مقالهٔ کلاسیک

ملاحظاتِ معناشناختی در منطقِ وجهی

سول کریپکی

این مقاله شرحی از بعضی ویژگی‌های نظریه‌های معناشناختیِ منطق‌های وجهی به‌دست می‌دهد [۱]. در موردِ یک توسیعِ خاصِ S5، این نظریه در «یک قضیهٔ تمامیت در منطقِ وجهی» [۲]. عرضه شده است و در «تحلیلِ معناییِ منطقِ وجهی» [۳] خلاصه شده است. مقالهٔ حاضر به یک جنبهٔ این نظریه ــ معرفیِ سورها ــ می‌پردازد و خود را عمدتاً به یک روشِ حصولِ این هدفْ محدود می‌کند. این مقاله صرفاً معناشناختی است، و لذا کاربردِ تابلوهای معنایی را، که برای عرضهٔ کاملِ نظریه ضروری است، نادیده می‌گیرد [۴]. نیز، اثبات‌ها عمداً کنار گذاشته خواهد شد.

چهار نظامِ وجهی را بررسی می‌کنیم. فرمول‌های A، B، C، ... از فرمول‌های اتمیِ P، Q، R، ... با استفاده از ادات‌های $\wedge$، $\sim$، و $\Box$ ساخته می‌شوند. نظامِ M این قاعده‌ها و قالب‌های اصولِ موضوع را دارد:

A0. همان‌گویی‌های قدرِ صدقی[1]

A1. $\Box A \supset A$

A2. $\Box(A \supset B) \supset .\Box A \supset \Box B$

R1. $A, A \supset B/B$

R2. $A/\Box A$

اگر این قالبِ اصولِ موضوع را اضافه کنیم، S4 را به‌دست می‌آوریم:

$$\Box A \supset \Box\Box A$$

نظامِ براؤری[1] را به‌دست می‌آوریم اگر به M اضافه کنیم:

$$A \supset \Box\Diamond A$$

S5 را، اگر اضافه کنیم:

$$\Diamond A \supset \Box\Diamond A$$

نظام‌های وجهی‌ای که قضایاشان تحتِ قاعده‌های R1 و R2 بسته‌اند، و شاملِ همهٔ قضایای Mاند، «نرمال» نامیده می‌شوند. اگرچه ما نظریه‌ای پرورانده‌ایم که بر نظام‌های غیرنرمالی چون S2 و S3ی لوئیس هم قابلِ اِعمال‌اند، در اینجا توجه‌مان را به نظام‌های نرمال محدود می‌کنیم.

برای به‌دست آوردنِ معناشناسی‌ای برای منطقِ وجهی، مفهومِ ساختارِ مُدلی (ی نرمال) را معرفی می‌کنیم. هر ساختارِ مدلی (س. م.) سه‌تاییِ مرتبِ $(\mathbf{G}, \mathbf{K}, R)$ای است که در آن $\mathbf{K}$ یک مجموعه است، R رابطه‌ای بازتابی روی $\mathbf{K}$ است، و $\mathbf{G}\epsilon\mathbf{K}$. شهوداً به موضوع به این صورت نگاه می‌کنیم: $\mathbf{K}$ مجموعهٔ همهٔ «جهان‌های ممکن» است؛ $\mathbf{G}$ «جهانِ واقع» است. اگر $\mathbf{H}_1$

1. truth-functional tautologies

1. *Brouwersche*

عصرِ جدیدِ بررسی‌های ریاضی‌ـمنطقیِ موجهات از سالِ ۱۹۵۹ با انتشارِ قضیه‌های تمامیتِ کریپکی آغاز شد. مقالهٔ حاضر که در آثارگانِ فلسفی و منطقی بسیار به آن ارجاع می‌شود در ۱۹۶۳ منتشر شده است و بحثی توصیفی در بعضی موضوعاتِ منطق‌های وجهی است. ترجمه بر پایهٔ این متن است:

Saul A. Kripke, "Semantical considerations on modal logic", Leonard Linsky, ed., *Reference and Modality*, Oxford University Press, 1971 (reprinted 1979), pp. 63-72, 172.

از میانِ پژوهشهای کریپکی در سایرِ مباحثِ منطق ریاضی شاید کارهای او در مجموعه‌های پذیرفتنی و نظامِ معروف به «کریپکی‌ـپلاتک» (KP) از بقیه مشهورتر باشد.

کریپکی امریکایی و متولدِ ۱۹۴۰ است، و سی سالی است (از زمانِ چاپِ اولِ نام‌گذاری و ضرورت، ۱۹۷۲) که از تأثیرگذارترین فیلسوفانِ تحلیلی‌مشرب قلمداد می‌شود. هر چند او از ۱۹۸۲ عملاً چیزی منتشر نکرده است، افسانه‌ها حاکی از آن است که آثارِ زیادی تولید کرده است.

