آشنایی با جبر جابه‌جایی ترکیبیاتی•

سیامک یاسمی*

مقدمه

در ریاضیات به دفعات پیش آمده است که مسأله‌ای در یکی از حوزه‌های ریاضی به کمک ابزارهای آن حوزه قابل حل نبوده و لازم آمده است ارتباطی خلاقانه بین مفاهیم مطرح‌شده در آن مسأله و مفاهیمی از سایر شاخه‌های ریاضیات برقرار، و مسأله را به کمک آن حل کنند. در صورتی که مسألهٔ طرح شده عمیق باشد، می‌تواند نظریهٔ جدیدی را در ریاضیات پایه‌گذاری کند که با هدف و شیوه‌های معینی که با خود به همراه می‌آورد رشد و گسترش می‌یابد.

هدف ما از این نوشته، نشان دادن سیر تلاشهای برخی از ریاضیدانان برجستهٔ قرن گذشته و حاضر برای حل یک مسأله ترکیبیاتی به کمک ابزارهای جبر جابه‌جایی است که زمینه‌ساز پیدایش شاخه‌ای جدید با عنوان «جبر جابه‌جایی ترکیبیاتی» در ریاضیات شده است. این شاخهٔ جدید در ۳۵ سال اخیر به‌سرعت گسترش پیدا کرده و به‌علت کاربردهای آن در حوزه‌های مختلف، بسیاری را به‌سوی خود جذب کرده است. به استناد شمار و کیفیت مقالات منتشرشده در این شاخه، امروزه جبر جابه‌جایی ترکیبیاتی از جمله حوزه‌های تحقیقاتی بسیار پرجنب‌وجوش در ریاضیات به‌شمار می‌آید.

یکی از دلایل استقبال ریاضیدانان از جبر جابه‌جایی ترکیبیاتی، قابلیت بی‌نظیر روشهای آن در توصیف ساده و روشن مفاهیم اصلی جبر جابه‌جایی است. مثلاً حلقه‌هایی خاص نظیر حلقه‌های کوهن‌ـمکالی، حلقه‌های گورنشتاین، و نیز مدولهای متناهی‌مولد خاص را می‌توان از روی اشیای ترکیبیاتی خاصی ساخت و ویژگیهای آنها را بیشتر بررسی کرد. این حلقه‌ها از جمله ساختارهای بسیار مهم در جبر جابه‌جایی هستند که وجودشان به‌طور نظری ثابت می‌شود و ساختن مثالهای ملموسی از آنها قبلاً به دشواری انجام می‌گرفت. مفاهیمی همچون نرمال‌سازی حلقه‌ها و یا ایده‌آلها، تحلیل آزاد مدولهای متناهی‌مولد و پیداکردن ناورداهای جبری همچون بُعد، عمق، بُعد تصویری که به‌صورتی نظری در قالب قضایا بیان شده بودند و جنبه‌های محاسباتی آنها به دلیل دشواری، پیشرفت چندانی نکرده بود، و یا توصیف جبری تکینگیهای چندگوناهای جبری که عمدتاً برحسب حلقهٔ سریهای صوری بیان می‌شدند، حال از طریق اشیای ترکیبیاتی همچون چندوجهیهای محدب، مجتمعهای سادکی، یا گرافها در چارچوبی ساده‌تر و عملی‌تر مورد بررسی قرار می‌گیرند که این امر باعث پیشرفتهای کم‌نظیری در جبر جابه‌جایی شده است. به کمک این اشیا می‌توان انبوهی از مثالهای زیبا از اشیای برشمرده در بالا و یا اشیای دیگر جبری ساخت و خواص آنها را به کمک اشیای ترکیبیاتی متناظر با آنها به‌صورتی ملموس‌تر درک و مطالعه نمود و حتی خواص حاصل از این بررسیها و مطالعات را به‌صورت قضایایی جدید ارائه کرد.

به‌دلیل ماهیت الگوریتمی اثباتهای ارائه شده برای قضایای جبر جابه‌جایی ترکیبیاتی، شاخه‌ای دیگر به‌نام جبر جابه‌جایی محاسباتی نیز پدید آمده و امروزه به‌عنوان یک حوزهٔ تخصصی در جبر جابه‌جایی و هندسهٔ جبری مطرح است (ر.ک.[۳۱]). یکی از آثار بسیار پرثمر این دستاوردها، پیدایش نرم‌افزارهای رایانه‌ای برای محاسبهٔ برخی ناورداهای جبری و یا ساختن مدولهایی که ساختاری بسیار پیچیده دارند، مانند مدولهای سی‌زی‌جی[1]، مدولهای Tor و مدولهای Ext یک مدول، تحلیل آزاد[2] یک مدول و بسیاری اشیای جبری دیگر به کمک رایانه بوده است، به‌طوری که امروزه این نرم‌افزارها به‌عنوان یکی از ابزارهای اصلی و اجتناب‌ناپذیر کارهای تحقیقاتی در جبر جابه‌جایی و هندسهٔ جبری به‌شمار می‌روند. در این مورد می‌توان به نرم‌افزارهای CoCoA، Macaulay، و Singular (ر.ک. [۴]، [۵]، و [۶]) اشاره کرد.

در واقع این نرم‌افزارها گاه به‌عنوان وسیله‌ای برای صورت‌بندی یک حدس و زمانی برای آزمودن یک حدس و انجام دادن برخی محاسبات، که اجرای آنها با دست، ساعتها وقت می‌گیرد و شاید نیز امکان‌پذیر نباشد، مورد استفادهٔ فراوانی یافته‌اند. همچنین در شرایطی که فرضهای یک قضیه با فرضهایی که الگوریتمهای این نرم‌افزارها بر آنها بنا شده است یکی باشد، به نتایج حاصل از محاسبات انجام‌شده توسط این نرم‌افزارها می‌توان استناد کرد و درستی بخشی از قضیه را ثابت کرد. نگاهی به مراجع مقالات منتشرشده در این حوزه مؤید این ادعاهاست.

1. syzygy 2. free resolution

از طرف دیگر، ابزارها و روشهای مورد استفاده در جبر جابه‌جایی ترکیبیاتی، سبب شده تا بسیاری از مفاهیم جبر جابه‌جایی، که معمولاً در دوره‌های کارشناسی ارشد و دکتری و یا در مقالات تحقیقاتی مورد بحث و بررسی قرار می‌گیرند، در شکل ساده‌تری برای دانشجویان دورهٔ کارشناسی قابل بیان باشند. امروزه، در بسیاری از دانشگاهها درسی به نام جبر جابه‌جایی محاسباتی و یا جبر تک‌جمله‌ایها جای خود را در برنامه‌های درسی باز کرده است. این موضوع سبب می‌شود تا سرعت فراگیری مطالب پیشرفته و مجرد در جبر جابه‌جایی در دوره‌های عالی افزایش پیدا کند. دانشجویان می‌توانند با فراگیری مثالهای ساده‌ای از این مبحث توانایی تحقیقاتی خود را به سطحی بالاتر ارتقا دهند.

ترکیبیات جبری و جبر جابه‌جایی ترکیبیاتی

ترکیبیات جبری[1] یکی از شاخه‌های ریاضیات است که در آن از جبر مجرد، نظریهٔ گروهها، نظریهٔ نمایش، و توپولوژی جبری برای حل برخی مسائل ترکیبیاتی استفاده می‌شود و به‌عکس، برخی تکنیکهای ترکیبیاتی نیز در حل مسائل جبری کاربردهای فراوانی دارند. این شاخه یکی از شاخه‌های جوان ریاضیات است که در سال ۱۹۹۱ در رده‌بندی موضوعی ریاضی، شمارهٔ 05E به‌عنوان یکی از زیرشاخه‌های موضوع ترکیبیات به آن اختصاص یافت. یکی از زیر شاخه‌های این شاخه که در دههٔ اخیر مورد توجه ریاضیدانان قرار گرفته است و به‌سرعت نیز در حال گسترش است، جبر جابه‌جایی ترکیبیاتی می‌باشد. شمارهٔ رده‌بندی موضوعی ریاضی این زیرشاخه 05E40 است و در واقع زیرشاخه‌ای از موضوع جبر جابه‌جایی است. هر چند می‌توان اصطلاح «جبر جابه‌جایی ترکیبیاتی» را به بررسی موضوعات مشترک جبر جابه‌جایی و ترکیبیات اطلاق کرد، اما بهتر است گفته شود که این زیرشاخه عبارت است از استفاده از روشهای جبر جابه‌جایی برای مطالعهٔ موجودات ترکیبیاتی. پیدایش رسمی این مبحث را می‌توان با انتشار مقالات و کتبِ بسیار اثرگذار ریچارد استنلی از مؤسسهٔ فناوری ماساچوست، (MIT)، (ر.ک. [۲۶] و [۲۷]) و ملوین هاکستر از دانشگاه میشیگان (ر.ک. [۱۴] و [۱۵]) مقارن دانست. علی‌رغم گذشت حدود ۳۵ سال از انتشار آن مقالات، هنوز این آثار منابعی الهام‌بخش برای پژوهشهای بیشتر در این حوزه‌اند.

