteq \mathrm{Ker} d^Y_n$ و $\alpha(\mathrm{Im} d^X_{n+1}) \subseteq \mathrm{Im} d^Y_{n+1}$.

در نتیجه α نگاشت یکتایی به‌صورت

$$\mathrm{H}_n(\alpha) : \mathrm{H}_n(X) \longrightarrow \mathrm{H}_n(Y) \qquad \forall n \in \mathbb{Z}$$

القا می‌کند. فرض کنیم $\mathrm{H}(\alpha) = \{\mathrm{H}_n(\alpha)\}_{n\in\mathbb{Z}}$. در این صورت

$$\mathrm{H}(\alpha) : \mathrm{H}(X) \longrightarrow \mathrm{H}(Y)$$

یک مورفیسم است. اگر به‌ازای هر $n \in \mathbb{Z}$، $\mathrm{H}_n(\alpha)$ یک Rـیکریختی باشد، آنگاه گوییم X و Y *به‌طور هومولوژیک یکریخت‌اند* و آن را با نماد $X \simeq Y$ نمایش می‌دهیم. به بیان دیگر می‌توان گفت

$$X \xrightarrow[\alpha]{\simeq} Y \overset{\text{تعریف}}{\Longleftrightarrow} \mathrm{H}(X) \xrightarrow[\mathbf{H}(\alpha)]{\cong} \mathrm{H}(Y)$$

(با توجه به یکریختی هومولوژیک، همبافتها را دسته‌بندی می‌کنند و به‌جای مطالعهٔ همبافتها، دسته‌های جدید را مورد مطالعه قرار می‌دهند.)

اکنون به معرفی حدس جدید اشتراک می‌پردازیم.

حدس جدید اشتراک. *فرض کنیم*

$$F : 0 \longrightarrow F_n \longrightarrow F_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow 0$$

یک همبافت از Rـمدولهای آزادِ متناهی‌مولد باشد. اگر به‌ازای هر $0 < i < n$ داشته باشیم $\mathrm{Supp}(\mathrm{H}_i(F)) = \{\mathfrak{m}\}$ و $\mathrm{H}_0(F) \neq 0$ آنگاه $\dim R \leq n$.

تاریخچهٔ اثبات حدس جدید اشتراک. اثبات این حدس را می‌توان به سه مرحله تقسیم کرد.

مرحلهٔ اول (۱۹۷۳ میلادی). پسکین و اشپیرو در [۸] حدس فوق را در حالتی که مشخصهٔ R با مشخصهٔ k برابر و مثبت باشد، اثبات کرده‌اند. در این مقاله روش بسیار مفید «تقلیل به مشخصهٔ p» و همریختی فروبنیوس مورد استفاده قرار گرفت. (فرض کنیم مشخصهٔ حلقهٔ R برابر p باشد. در این صورت همریختی φ از R به خودش را که هر عضو را به توان pام همان عضو تصویر می‌کند همریختی فروبنیوس گوییم.) همچنین با استفاده از روش فوق حدسهای هومولوژیک دیگری نیز در حالت خاص به اثبات رسیدند. با توجه به اینکه در حلقه‌های با مشخصهٔ p، به‌ازای هر دو عنصر a و b از حلقه، $(a+b)^p = a^p + b^p$ برقرار است و این مطلب در حلقه‌های با مشخصهٔ صفر برقرار نیست، لذا برای حلقه‌های با مشخصهٔ صفر نمی‌توان از روش فوق استفاده کرد.

مرحلهٔ دوم (۱۹۷۵ میلادی). هاکستر در [۶] حدس فوق را در حالتی که مشخصهٔ R با مشخصهٔ k برابر، و هر دو صفر باشند، ثابت کرد. در این مقاله از تقریب آرتین استفاده شده است. برای مطالعهٔ بیشتر در این مورد می‌توان به فصل دوازدهم [۱۱] که توسط وَن دِن دْریز[1] تهیه شده است، مراجعه کرد.

مرحلهٔ سوم (۱۹۸۶ میلادی). رابرتس در [۹] حدس فوق را در حالتی که مشخصهٔ R با مشخصهٔ k برابر نباشد، ثابت کرد. در این مقاله از نظریهٔ همبافتها استفادهٔ بسیار شده و تاکنون اثباتی بدون استفاده از نظریهٔ همبافتها ارائه نشده است.

نتیجه. قضیهٔ ضعیف اشتراک، از قضیهٔ جدید اشتراک نتیجه می‌شود.