و $\mathbf{H}_2$ دو جهان باشند، $\mathbf{H}_1 R \mathbf{H}_2$ شهوداً یعنی اینکه $\mathbf{H}_2$ «نسبت به» $\mathbf{H}_1$ «ممکن» است؛ یعنی اینکه هرگزارهٔ درست در $\mathbf{H}_2$ در $\mathbf{H}_1$ ممکن است. در این صورت، به‌وضوح، رابطهٔ R مسلماً باید بازتابی باشد؛ هر جهانِ $\mathbf{H}$ نسبت به خودش ممکن است، چون هر گزارهٔ درست در $\mathbf{H}$ بطریقِ اولیٰ در $\mathbf{H}$ ممکن است. بازتابی بودن بدین‌گونه شهوداً قیدی طبیعی است. می‌توانیم، متناظر با «اصولِ موضوعِ تحویلی»[1]ی گوناگونِ منطقِ وجهی، قیدهای بیشتری وضع کنیم: اگر R متعدی باشد، $(\mathbf{G}, \mathbf{K}, R)$ را یک S4ـس.م. می‌گوییم؛ اگر R متقارن باشد، $(\mathbf{G}, \mathbf{K}, R)$ یک س.م.ی براؤری است؛ و اگر R رابطه‌ای هم‌ارزی باشد، $(\mathbf{G}, \mathbf{K}, R)$ را یک S5ـس.م. می‌گوییم. ساختارِ مدلیِ بدونِ محدودیت یک Mـساختارِ مدلی هم خوانده می‌شود.

برای تکمیلِ این تصویر، مفهومِ مدل را نیاز داریم. با مفروض بودنِ یک ساختارِ مدلیِ $(\mathbf{G}, \mathbf{K}, R)$، هر مدل به هر فرمولِ اتمی (متغیر گزاره‌ای)ی P یک ارزشِ صدقِ $\mathbf{T}$ یا $\mathbf{F}$ در هر جهانِ $\mathbf{H}\epsilon\mathbf{K}$ تخصیص می‌دهد. به‌طورِ صوری، هر مدلِ φ روی یک س.م.یِ $(\mathbf{G}, \mathbf{K}, R)$ یک تابع دوتاییِ $\varphi(P, \mathbf{H})$ است، که در آن P در فرمول‌های اتمی تغییر می‌کند و $\mathbf{H}$ در اعضای $\mathbf{K}$ تغییر می‌کند، که بُردش مجموعهٔ $\{\mathbf{T}, \mathbf{F}\}$ است. با مفروض بودنِ یک مدل، می‌توانیم تخصیص‌های ارزش‌های صدق به فرمول‌های غیراتمی را با استقراء تعریف کنیم. فرض کنید نقداً $\varphi(A, \mathbf{H})$ و $\varphi(B, \mathbf{H})$ به‌ازای همهٔ $\mathbf{H}\epsilon\mathbf{K}$ها تعریف شده باشد. در این صورت اگر $\varphi(A, \mathbf{H}) = \varphi(B, \mathbf{H}) = \mathbf{T}$، تعریف کنید $\varphi(A \wedge B, \mathbf{H}) = \mathbf{T}$؛ در غیر این صورت، $\varphi(A \wedge B, \mathbf{H}) = \mathbf{F}$. $\varphi(\sim A, \mathbf{H})$، $\mathbf{F}$ تعریف می‌شود اگر و تنها اگر $\varphi(A, \mathbf{H}) = \mathbf{T}$؛ در غیرِ این صورت، $\varphi(\sim A, \mathbf{H}) = \mathbf{T}$. نهایتاً، تعریف می‌کنیم $\varphi(\Box A, \mathbf{H}) = \mathbf{T}$ اگر و تنها اگر به‌ازای هر $\mathbf{H}'\epsilon\mathbf{K}$ که $\mathbf{H}R\mathbf{H}'$، $\varphi(A, \mathbf{H}') = \mathbf{T}$؛ در غیرِ این صورت، $\varphi(\Box A, \mathbf{H}) = \mathbf{F}$. شهوداً، این می‌گوید که A در $\mathbf{H}$ ضروری است اگر و تنها اگر A در همهٔ جهان‌های $\mathbf{H}'$ـِ نسبت به $\mathbf{H}$ ممکنْ درست باشد.

قضیهٔ تمامیت، در M (S4، S5، نظامِ براؤری) $\vdash A$ اگر و تنها اگر به‌ازای هر مدلِ φ روی هر Mـ(S4ـ، S5، براؤری‌ـ) ساختارِ مدلیِ $(\mathbf{G}, \mathbf{K}, R)$، $\varphi(A, \mathbf{G}) = \mathbf{T}$ [5].