فرض کنید $\mathbb{K}$ یک میدان باشد و $R = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ را $\mathbb{K}$ـ جبر متشکل از چندجمله‌ایها با ضرایب متعلق به $\mathbb{K}$ از متغیرهای $x_1, \dots, x_n$، درنظر بگیرید. ایده‌آلهای تولیدشده توسط تک‌جمله‌ایها در R، حلقه‌های خارج قسمتی این نوع ایده‌آلها، و نیز $\mathbb{K}$ـ جبرهای تولیدشده توسط تک‌جمله‌ایها، موسوم به حلقه‌های نیم‌گروه[2] از اشیای اصلی مورد مطالعه در جبر جابه‌جایی ترکیبیاتی هستند.

به کمک تجزیهٔ اولیه هر ایده‌آل تک‌جمله‌ای خالی از مربع R می‌توان یک شیء ترکیبیاتی به نام مجتمع سادکی با آن نظیر کرد، و به‌عکس، با هر مجتمع سادکی می‌توان یک ایده‌آل تک‌جمله‌ای خالی از مربع از R نظیر کرد. این تناظر سبب می‌شود که بتوان مسأله‌ای مربوط به مجتمعهای سادکی را به مساله‌ای دربارهٔ ایده‌آلهای تک‌جمله‌ای خالی از مربع ترجمه کرد و با استفاده از قضایا و نظریه‌های موجود در جبر جابه‌جایی پاسخی برای این مسأله یافت و بعد به کمک تناظر اخیر آن را به زبان ترکیبیات برگرداند. به‌عکس، مسأله‌ای

1. algebraic combinatorics 2. semigroup rings

دربارهٔ ایده‌آلهای تک‌جمله‌ای خالی از مربع را می‌توانیم به مسأله‌ای دربارهٔ مجتمعهای سادکی تبدیل کرده و به کمک دانش موجود در ترکیبیات این مسأله را حل و نتیجه را به زبان جبری تعبیر کنیم.

از طرف دیگر، مولدهای هر ایده‌آل تک‌جمله‌ای در R یک زیرمجموعهٔ متناهی در $\mathbb{N}^n$ (یا $\mathbb{Z}^n$) را تعیین می‌کنند. قانون ضرب تک‌جمله‌ایها در ایده‌آل، یک جمع در $\mathbb{N}^n$ (یا $\mathbb{Z}^n$) تعریف می‌کند و اعضای تک‌جمله‌ای ایده‌آل با نقاط یک چندبر محدب در $\mathbb{N}^n$ (یا $\mathbb{Z}^n$) نظیر می‌شوند. در نتیجه برخی خواص ایده‌آل تک‌جمله‌ای را می‌توان با برخی خواص یک چندبر محدب در $\mathbb{N}^n$ (یا $\mathbb{Z}^n$) مربوط کرد و برعکس، با هر چندبر محدب در $\mathbb{N}^n$ (یا $\mathbb{Z}^n$) می‌توان یک ایده‌آل تک‌جمله‌ای نظیر کرد. به این ترتیب، ایده‌آلهای چنبره‌ای[1] و $\mathbb{K}$ـ جبرهایِ به‌صورت $\mathbb{K}[m_1, \dots, m_s]$، که m_iها تک‌جمله‌ایهایی برحسب $x_1, \dots, x_n$ (موسوم به حلقه‌های نیم‌گروه) هستند، به‌دلیل کاربردهایشان، مورد مطالعهٔ وسیعی قرار گرفته و با ترکیبیات پیوند خورده‌اند.

در تناظرهای فوق، شرط تک‌جمله‌ای بودن مولدهای ایده‌آل محدودیتی جدی در برقراری این ارتباط ایجاد نمی‌کند. در واقع به کمک پایه‌های گروبنر[2] که در اواخر دههٔ هفتاد ابداع شد، می‌توان به هر ایده‌آل R یک ایده‌آل تک‌جمله‌ای نظیر کرد. این ایده‌آل جدید بسیاری از خواص ایده‌آل اولیه را به‌همراه دارد و به این ترتیب، به کمک خواص اشیای ترکیبیاتی که به ایده‌آل تک‌جمله‌ای نظیر می‌شود، می‌توان بسیاری از خواص ایده‌آل اولیه را بررسی نمود. نظریهٔ پایه‌های گروبنر به‌کمک تناظر اخیر نه تنها ابزارهای محاسباتی فراوانی را با خود به‌همراه آورد، بلکه به کمک آنها، نتایج نظری فراوانی دربارهٔ ایده‌آلهای دترمینانی که اشیایی نشأت گرفته از چندگوناهای جبری آفین هستند، به‌دست آمد.

چندوجهیهای محدب، محرکی برای پیشرفت

یکی از اصلی‌ترین مسائلی که تلاش برای حل آن زمینه‌ساز پیدایش جبرجابه‌جایی ترکیبیاتی شد، مسأله شمارشی زیر بود:

> حداکثر تعداد ممکن وجه‌های از هر بُعد یک چندوجهی محدب چقدر می‌تواند باشد؟

در سال ۱۹۵۷، ماتزکین [۲۲] با الهام از یک مسألهٔ برنامه‌ریزی خطی، که در آن زمان مدت زیادی از پیدایش آن نمی‌گذشت، پاسخ مسألهٔ فوق را حدس زد، که به حدس کران بالا معروف شد. با مطرح‌شدن این حدس، ریاضیدانانی که در ترکیبیات پژوهش می‌کردند به تلاش گسترده‌ای برای اثبات آن دست زدند. مسألهٔ فوق در بهینه‌سازی به این دلیل اهمیت دارد که حداکثر تعداد رأسها را در یک چندبر محدب d بُعدی تعریف‌شده با n نامعادلهٔ خطی به‌دست می‌دهد. به این ترتیب، حداکثر تعدادِ نقاط ماکسیمم موضعی را که این تابع محدب روی چندبر اختیار می‌کند تعیین می‌کند. این حدس با گذشت زمان صورت عام‌تری پیدا کرد و برای رده‌های وسیع‌تری از چندوجهیهای محدب، از جمله کره‌های سادکی و خمینه‌ها مطرح شد تا اینکه در سال ۱۹۷۰ توسط مک‌مالن برای چندوجهیهای محدب و در سال ۱۹۷۵ توسط ریچارد استنلی برای کره‌های سادکی حل شد.

چندبرها و چندوجهیهای محدب مهم‌ترین رده از مجموعه‌های محدب را تشکیل می‌دهند و نه تنها در ریاضیات، بلکه در سایر شاخه‌های علوم از

1. toric ideals 2. Gröbner bases

قبیل فیزیک، شیمی، زیست‌شناسی، و ... کاربردهای فراوانی دارند (ر.ک. [۱]). شناسایی خواص چندضلعیهای محدب در صفحه و چندوجهیهای محدب در $\mathbb{R}^{۳}$، به‌خصوص انواع منظم آنها، موسوم به اجسام افلاطونی، از زمانهای بسیار قدیم افراد بسیاری را به خود مشغول کرده است. تحقیقات دربارهٔ چندوجهیهای محدب در $\mathbb{R}^{۳}$ یکی از منابع پیدایش گرافهای مسطح ([۷]، قضیهٔ اشتاینیتز، ص. ۲۳۵) بوده و نظریهٔ مربوط به آنها بسیار توسعه یافته است. اما چندوجهیهای محدب از بُعد چهار و بالاتر تا حد زیادی ناشناخته مانده‌اند و در قیاس با چندوجهیهای محدب در $\mathbb{R}^{۳}$ اطلاعات چندانی دربارهٔ آنها به‌دست نیامده است. به همین دلیل مسائل اصلی این حوزه بسیار چالش برانگیز و مبارزطلب هستند و تلاش برای فهم آنها منجر به پیدایش نظریه‌های عمیقی، که عمدتاً جبری‌اند، شده است (ر.ک. [۳۴]).