برهان. اگر $\mathrm{pd}M = \infty$ آنگاه حکم برقرار است. پس فرض کنیم $t = \mathrm{pd}M < \infty$. به استقرا روی $n = \dim(M \otimes N)$ عمل می‌کنیم. $n = 0$: قرار می‌دهیم $I = \mathrm{Ann}(N)$ و $\overline{R} = \frac{R}{I}$. در این صورت $\dim \overline{R} = \dim N$ و

$$\{\mathfrak{m}\} = \mathrm{Supp}(M \otimes N) =$$

$$\mathrm{Supp}M \cap \mathrm{Supp}N = \mathrm{Supp}M \cap \mathrm{Supp}\overline{R}$$

چون $\mathrm{pd}M = t$، پس تحلیل آزاد متناهی‌مولد F از M موجود است:

$$F = 0 \longrightarrow F_t \longrightarrow F_{t-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

بنابراین همبافت

$$\overline{F} = 0 \longrightarrow F_t \otimes \overline{R} \longrightarrow F_{t-1} \otimes \overline{R} \longrightarrow \cdots F_1 \otimes \overline{R} \longrightarrow F_0 \otimes \overline{R} \rightarrow 0$$

از $\overline{R}$ـمدولهای آزادِ متناهی‌مولد به‌دست می‌آید. با توجه به خواص $\mathrm{H}_i(\overline{F})$ خواهیم داشت $\mathrm{H}_0(\overline{F}) = M \otimes \overline{R}$ و در نتیجه طبق لم ناکایاما، $\mathrm{H}_0(\overline{F}) \neq 0$. به‌علاوه به‌ازای هر $0 < i < t$ داریم

$$\mathrm{Supp}(\mathrm{H}_i(\overline{F})) = \{\frac{\mathfrak{m}}{I}\}$$

بنابراین طبق قضیهٔ جدید اشتراک، $\dim \overline{R} \leq t$ و از این رو $\dim N \leq \mathrm{pd}M$. حال فرض کنیم حکم برای اعداد کمتر از n برقرار است و $n = \dim M \otimes N > 0$. بنابراین $\dim N > 0$ و در نتیجه می‌توان $x \in \mathfrak{m}$ چنان اختیار کرد که x در هیچ‌یک از ایده‌آلهای اول مینیمال $\mathrm{Supp}M \otimes N$ و $\mathrm{Supp}N$ قرار نداشته باشد. لذا

$$\dim(M \otimes \frac{N}{xN}) = \dim \frac{M \otimes N}{x(M \otimes N)} = \dim(M \otimes N) - 1$$

و

$$\dim \frac{N}{xN} = \dim N - 1$$

اکنون با استفاده از فرض استقرا حکم برقرار می‌شود.

---

1. van den Dries

تذکر. با استفاده از نظریهٔ همبافتها می‌توان همبافتی مانند X یافت به‌طوری‌که $\dim R \le \dim X \le \mathrm{pd}M + \dim M$. (برای توضیح بیشتر به [۱۳] و [۱۴] مراجعه کنید.)

> با استفاده از قضیهٔ جدید تقاطع می‌توان اثبات کوتاهی برای قضیهٔ کرول عنوان کرد. بدین ترتیب که فرض کنیم $I = (X_1, X_2, \ldots X_n)$ باشد. فرض کنیم K همبافت کُزول[1] روی X_1، X_2، ...، X_n باشد. آنگاه $\mathrm{H}_0(K) = \frac{R}{I}$. فرض کنیم $\mathfrak{p}$ ایده‌آل اول مینیمال روی I باشد. اگر K را نسبت به $\mathfrak{p}$ موضعی کنیم آنگاه به ازای هر $0 < i < n$، $\mathrm{SuppH}_i(K_{\mathfrak{p}}) = \{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}\}$ و $\mathrm{H}_0(K_{\mathfrak{p}}) \neq 0$. در نتیجه طبق قضیهٔ جدید تقاطع، $\dim R_{\mathfrak{p}} \le n$.

۴. مدولهای مدرج دیفرانسیلی و روشهای هومولوژیک (۱۹۹۰ میلادی)

از اوایل دههٔ ۱۹۹۰ میلادی آورامف[2] و فاکسبی مطالعهٔ روش جدیدی را در جبر جابجایی با استفاده از روشهای هومولوژیک شروع کردند. فرض کنیم $(R, \mathfrak{m})$ و $(S, \mathfrak{n})$ دو حلقهٔ نوتری باشند. همچنین فرض کنیم $\varphi : R \longrightarrow S$ یک همریختی موضعی ($\varphi(\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{n})$) باشد. گروتندیک، همریختی φ را یکدست[3] می‌نامد در صورتی‌که S به‌عنوان Rـ‌مدول یکدست باشد و نشان می‌دهد که $\frac{S}{\varphi(\mathfrak{m})S}$ خواص بسیار جالبی دارد. از جمله می‌توان نشان داد که $S \otimes_R \frac{R}{\mathfrak{m}}$ (که با موجود فوق یکریخت می‌باشد) یک حلقهٔ موضعی است.