مثالهای بسیاری از چندوجهیهای محدب می‌توان پیدا کرد که با اشیای ترکیبیاتی و هندسی همچون گرافها، مجموعه‌های جزئاً مرتب[۱]، خانوادهٔ فضاهای متریک، یا مثلث‌بندی مجموعهٔ نقاط معینی نظیر می‌شوند. در بسیاری از این مثالها مسأله برحسب چندوجهیهای محدب صورت‌بندی می‌شود و این اشیا به‌صورت ابزارهای اساسی برای اثبات قضایایی دشوار درباره اشیای اصلی درمی‌آیند.

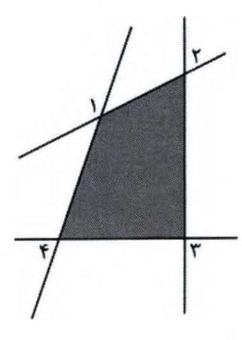
چندوجهیهای محدب را، که مشابه ابعاد بالاتر چندضلعیهای محدب در صفحه هستند می‌توان به‌صورتی ساده توصیف کرد. قبل از آن لازم است چند مفهوم مرتبط را معرفی کنیم.

تعریف ۱. فرض کنید V زیرمجموعه‌ای از فضای اقلیدسی d بُعدی $\mathbb{R}^d$ باشد. کوچک‌ترین زیرمجموعهٔ محدب در $\mathbb{R}^d$ را که شامل V باشد غلاف محدب V در $\mathbb{R}^d$ می‌نامند. غلاف محدب یک مجموعهٔ متناهی را چندوجهی محدب[۲] می‌نامند و آن را با $\mathrm{Conv}(V)$ نمایش می‌دهند.

به‌عنوان مثال، فرض کنید $V=\{v_{۱},v_{۲},v_{۳},v_{۴}\}$ مجموعه‌ای متشکل از چهار نقطه در $\mathbb{R}^{۲}$ باشد که هیچ سه نقطهٔ آنها روی یک خط قرار ندارد. در این صورت، غلاف محدب V یک چندوجهی محدب است که در شکل ۱ نشان داده شده است.

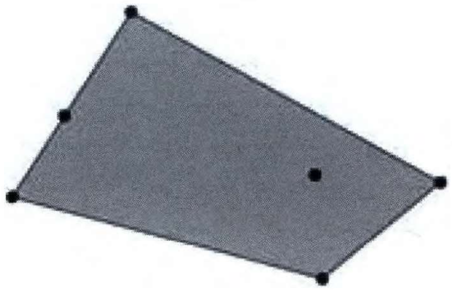
مثال ۱. غلاف محدب مجموعهٔ محدب متشکل از بردارهای یکهٔ

$$(۱,۰,۰),(۰,۱,۰),(۰,۰,۱),(-۱,۰,۰),(۰,-۱,۰),(۰,۰,-۱)$$



شکل ۱ غلاف محدب چهار نقطه

1. poset 2. convex polytope



شکل ۲ غلاف محدب مجموعهٔ $\{V=v_{۱},v_{۲},v_{۳},v_{۴},v_{۵},v_{۶}\}$ که دو عضو آن رأسهای چندوجهی نیستند.

در $\mathbb{R}^{۳}$ یک هشت‌وجهی منتظم است.

شایان ذکر است که برای چندوجهی محدب $P=\mathrm{Conv}(V)$ رأسهای P همان اعضای مجموعهٔ متناهی V هستند. اما در حالت کلی ممکن است برخی از آنها عناصر درونی P باشند که در این صورت رأس P محسوب نمی‌شوند.

می‌توان ثابت کرد که برای هر چندوجهی محدب P یک عدد صحیح و نامنفی d وجود دارد به‌طوری که P با گوی d بُعدی B^d همسانریخت است. در این صورت می‌گوییم بُعد P برابر d است و می‌نویسیم $\dim(P)=d$.

برای توصیف وجه‌هایِ از ابعاد مختلفِ یک چندوجهی به مفهوم زیر نیازمندیم.

تعریف ۲. منظور از یک ابرصفحه[۱] در $\mathbb{R}^d$ زیرمجموعهٔ H از $\mathbb{R}^d$ است که به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$H=\left\{(x_{۱},\dots,x_d)\in\mathbb{R}^d \,\middle|\, \sum_{i=۱}^{d} a_i x_t = d\right\}$$

که در آن $b\in\mathbb{R}$، $a_{۱},\dots,a_d$ و $(a_{۱},\dots,a_d)\neq(۰,\dots,۰)$.

هر ابرصفحه مانند H در $\mathbb{R}^d$ دو نیم‌صفحه به‌صورت زیر تعریف می‌کند

$$H^{+}=\left\{(x_{۱},\dots,x_d)\in\mathbb{R}^d \,\middle|\, \sum_{i=۱}^{d} a_i x_i \geq b\right\},$$

$$H^{-}=\left\{(x_{۱},\dots,x_d)\in\mathbb{R}^d \,\middle|\, \sum_{i=۱}^{d} a_i x_i \leq b\right\}.$$

تعریف ۳. فرض کنید $R\subset\mathbb{R}^d$ یک چندوجهی محدب باشد. ابرصفحهٔ H در $\mathbb{R}^d$ را یک ابرصفحهٔ محمل[۲] می‌نامند هرگاه

۱) $P\subseteq H^{+}$ یا $P\subseteq H^{-}$،

۲) $P\cap H\neq\varphi$،

قضیهٔ زیر حاکی است که هر چندوجهی محدب را می‌توان مجموعهٔ جوابهای یک دستگاه نامعادلات خطی درنظر گرفت.

قضیهٔ ۱ (مینکوفسکی-وایل). هر چندوجهی محدبِ P را می‌توان به‌صورت

1. hyperplane 2. supporting hyperplane

اشتراک تعداد متناهی از نیم‌صفحه‌ها نمایش داد. به‌عبارت دیگر نیم‌صفحه‌های H_1^+، ...، H_n^+ موجودند به‌طوری که $P=\cap_{i=1}^{n} H_i^+$.

از قضیهٔ بالا بلافاصله نتیجه می‌شود که اشتراک یک چندوجهی محدب P در $\mathbb{R}^d$ با هر ابرصفحهٔ مستوی H، یک چندوجهی محدب در $\mathbb{R}^d$ خواهد بود. در حالت کلی، برش چندوجهی محدب P با ابرصفحه‌های مستوی، تعداد نامتناهی چندوجهی محدب به‌دست می‌دهد که بُعد آنها می‌تواند از صفر تا $\dim(P)$ تغییر کند. اما اگر توجه خود را به ابرصفحه‌های محملِ چندوجهی محدب P محدود کنیم، آنگاه تعداد متناهی چندوجهی محدب به‌دست خواهد آمد.

تعریف ۴. فرض کنید P چندوجهی محدب باشد. منظور از یک وجه[1] P زیرمجموعه‌ای از P به‌صورت $P\cap H$ است که در آن H یک ابرصفحهٔ محمل P است. وجه‌های ماکسیمال P را وجه اساسی[2] می‌نامند.

دلیل این نامگذاری این است که بقیهٔ وجه‌های P از روی وجه‌های اساسی به‌دست می‌آیند.

مثال ۲. در هشت‌وجهی مثال ۱، صفحهٔ $x+y+z=1$ یک ابرصفحهٔ محمل برای P است و وجه متناظر با این ابرصفحه، که یک وجه اساسی P است، مثلث تولید شده توسط بردارهای $(1,0,0)$، $(0,1,0)$ و $(0,0,1)$، می‌باشد.

تعداد وجه‌های یک چندوجهی محدب یکی از مشخصه‌های تعیین‌کنندهٔ آن است. تعداد وجه‌های از بُعد i در یک چندوجهی محدب P را با f_i نمایش می‌دهیم و چندتایی مرتب $(f_{-1},f_0,f_1,\dots,f_{d-1},f_d)$ را fـدنبالهٔ P می‌نامیم. در اینجا $f_{-1}=1$ تعداد وجه‌های تهی P و $f_d=1$ تعداد وجه‌های dبُعدی P را که همان P است نشان می‌دهد. اعداد f_0، f_1، f_{d-1} به‌ترتیب تعداد رأسها، یالها، و وجه‌های اساسی P را مشخص می‌کنند. به این ترتیب، مسالهٔ اصلی را می‌توان به‌صورت زیر بازنویسی کرد:

به‌ازای d و n مفروض، حداکثر درایه‌های یک fـبردار چقدر می‌تواند باشد.؟

مثال ۳. هشت‌وجهی دارای ۸ وجه اساسی است و fـبردار آن برابر است با $(1,6,12,8,1)$. شش‌وجهی نیز شش وجه اساسی دارد که fـبردار آن برابر با $(1,8,12,6,1)$ است.

رابطه‌های مختلفی بین تعداد وجه‌های یک چندوجهی محدب وجود دارد. از آن میان می‌توان به رابطهٔ

$$-f_{-1}+f_0-f_1+\cdots+(-1)^{d-1}f_{d-1}+(-1)^d f_d=0$$

و یا معادلش

$$f_0-f_1+\cdots+(-1)^{d-1}f_{d-1}=1+(-1)^{d+1}$$

اشاره کرد. این فرمول در سال ۱۸۹۷ توسط پوانکاره به اثبات رسید و تعمیم فرمول $V-E+F=2$ است که اویلر در قرن هجدهم برای چندوجهیهای دوبُعدی با تعداد رأسهای V، یالهای E، و وجه‌های F عرضه کرده بود و به نام این دو ریاضیدان مشهور شده است. به‌ازای $d=2$، رابطهٔ $f_0=f_1$ به‌دست می‌آید که بیانگر این واقعیت آشناست که تعداد رأسهای یک چندضلعی محدب با تعداد یالهای آن برابر است.

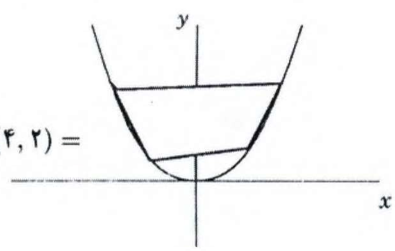
وجه‌های برخی از چندوجهیهای محدب ساختمانی ساده‌تر دارند و همین ویژگی نقش آنها را در مطالعهٔ چندوجهیهای محدب برجسته‌تر می‌کند.

تعریف ۵. چندوجهی محدبی از بعد i را که دارای $i+1$ رأس باشد سادک[1] می‌نامیم. چندوجهی محدب را سادکی[2] می‌نامیم اگر هر وجه آن یک سادک باشد.

به‌عنوان مثال، هشت‌وجهی سادکی است اما شش‌وجهی سادکی نیست. توجه کنید که برای اثبات سادکی بودن یک چندوجهی محدب کافی است نشان دهیم هر وجه اساسی آن یک سادک است.

تعریف ۶. گیریم C خم نرمال گویای $\{(t,t^2,\dots,t^d)\in\mathbb{R}^d | t\in\mathbb{R}\}$ باشد. همچنین فرض کنیم n عددی طبیعی باشد به‌طوری که $n\ge d+1$. در این صورت غلاف محدب هر مجموعهٔ n عضوی از نقاط روی این خم را یک چندوجهی محدب دوری[3] می‌نامیم و با $C(n,d)$ نمایش می‌دهیم.

$C(4,2) =$



شکل ۳ چندوجهی دوری در صفحهٔ $\mathbb{R}^2$

فرض کنید V یک مجموعهٔ n عضوی از نقاط خم C باشد $(n\ge d+1)$. در این صورت، کوچک‌ترین زیر فضای خطی $\mathbb{R}^d$ که یک زیرمجموعهٔ $d+1$تایی از این نقاط را در بر دارد برابر $\mathbb{R}^d$ است، زیرا اگر H ابرصفحه‌ای باشد که با معادلهٔ $a_1x_1+\dots+a_dx_d=b$ تعریف شود و این $d+1$ نقطه را دربرداشته باشد، آنگاه مختصات هر یک از این نقاط به کمک جوابهای متمایز معادلهٔ $a_1t+a_2t^2+\dots+a_dt^d=b$ به‌دست می‌آیند. اما این معادله حداکثر d جواب متمایز دارد و در نتیجه جوابهای آن نمی‌تواند $d+1$ نقطهٔ متمایز از C را تعیین کند. به‌خصوص نتیجه می‌شود که $C(n,d)$ یک چندوجهی از بعد d و هر وجه آن یک سادک است. بنابراین $C(n,d)$ یک چندوجهی سادکی خواهد بود. همچنین با توجه به گزارهٔ ۱ـ۱۲ در [۱۳] می‌دانیم به‌ازای $i\le d/2$، هر مجموعهٔ iتایی از رأسهای $C(n,d)$ یک وجه $i-1$ بعدی از $C(n,d)$ است. به‌عبارت دیگر به‌ازای هر $i\le d/2$، $f_{i-1}(C(n,d))=\binom{n}{i}$.

در پاسخ به این سؤال اساسی که اگر بُعد و تعداد رأسها را ثابت نگاه داریم حداکثر تعداد وجه‌های یک چندوجهی محدب با n رأس و از بعد d چقدر خواهد بود، حدس زیر به‌عنوان حدس کران بالا در سال ۱۹۵۷ توسط ماتزکین (ر.ک. [۲۲]) مطرح شد.

حدس کران بالا (UBC)[4]. فرض کنید $P\subset\mathbb{R}^d$ یک چندوجهی محدب

1. face 2. facet

1. simplex 2. simplicial 3. cyclic polytope

4. Upper Bound Conjecture

با n رأس باشد. در این صورت، به‌ازای هر $\circ \leq i \leq d$

$$f_i(P) \leq f_i(C(n,d)).$$

در سال ۱۹۶۴ کلی[1] دامنهٔ اشیایی را که در حدس فوق صدق می‌کنند وسیع‌تر کرد و مدعی شد این حدس برای کره‌های سادکی نیز درست است.

فرض کنیم P یک چندوجهی محدب باشد. با استفاده از یک روش ترکیبیاتی، موسوم به کشیدن[2] می‌توان از P یک چندوجهی سادکی Δ ساخت به‌طوری‌که $f_\circ(\Delta) = f_\circ(P)$ و به‌ازای هر $\circ < i < d$، $f_i(\Delta) \geq f_i(P)$. بنابراین، اگر بتوان حدس کران بالا را برای یک چندوجهی سادکی ثابت کرد، آنگاه برای هر چندوجهی دیگر هم درست خواهد بود (ر.ک. [۷]، ص. ۸۰).

تعریف ۷. اگر $P \subset \mathbb{R}^d$ یک چندوجهی محدب سادکی باشد، آنگاه

$$\Delta(P) = \{F | F \neq P \text{ و است } P \text{ وجه یک } F\}$$

را مجتمع مرزی[3] P می‌نامیم.

برای اثبات حدس کران بالا (UBC)، به‌جای fـبردار، باید از یک چندتایی مرتب دیگر که در زیر معرفی می‌شود، استفاده کرد.

تعریف ۸. فرض کنیم Δ یک مجتمع سادکی در $\mathbb{R}^{d-1}$ از بعد $d-1$ باشد. همچنین فرض کنیم $(f_{-1}, f_\circ, \ldots, f_{d-1})$، fـبردار Δ باشد. به‌ازای هر $\circ \leq i \leq d$، اعداد صحیح $h_i = h_i(\Delta)$، از رابطهٔ

$$\sum_{i=\circ}^{d} f_{i-1}(x-1)^{d-i} = \sum_{i=\circ}^{d} h_i x^{d-i}$$

محاسبه می‌شوند. بردار $(h_\circ, \ldots, h_d)$ را hـبردار Δ می‌نامیم.

از این رابطه نتیجه می‌شود که اگر hـبردار مجتمع سادکی در دست باشد، می‌توان fـبردار آن را به‌دست آورد. همچنین از تعریف بالا رابطه‌های مفید $h_1 = f_\circ - d$ و $h_\circ = 1$ نتیجه می‌شود.

تعریف ۹. فرض کنید Δ یک مجتمع سادکی روی $V = \{v_1, \ldots, v_d\}$ باشد. در این صورت، زیرمجموعهٔ

$$|\Delta| = \cup_{F \in A} \mathrm{Conv}\left(\{e_i\}_{v_i \in F}\right)$$

از $\mathbb{R}^d$، که e^i بردار پایهٔ استاندارد $\mathbb{R}^d$ است، حقیقی‌شدهٔ هندسی[4] Δ نامیده می‌شود.

اگر P یک چندوجهی d بُعدی باشد، به‌آسانی نشان داده می‌شود مجتمع مرزی P با یک کرهٔ $(d-1)$ بُعدی همسانریخت است. اما هر مجتمع سادکی چنین خاصیتی ندارد.