حال فرض کنیم $\varphi : R \longrightarrow S$ یک همریختی موضعی باشد و نیز بُعد تخت S به‌عنوان Rـ‌مدول، متناهی باشد. آنگاه آورامف و فاکسبی با استفاده از مفهوم ضرب تانسوری در نظریهٔ همبافتها، حلقهٔ موضعی مدرج دیفرانسیلی[4] و سپس مدولهایی روی این حلقه با عنوان مدولهای مدرج دیفرانسیلی را معرفی کردند. تفاوت این نظریه با نظریهٔ مدولها و همبافتها در این است که در نظریهٔ مدولها، عناصر مورد بررسیْ مدول و تحلیلها همبافت می‌باشند، در نظریهٔ همبافتها عناصر مورد بررسیْ همبافت و تحلیلها نیز همبافت‌اند. و در نظریهٔ مدولهای مدرج دیفرانسیلیْ عناصر مورد بررسی مدول و تحلیلها نیز مدول هستند.

آورامف و فاکسبی با استفاده از نظریهٔ فوق و روشهای هومولوژیک حکمهای دیگری را در جبر جابجایی به اثبات رساندند. چون برای توضیح این نظریه به ابزارهای زیادی نیاز داریم و بحث در این مورد خوانندگان را خسته می‌کند، به کسانی که به تعقیب این مبحث علاقه‌مندند توصیه می‌شود که به‌عنوان مثال به [۲ و ۳] مراجعه کنند.

1. Kozul 2. Avramov 3. flat
4. differential graded local ring

سپاسگزاری

لازم می‌دانم از آقای دکتر رحیم زارع‌نهندی که در تهیهٔ «تسمیهٔ قضیهٔ اشتراک» به اینجانب کمک کردند و همچنین از آقایان حمیدرضا رحمتی و کاوه لاجوردی که در تصحیح پیش‌نویس اول این گزارش مرا یاری نمودند، سپاسگزاری کنم.

مراجع

1. M. Auslander. and D. Buchsbaum, "Unique factorization in regular local ring", *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **45** (1959) 733-34.
2. L. L. Avramov, and H. B. Foxby. "Locally Gorenstein homomorphismes", *Amer. J. Math.* **114** (1992) 1007-1047.
3. L. L. Avramov, H. B. Foxby, and J. Lescot, "Séries de Bass des homomorphismes locaux de Tor-dimension finie", *C. R. Acad. Sci. Paris, série I* **309** (1989) 645-649.
4. H. B. Foxby, *Hyperhomological Algebra and Commutative Algebra*, Springer (to appear).
5. R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Springer (1977).
6. M. Hochster, "Topics in the homological theory of modules over commutative rings", *CBMS Regional Conf. Ser. in Math.* vol. 24, Amer. Math. Soc. (1975).
7. C. Huneke, review of Homological Questions in Local Algebra, *Bull. Amer. Math. Soc.* (2) **26** (1992) 361-367.
8. C. Peskine. and L. Szpiro, "Dimension projective finie et cohomologie locale", *IHES Publ. Math.* **42** (1973) 323-359.
9. P. Roberts, "Le theoreme d'intersection", *C. R. Acad. Sci. paris Sér. I Math.* **304** (1987) 177-180.
10. P. Roberts, "Intersection Theorems", in M. Hochster, C. Huneke and J. D. Sally (eds.), *commutative Algebra*, MSRI Publ. **15**, Springer (1989) 417-436.
11. J. P. Serre, *Algebre Locale Multiplicites*, LNM 11, Springer (1965).
12. J. R. Strooker, *Homological Questions in Local Algebra*, LMS lecture Note Series, **145** (1990).
13. S. Yassemi, "Generalized section functors", *J. Pure Applied Algebra*, **95** (1994) 103-119.
14. S. Yassemi, "G-dimension", *Math. Scand.* **77** (1995) 161-174.

******

* سیامک یاسمی، دانشکدهٔ علوم دانشگاه تهران

yassemi@vax.ipm.ac.ir