تعریف ۱۰. مجتمعی سادکی مانند Δ از بعد $d-1$ را مجتمع $(d-1)$ کره‌ای می‌نامیم هرگاه $|\Delta|$ با کرهٔ $(d-1)$ بُعدی $\mathbb{S}^{d-1}$ همسانریخت باشد که در آن $\mathbb{S}^{d-1}$ مرز گوی d بُعدی ∂B^d است.

در سال ۱۹۷۰ مک‌مالن نتیجهٔ زیر را ثابت کرد.

لم ۱. فرض کنید که Δ یک مجتمع $(d-1)$ کره‌ای با fـبردار $f(\Delta) = (f_{-1}, f_\circ, \ldots, f_{d-1})$ و hـبردار $h(\Delta) = (h_\circ, \ldots, h_d)$ باشد. قرار دهید $f_\circ = t$. در این صورت، اگر

$$h_i \leq \binom{t-d+i-1}{i}, \quad \circ \leq i \leq [d/2]$$

آنگاه به‌ازای هر $\circ \leq i \leq d-1$، $f_i \leq f_i(C(t,d))$.

شایان ذکر است که به‌ازای هر $\circ \leq i \leq [d/2]$ داریم

$$h_i(C(t,d)) = \binom{t-d+i-1}{i}.$$

بنابراین، برای اثبات UBC کافی است ثابت شود که به‌ازای هر $\circ \leq i \leq [d/2]$ داریم

$$h_i \leq \binom{t-d+i-1}{i} \qquad (*)$$

مک‌مالن در سال ۱۹۷۰ این نابرابری را برای مجتمع مرزی یک چندوجهی سادکی و نه کره‌های سادکی، ثابت کرد (ر.ک. [۱۸]) و به این ترتیب حدس کلی بی‌پاسخ ماند. به عبارت دیگر:

قضیهٔ ۲. برای هر چندوجهی محدب $P \subset \mathbb{R}^d$ با n رأس داریم

$$f_i(P) \leq f_i(C(n,d)), \quad \circ \leq i \leq d-1.$$

مک‌مالن در اثبات خود از این قضیه از یک خاصیت ترکیبیاتی، موسوم به پوسته‌پذیری[1] مجتمع مرزی یک چندوجهی سادکی، استفاده کرد. اما پوسته‌پذیری مجتمع مرزی یک چندوجهی سادکی، که بروگزر و مانی (ر.ک. [۲]) آن را ثابت کرده بودند، به کره‌های سادکی قابل تعمیم نیستند، زیرا مثلث‌بندیهایی برای کره وجود دارند که پوسته‌پذیر نیستند (ر.ک. [۸] و [۱۶]). به‌عبارت دیگر مثلث‌بندیهایی برای کره می‌توان پیدا کرد که از یک چندوجهی به‌دست نمی‌آیند. به این ترتیب، استدلال مک‌مالن برای درستی UBC برای کره‌های سادکی، قابل تعمیم به حالت کلی نبود. بالاخره استنلی در سال ۱۹۷۵ حدس فوق را برای مجتمعهای سادکی کوهن‌ـمکالی، از جمله مجتمعهایی که از مثلث‌بندی کره به‌دست می‌آیند، ثابت کرد (ر.ک. [۲۶]). در واقع وی شرطی قوی‌تر از نابرابری $(*)$، که شرطی نتیجه‌شده از یک خاصیت جبری بود و شرط مک‌مالن برای اثبات قضیهٔ اخیر را نتیجه می‌داد، ارائه کرد.

برای بیان مراحل استدلال استنلی، باید مفهومی شبیه مجتمع مرزی یک چندوجهی که مستقل از هرگونه نشاندن در یک فضای $\mathbb{R}^d$ باشد، معرفی کنیم.

مجتمعهای سادکی مجرد

فرض کنیم $V = \{v_1, \ldots, v_d\}$ یک مجموعهٔ d عضوی باشد. آنگاه مجموعه‌ای مانند Δ از زیرمجموعه‌های V را یک مجتمع سادکی مجرد[2] با مجموعه رأسهای V گویند هرگاه به‌ازای هر $F \in \Delta$ و هر $G \subset F$ داشته باشیم $G \in \Delta$. به‌علاوه به‌ازای هر i، $\{v_i\} \in \Delta$.

هر عضو Δ را یک وجه و هر وجه ماکسیمال نسبت به رابطهٔ شمول را یک وجه اساسی می‌نامند. Δ را یک مجتمع سادکی محض می‌نامیم هرگاه تعداد

1. V. Klee 2. pulling 3. boundary complex
4. geometric realization

1. shellability 2. abstract simplicial complex

اعضای هر دو وجه اساسی آن برابر باشند. به‌ازای هر $F \in \Delta$، بُعد F را به‌صورت $\dim F = |F| - ۱$ و بُعد Δ را برابر $\dim\Delta = \max\{\dim F | F \in \Delta\}$ تعریف می‌کنند.

مثال ۴. ۱) مجتمع مرزی یک چندوجهی سادکی.

۲) فرض کنید V یک فضای برداری متناهی‌بُعد، و W یک زیرمجموعهٔ متناهی از V باشد. همچنین فرض کنید Δ مجموعهٔ زیرمجموعه‌هایی از W باشد که استقلال خطی دارند. بنابر تعریف، Δ یک مجتمع سادکی است. بُعد Δ حداکثر برابر با بُعد V است.

فرض کنید Δ یک مجتمع سادکی $(d - ۱)$ بُعدی با رأسهای $\{v_۱, \dots, v_d\}$ باشد. همچنین فرض کنید $\mathbb{K}$ یک میدان باشد. حلقهٔ چندجمله‌ایهای $R = \mathbb{K}[x_۱, \dots, x_d]$ را درنظر بگیرید. گیریم I_Δ ایده‌آل تک‌جمله‌ای از حلقهٔ R باشد که توسط تک‌جمله‌ایهای به شکل $x_{i_۱}x_{i_۲}\dots x_{it}$ تولید شود به‌طوری که Δ وجهی با مجموعه رأسهای $\{x_i, \dots, x_{it}\}$ نداشته باشد. ایده‌آل I_Δ را ایده‌آل ناوجه[1] و حلقهٔ

$$\mathbb{K}[\Delta] = \mathbb{K}[x_۱, \dots, x_d]/I_\Delta$$

را حلقهٔ استنلی—رایزنر Δ می‌نامند.

مثال ۵. مجموعهٔ تمام زیرمجموعه‌های هر عضو مجموعهٔ

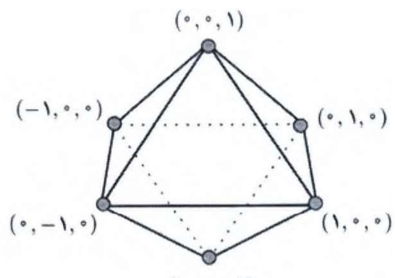
$$\{\{x_۱, x_۲, x_۳\}, \{x_۱, x_۳, x_۴\}, \{x_۱, x_۴, x_۵\}, \{x_۱, x_۲, x_۵\},$$
$$\{x_۲, x_۳, x_۶\}, \{x_۲, x_۵, x_۶\}, \{x_۳, x_۴, x_۶\}, \{x_۴, x_۵, x_۶\}\}$$

یک مجتمع سادکی می‌سازد که ایده‌آل ناوجه آن $I = (x_۱x_۶, x_۲x_۴, x_۳x_۵)$ و حلقهٔ استنلی-رایزنر آن

$$\mathbb{K}[\Delta] = \mathbb{K}[x_۱, \dots, x_۶]/(x_۱x_۶, x_۲x_۴, x_۳x_۵)$$

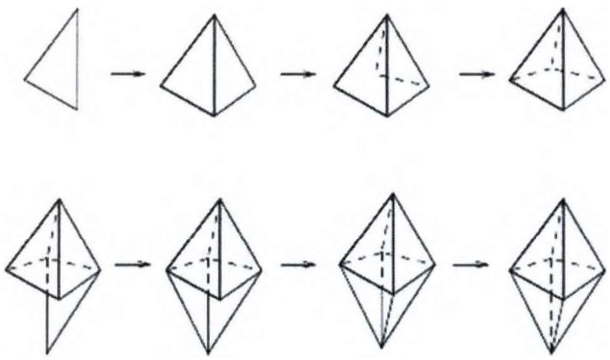
است. این مجتمع در واقع همان مجتمع هشت‌وجهی می‌باشد.

اگر Δ یک مجتمع سادکی $d - ۱$ بُعدی باشد، آنگاه حلقهٔ $\mathbb{K}[\Delta]$ یک $\mathbb{K}$ـجبر متناهی‌مولد از بُعد d است و با استفاده از قضیهٔ نرمال‌سازی نوتر عناصر $y_۱$،...،y_d را در $\mathbb{K}[\Delta]$ می‌توان یافت به‌طوری که $\mathbb{K}[\Delta]$ یک $\mathbb{K}[y_۱, \dots, y_d]$ـمدول متناهی‌مولد باشد. به‌خصوص، اگر این مدول آزاد



شکل ۴ یک هشت‌وجهی

1. nonface



شکل ۵ یک پوسته برای مجتمع مرزی هشت‌وجهی

باشد آنگاه $\mathbb{K}[\Delta]$ را یک حلقهٔ کوهن-مکالی می‌نامند و مجتمع Δ را نیز کوهن-مکالی روی $\mathbb{K}$ می‌خوانند هرگاه $\mathbb{K}[\Delta]$ کوهن-مکالی باشد. به‌عنوان مثال، مجتمع مثال ۲، کوهن-مکالی است.

استنلی متوجه شد که از برخی خواص جبری این نوع حلقه‌ها می‌توان نابرابری $(*)$ را نتیجه گرفت و به کمک آنها توانست UBC را برای کره‌ها به اثبات برساند. در زیر به شرح این ارتباطات می‌پردازیم.

لم ۲. فرض کنید f و i اعداد صحیح و مثبتی باشند. در این صورت برای f نمایش یکتایی به‌صورت

$$f = \binom{n_i}{i} + \binom{n_{i-۱}}{i-۱} + \cdots + \binom{n_j}{j}$$

وجود دارد که در آن $n_i > n_{i-۱} > \ldots > n_j \geq j \geq ۱$.

کافی است به کمک مثلث خیام-پاسکال نزدیک‌ترین عدد به‌صورت $\binom{m}{i}$ به f را بیابیم. اگر این عدد برابر f بود، لم ثابت شده است، در غیر این صورت، قرار می‌دهیم $m = n_i$. این انتخاب را برای $f - \binom{n_i}{i}$ و $i - ۱$ انجام می‌دهیم و این کار را تکرار می‌کنیم. چون f عددی متناهی است، پس از تعداد متناهی بار انجام عمل اخیر، نمایش مورد نظر به‌دست می‌آید.

تعریف ۱۱. اگر f و i دو عدد صحیح و مثبت باشند و

$$f = \binom{n_i}{i} + \binom{n_{i-۱}}{i-۱} + \cdots + \binom{n_j}{j}$$

که در آن $n_i > n_{i-۱} > \ldots > n_j \geq j \geq$، آنگاه تعریف می‌کنیم

$$f^{(i)} = \binom{n_i}{i+۱} + \binom{n_{i-۱}}{i} + \cdots + \binom{n_j}{j+۱}.$$

مسألهٔ وجود چندوجهی محدبی با fـبردار از پیش داده شده به‌وجود روابطی بین درایه‌های fـبردار و اعدادی که از این fـبردار به‌دست می‌آید و در قضیهٔ ۳ بیان می‌شود بستگی دارد. این نتیجه را شوتزنبرگر از یک طرف و کروسکال[1] و کاتونا[2] از طرف دیگر، مستقلاً ثابت کردند و جوابی بود برای سؤالی که قبلاً شوتزنبرگر (ر.ک. [۳۰]) مطرح کرده بود. این نتیجه به عنوان

1. Kruskal 2. Katona

قضیهٔ کروسکال-کاتونا معروف گردیده و نقش شوتزنبرگر در آن فراموش شده است.

قضیهٔ ۳. فرض کنید $(f_0, f_1, \ldots, f_d) \in \mathbb{Z}^{d-1}$ یک بردار باشد به‌طوری که به‌ازای هر $0 \le i \le d-1$ داشته باشیم $f_i > 0$. آنگاه یک مجتمع سادکی Δ موجود است به‌طوری که $f(\Delta) = (1, f_0, f_1, \ldots, f_{d-1})$ اگر و تنها اگر به‌ازای هر $0 \le i \le d-2$، $0 < f_{i+1} \le f_i^{(i+1)}$.

نماد $f^{<i>}$ همانند $f^{(i)}$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$f^{<i>} = \binom{n_i+1}{i+1} + \binom{n_{i-1}+1}{i} + \cdots + \binom{n_j+1}{j+1}$$

همچنین قرارداد می‌کنیم که $0^{<i>} = 0$.

بردار $(h_0, h_1, \ldots)$ را M-بردار می‌نامند (به‌دلیل نقش مکالی در به کاربردن این نماد برای اولین بار، از M استفاده شده است اما بعضی آن را O-بردار[1] هم می‌نامند) هرگاه $h_0 = 1$ و $0 \le h_{i+1} \le h_i^{<i>}$ به‌ازای هر $i \ge 1$.

نتیجهٔ زیر منسوب به استنلی است و آن را قضیهٔ کروسکال-کاتونا برای مجتمعهای کوهن-مکالی می‌نامند.

قضیهٔ ۴. فرض کنیم $h = (h_0, h_1, \ldots, h_d) \in \mathbb{Z}^{d+1}$. در این صورت، مجتمع کوهن-مکالی Δ با بعد $d-1$ وجود دارد به‌طوری که $h(\Delta) = h$ اگر و تنها اگر h یک M-بردار باشد.

همان‌طور که ملاحظه می‌شود، M-برداربودنِ h را به‌راحتی می‌توان ثابت کرد.

گزارهٔ ۱. فرض کنیم Δ یک مجتمع سادکی کوهن-مکالی باشد. آنگاه حدس UBC برای Δ برقرار است.

اثبات. توجه می‌کنیم که $h_1(\Delta) = n-d$ و $(h_0, h_1, \ldots, h_d)$ یک M-بردار است. بنابراین، h_i نابیشتر از تعداد تک‌جمله‌ایهای از درجهٔ i در $n-d$ متغیر، یعنی $\binom{n-d+i+1}{i}$ است. در نتیجه، طبق لم ۱، UBC برای Δ برقرار است. ■

برای کامل‌کردن UBC باید مجتمعهای سادکی کوهن-مکالی را شناخت. به این منظور، استنلی با استفاده از نتیجهٔ رایزنر و هاکستر در مورد دسته‌بندی مجتمعهای سادکی کوهن-مکالی براساس مانستگی [هومولوژی] مربوط به آنها قضیهٔ زیر را ثابت کرد.

گزارهٔ ۲. اگر حقیقی‌شدهٔ هندسی Δ، یعنی $|\Delta|$، با $\mathbb{S}^{d-1}$ همسازریخت باشد، آنگاه Δ کوهن-مکالی است.

لذا با توجه به دوگزارهٔ ۱ و ۲ خواهیم داشت:

قضیهٔ ۵. حدس کران بالا، UBC، برای کره‌ها برقرار است.

و به این ترتیب، درستی حدس کلی نیز به اثبات رسید.

۱. O حرف اول کلمهٔ order است.

ادامهٔ راه

اثبات قضیهٔ بالا پایان راه نبود، بلکه آغاز آن بود. با اثبات استنلی توانایی روشهای جبر جابه‌جایی در حل مسائل ترکیبیاتی نشان داده شد و جبر جابه‌جایی ترکیبیاتی پا به‌عرصهٔ وجود گذاشت. این رشته در مسیر رشد خود، ریاضیات زیبا و با ارزشی را به‌وجود آورده است. همان‌طور که از گزارهٔ ۱ برمی‌آید مجتمعهای سادکی کوهن-مکالی نیز در UBC صدق می‌کنند. به همین دلیل یکی از موضوعات داغ تحقیقاتی در شاخهٔ جبر جابه‌جایی ترکیبیاتی، مشخص‌سازی مجتمعهای کوهن-مکالی و تعمیمهای کوهن-مکالی از جمله مجتمعهای بوکسباوم، k-کوهن-مکالی، و مجتمعهای سادکی با شرط سِر[1] است.

در سالهای اخیر گامهای بلندی برای اثبات درستی UBC برای مجتمعهای دیگر برداشته شده است (ر.ک. [۲۳] و [۲۴]). حدس قوی کران بالا (SUBC)، مطرح شده و ابزارهای جبری جدیدی را، از جمله نظریهٔ پایهٔ گروبنر و ایده‌آلهای آغازی عام[2]، که علاوه بر خواص جبری چندوجهی محدب، خواص توپولوژیکی و ترکیبیاتی آن را نیز با خود به‌همراه می‌آورد، برای پاسخ به این سؤال به‌کار گرفته‌اند (ر.ک. به [۲۳]).

حدس قوی کران بالا نیز همانند UBC از یک مسألهٔ بهینه‌سازی که دربارهٔ کارایی الگوریتم سادکی بوده، نشأت گرفته است. در حالتی که در قضایای بالا هدف اصلیْ بیان خاصیتی دربارهٔ f-بردار و h-بردار یک مجتمع سادکی باشد، حدسها و قضایایی نیز در جهت عکس مطرح شده‌اند. تعیین شرایط لازم و کافی برای اینکه یک چندوجهی محدب با یک h-بردار مفروض وجود داشته باشد، از جمله مسائلی بود که در دههٔ ۱۹۸۰ با استفاده از جبر جابه‌جایی، هندسهٔ جبری، و کوهومولوژی چندگوناهای جبری حل شدند. با وجود این، تعمیم این قضایا به مجتمعهای غیرسادکی موفقیت‌آمیز نبوده و سوالات پاسخ داده نشدهٔ بسیاری دربارهٔ آنها وجود دارد (ر.ک [۲۸]).

به‌کمک f-بردار وابسته به یک مجتمع $d-1$ بُعدی P، d-گروه مانستگی با P نظیر می‌شود که اطلاعات بسیار مفیدی را دربارهٔ P به‌دست می‌دهد. به‌خصوص بسیاری از چندوجهیها را به‌کمک این گروههای مانستگی تعریف و خواص آنها را بررسی می‌کنند (ر.ک. [۲۳]).

از جمله دستاوردهای اخیر در حوزهٔ جبر جابه‌جایی ترکیبیاتی، تعمیم مفهوم حلقه‌های استنلی-رایزنر به مدولها و پیدایش مفهوم جدیدی به نام مدولهای خالی از مربع بوده است و بسیاری از خواص حلقه‌های استنلی-رایزنر به این مدولها تعمیم داده شده‌اند. این مدولها برخی از استدلالهایی را که مبتنی بر خواص حلقه‌های استنلی-رایزنر هستند ساده‌تر می‌کنند و این حوزه هنوز از حوزه‌هایی است که مسائل حل‌نشده در آن فراوان است (ر.ک. [۳۳]). همچنین در سالهای اخیر حلقه‌های وجهی چنبره‌ای[3] به‌عنوان تعمیمی از حلقه‌های استنلی-رایزنر و حلقه‌های نیم‌گروه مستوی معرفی شده‌اند.

یکی دیگر از موضوعات تحقیقاتی جاری در این شاخه، مطالعهٔ خواص گرافها و یا ابرگرافها از طریق ایده‌آلهای تک‌جمله‌ای است که به‌شیوه‌ای خاص با آنها نظیر می‌شوند. از این طریق بسیاری از سؤالهای مربوط به گرافها به سؤالهایی در جبر جابه‌جایی ترجمه می‌شوند و سعی می‌شود با ابزارهای جبر جابه‌جایی پاسخی برای آنها پیدا شود (ر.ک. [۳۲] فصلهای ۶ و ۷). به‌عنوان

1. Serre's condition 2. generic initial ideals 3. toric face rings

مثالی دیگر، با هر گراف می‌توان یک مجتمع سادکی نظیر کرد (یعنی مجموعهٔ متشکل از زیرمجموعه‌های رأسهای مستقل گراف)، لذا مشخص‌سازی گرافهای کوهن-مکالی و یا گرافهایی با خاصیت جبری معین از جمله فعالیتهای جدی در این شاخه محسوب می‌شود. با توجه به اینکه هرتسوگ و هیبی از جلوداران این قافله‌اند، لذا علاقه‌مندان به این شاخه می‌توانند با مراجعه به مقالات این دو و مراجع مندرج در آنها، تقریباً اکثر مقالات موجود در این زمینه را جستجو و از موضوعات آن آگاهی یابند.

از جمله مجتمعهای سادکی دیگری که با یک گراف نظیر می‌شود، مجتمعی است که وجه‌های آن زیرگرافهای کامل یک گراف‌اند. پیداکردن f-بردار این مجتمع کاربردهای مهمی در ترکیبیات دارد و می‌توان آن را از طریق ایده‌آل ناوجه آن (که ارتباط بسیار روشنی با مجتمع مجموعه‌های مستقل گراف مکمل آن دارد) به‌دست آورد.

منابعی برای مطالعه بیشتر

موضوعات مورد بحث در این حوزه به اندازه‌ای رشد یافته‌اند که بتوان آنها را تدوین کرد و به‌صورت کتاب درآورد. ولی چون این موضوعات هنوز به‌صورت یک برنامهٔ مصوب درسی در تمامی دوره‌های درسی دانشگاههای ایران ارائه نمی‌شود و چون مباحث این حوزه از جمله موضوعات داغ تحقیقاتی روز است، در زیر برخی کتابهای موجود در این زمینه را که به‌صورتی نظام‌مند مطالب و پیشنیازهای لازم برای فراگیری موضوع و آغاز تحقیق روی آنها را در بردارند، معرفی می‌کنیم.

۱. درس‌نامهٔ هیبی [۱۳]، مرجع خوبی برای آشنایی با مفاهیم جبری و ترکیبیاتی مورد نیاز برای فراگیری مقدمات این حوزه است. این درس‌نامه با هدف ارائهٔ برخی موضوعات ترکیبیات شمارشی که در ارتباط با جبر جابه‌جایی هستند، تهیه شده و مخاطبان آن دانشجویان سال آخر دورهٔ کارشناسی هستند.

۲. کتاب استنلی [۲۷]، اولین مرجع منسجم دربارهٔ ارتباط جبر جابه‌جایی و ترکیبیات و در بردارندهٔ مفاهیم، قضایا، و مسائل اصلی و رویکردهای اصیل به مسائل این حوزه است. این کتاب به دلیل اهمیتش نزد محققان به «کتاب سبز» معروف شده است. این مرجع علی‌رغم گذشت ۳۰ سال از اولین چاپ آن هنوز مورد استفادهٔ بسیاری از محققان این رشته است و سرشار از ایده‌های عمیق و بدیع دربارهٔ اشیای مورد مطالعه می‌باشد. برای شروع تحقیق در حوزهٔ جبر جابه‌جایی ترکیبیاتی، دانستن مطالب فصلهای صفر، دو، و سهٔ این کتاب ضروری است.

۳. کتاب برونز و هرتسوگ [۳]، یکی از کامل‌ترین مراجع در جبر جابه‌جایی و برای تحقیق در این زمینه از مراجع اصلی است. فصلهای ۵، ۶، و ۷ این کتاب به موضوعات اصلی جبر جابه‌جایی ترکیبیاتی، یعنی حلقه‌های استنلی-رایزنر، حلقه‌های نیم‌گروه و حلقه‌های دترمینانی اختصاص دارد. فصلهای ۱، ۲، ۳، و ۴ کتاب نیز به موضوعات و مفاهیم اصلی جبر جابه‌جایی پرداخته است و دسترسی خواننده به مطالب مورد نیاز برای مطالعهٔ فصلهای ۵، ۶، و ۷ را بسیار سریع و آسان کرده است. فصل ۵ این کتاب شرح ساده شده و مبسوط [۱۵] است. مطالعهٔ این کتاب برای دانشجویان کارشناسی ارشد و به‌خصوص دانشجویان دکتری جبر جابه‌جایی قویاً توصیه می‌شود.

۴. کتاب میلر و اشتورم‌فلس [۲۰]، حاوی مطالب بسیار متنوعی دربارهٔ موضوعات اصلی و پایه‌ای این حوزه و موضوعات مرتبط با آن است. تنوع مطالب مورد بحث آن بسیار بیشتر از کتاب [۳] است و می‌تواند کتاب مناسبی برای تدریس در دورهٔ کارشناسی ارشد و یا دکتری باشد. فراگرفتن موضوعات این کتاب، بدون تلاش برای حل مسائل آن، تقریباً ناممکن است. با مطالعهٔ این کتاب، خواننده، می‌تواند در جریان موضوعات تحقیقاتی جاری این حوزه قرار گیرد.

۵. کتاب هرتسوک و هیبی [۱۱]، به‌تازگی برای چاپ و انتشار به شرکت اشپرینگر-فرلاگ تحویل شده است و طیف گسترده‌ای از مطالب مورد نظر در جبر جابه‌جایی ترکیبیاتی را در بردارد و آخرین نتایج به‌دست آمده در این زمینه را در سطح یک کتاب درسی پیشرفتهٔ دورهٔ تحصیلات تکمیلی عرضه می‌کند. با توجه به اِشراف نویسندگان آن به موضوع گمان می‌رود یکی از کتابهای بی‌بدیل در این شاخه باشد.

پایان سخن

اینجانب در سال ۱۳۸۵ فرصت مطالعاتی خود را در دانشگاه اِسِن[1] گذراندم و در مدت اقامت خود در این دانشگاه مبحث ترکیبیات جبری را از یورگن هرتسوگ فراگرفتم (ر.ک. [۱۲]). پس از مراجعت، در چند سال اخیر به کمک عده‌ای از محققان کشور و دانشجویان دکتری، شاخهٔ مذکور را در کشور معرفی کرده و در ترویج آن کوشیده‌ایم و خوشبختانه موفقیتهایی هم در این زمینه به‌دست آمده است (ر.ک. [۲۵]). همچنین می‌توان به مقالات [۹]، [۲۱]، [۱۰]، [۱۷] که اخیراً منتشر شده‌اند، به‌عنوان حاصل این تلاشها، اشاره کرد.

در سال ۱۳۸۸، به‌منظور معرفی بیشتر این رشته و معرفی موضوعات و مسائل اصلی آن، اولین سمینار یک‌روزه با عنوان جبر جابه‌جایی ترکیبیاتی، در پژوهشگاه دانشهای بنیادی با حضور عده‌ای از محققان و دانشجویان کشور و همچنین با حضور نائوکی تِرای[2]، یکی از متخصصان بین‌المللی این شاخه، برگزار گردید. امیدواریم در آیندهٔ نزدیک سطح تحقیقات محققان کشور در این حوزه به‌اندازه‌ای پیشرفت کند که آنها نیز در ردهٔ متخصصان تراز اول این رشته قرار گیرند.

سپاسگزاری

از آقایان دکتر رحیم زارع نهندی و دکتر محمدرضا پورنکی و همچنین آقایان سیدفخاری و گودرزی که متن اولیهٔ این مقاله را به دقت مطالعه کردند و با نظرهای سازنده‌شان به ارتقای کیفیت آن کمک کردند، سپاسگزارم.

مراجع

1. M. Atyiah, Polyhedra in physics, chemistry and geometry, *Milan J. math.* **71** (2003) 33-58, Birkhäuer Verlag Basel/Switzerland.

2. H. Bruggesser and P. Mani, "Shellable decomposition of cells and spheres", *Math. Scand.* **29** (1971), 197-205.

3. W. Bruns and J. Herzog, *Cohen Macaulay rings, revised ed.*, Cambridge University Press, Cambridge, 1996.

1. Essen 2. Naoki Terai

4. A. Capani, G. Niesi, L. Robbiano, "CoCoA: a system for doing computation in commutative algebra", available at `http://cocoa.dima.unige.it`

5. D. R. Grayson, and M. Stillman, "Macaulay 2 a software system for research in algebraic geometry", available at `http://www.math.unic.edu/ Macaulay2.`

6. G. M. Gruel, G. Pfister, H. Schönemann, "A computer algebra system for polynomial computations", available at `http://singular.uni-kl.de.`

7. B. Grünbaum, *Convex Polytopes*, revised ed., Graduate Texts in Math., Springer-Verlag, New York, 2003.

8. G. Grünbaum and V. P. Sreedharan, "An enumeration of simplicial 4-polytopes with 8 vertices", *J. Combinatinatorial Theory*, **2** (1967), 437-465.

9. H. Haghighi, S. Yassemi, and R. Zaare Nahandi, "Bipatite S_2 graphs are Cohen-Macaulay", *Bull. Math. Soc. Sc. Math., Roumanie*, 53 (**101**), No. 2, 2010, 125-132.

10. H. Haghighi, N. Terai, S. Yassemi, and R. Zaare Nahandi, "Sequentially S_2 simplicial complexes and sequentially S_2 graphs", to appear in *Proc. Amer. Math. Soc.*

11. J. Herzog, and T. Hibi, *Monomials*, to appear by Springer-Verlag, New York, (2010).

12. J. Herzog, A. Soleyman Jahan and S. Yassemi, "Stanley decompositions and partitionable simplicial complexes", *J. Algebraic Combin.*, (1) **27** (2008) 113-125.

13. T. Hibi, *Algebraic Combinatorics an Convex Polytopes*, Carslaw Publications, Australia (1992).

14. M. Hochster, "Rings of Invariants of tori, Cohen-Macaulay generated by monomials and polytopes", *Ann. Math.* **96** (1972) 318-337.

15. M. Hochster, "Cohen-Macaulay rings, combinatorics, and simplicial complexes" In B. R. MacDonald and R. A. Morris (eds.) *Ring Theory II. Lect. Notes in Pure and Appl. Math.* **26**, M. Dekker, (1977), 171-223.

16. G. Kalai, "Many triangulated spheres", *Discrete Comp. Geom.* **6** (1988) 1-14.

17. M. Mahmoudi, A. Mousivand, M. Crupi, G. Rinaldo, N. Terai, and S. Yassemi, "Vertex decomposibility and regularity of very well-covered graphs", submitted.

18. P. McMullen, "The numbers of faces of simplicial polytopes", *Isr. J. Math.*, **9** (1971), 559-570.

19. P. McMullen, and G. C. Shepaed, *Convex Polytopes and Upper Bound Conjecture*, Cambridge University Press, Cambridge, England, 1971.

20. E. Miller and B. Sturmfels, *Combinatorial Commutative Algebra*, Graduate Texs in Math., Springer-Verlag, New York, (2005).

21. F. Mohammadi, D. Kiani, and S. Yassemi, "Shellable cactus graphs", *Math Scand.* **106** (2010) 161-167.

22. T. S. Motzkin, "Comonotone curves and polyhedra", *Bull. Amer. Math. Soc.* **63** (1957) 36-37.

23. I. Novik, "Upper bound theorems for homology manifolds", *Isr. J. Math.*, **108** (1998) 45-82.

24. I. Novik, "Remarks on the upper bound theorem", *Combinatorial Theory*, Series **A 104** (2003), 201-206.

25. M. R. Pournaki, S. A. Seyed Fakhari, M. Tousi, and S. Yassemi, "What is Stanley depth", *Notices of AMS*, (9) **56** (2009).

26. R. Stanley, "The upper bound conjecture and Cohen-Macaulay rings", *Studies in Applied Math.*, (June 1975).

27. R. Stanley, *Combinatorics and Commutative Algebra*, Brikhäuser, second edition, (1996).

28. R. Stanley, "Generalized H-vectors, intersection cohomology of toric varieties, and related results", *Advanced Studies in Pure Math, Commutative Algebra and Combinatorics*, **11** (1987), 187-213.

29. B. Sturmfels, "Gröbner bases and convex polytopes", *Amer. Math. Soc.*, (1996).

30. M. P. Schützenberger, *A characteristic property of certain polynomials of E. F. Moore and C. E. Shannon*, in RLE quarterly progress report no. 55, pages 117-131. Research Lab. of Electronics, MIT, 1959.

31. W. Vasconcelos, *Computational Methods in Commutative Algebra and Algebraic Geometry*, Algorithms and Computation in Mathematics Vol. 2, Springer-Verlag, Berlin, 1998.

32. R. Villarreal, *Monomial Algebra*, Marcel Dekker (2001).

33. K. Yanagawa, "Alexnader duality for Stanley-Reisner rings and squarefree $\mathbb{N}^n$-graded modules", *J. of Algebra*, **225**, (2000), 630-645.

34. G. M. Ziegler, *Lectures on Polytopes*, Volume 152, Graduate Texts in Math., Springer-Verlag, New York, revised ed. (1998).

* * * * * *

• این مقاله متن بسط‌یافتهٔ سخنرانی نویسنده در دومین کنفرانس ترکیبیات جبری است که در اردیبهشت ۱۳۸۹ در مشهد برگزار شد.

* سیامک یاسمی، پژوهشگاه دانشهای بنیادی و دانشکدهٔ ریاضی، آمار، و علوم کامپیوتر دانشگاه تهران

`yassemi@ipm.ir`