این قضیهٔ تمامیتْ مفهومِ نحویِ اثبات‌پذیری در نظام‌های وجهی را با یک مفهومِ معناشناختیِ اعتبار معادل می‌کند.

بقیهٔ این مقاله، به استثنای برخی مطالبِ پایانی، به معرفیِ سورها می‌پردازد. برای این کار، باید به هر جهانْ یک حوزهٔ افرادْ مربوط کنیم ــ افرادی که در آن جهان وجود دارند. به‌طورِ صوری، ساختارِ مدلیِ سوری (س.م.س.) را به‌صورتِ یک ساختارِ مدلیِ $(\mathrm{baG}, \mathbf{K}, R)$ تعریف می‌کنیم، همراه با یک تابع ψ که به هر $\mathbf{H}\epsilon\mathbf{K}$ یک مجموعهٔ $\psi(\mathbf{H})$ تخصیص می‌دهد، که حوزه‌ی $\mathbf{H}$ خوانده می‌شود. شهوداً $\psi(\mathbf{H})$ مجموعهٔ همهٔ افرادِ موجود در $\mathbf{H}$ است. توجه کنید که، البته، $\psi(\mathbf{H})$ لازم نیست به ازای مقادیرِ مختلفِ $\mathbf{H}$ مجموعهٔ واحدی باشد، درست همان‌طور که، شهوداً، در جهان‌های دیگری غیر از جهانِ واقعی، بعضی افرادِ واقعاً موجودْ ممکن است غایب باشند در حالی که افرادِ جدیدی، مثلِ پگاسوس[2]، ظاهر شوند.

پس به نمادهای منطقِ وجهیْ یک فهرستِ نامتناهیِ x، y، z، ... از متغیرهای فردی اضافه می‌کنیم، و، به‌ازای هر عددِ صحیحِ نامنفیِ n، فهرستی از حرف‌های محمولیِ nموضعیِ P^n، Q^n، ...، که بالانویس‌ها گاهی از سیاقِ متنْ فهمیده می‌شوند. متغیرهای گزاره‌ای (فرمول‌های اتمی) را حرف‌های محمولیِ «۰ موضعی» به‌شمار می‌آوریم. سپس فرمول‌های خوش‌ساخت را به روشِ معمول می‌سازیم، و اکنون می‌توانیم خودمان را برای تعریفِ مدلِ سوری آماده کنیم.

برای تعریفِ مدلِ سوری، باید مفهوم اولیه را، که به هر فرمولِ اتمی در هر جهانْ ارزشِ صدقی نسبت می‌داد، گسترش دهیم. به‌طریقِ مشابه، باید فرض کنیم که در هر جهانْ هر حرفِ محمولیِ nموضعیْ مجموعهٔ خاصی از nتایی‌ها ــ مصداق‌اش در آن جهان ــ را معین می‌کند. مثلاً موردِ یک حرفِ محمولیِ تک‌موضعیِ $P(x)$ را در نظر بگیرید. دوست داریم بگوییم که، در جهانِ $\mathbf{H}$، محمولِ $P(x)$ در موردِ بعضی از افراد در $\psi(\mathbf{H})$ درست و در موردِ بقیه غلط است؛ به‌طورِ صوری، می‌گوییم که، نسبت به بعضی تخصیص‌های اعضای $\psi(\mathbf{H})$ به x، $\varphi(P(x), \mathbf{H}) = \mathbf{T}$ و نسبت به بقیه $\varphi(P(x), \mathbf{H}) = \mathbf{F}$. مجموعهٔ همهٔ افرادی که P در موردِ آنها درست است مصداقِ P در $\mathbf{H}$ نامیده می‌شوند. اما مسأله‌ای وجود دارد: آیا وقتی به x مقداری در حوزهٔ یک جهانِ دیگرِ $\mathbf{H}'$ و نه در حوزهٔ $\mathbf{H}$ تخصیص داده می‌شود باید به $\varphi(P(x), \mathbf{H})$ ارزشِ صدقی داده شود؟ شهوداً، فرض کنید $P(x)$ به معنای «x تاس است» باشد ــ آیا باید به نمونهٔ جایگزین‌شدهٔ «شرلوک هومز تاس است» ارزشِ صدقی تخصیص دهیم؟ هومز وجود ندارد، اما او در اوضاع و احوالِ دیگری وجود می‌داشت. آیا باید به این حکم که او تاس است ارزشِ صدقِ معینی تخصیص دهیم، یا نه؟ فرگه [6] و ستراؤسن [7] به این حکمْ ارزشِ صدقی تخصیص نخواهند داد؛ راسل خواهد داد [8]. برای اهدافِ منطقِ وجهی ما بر آن‌ایم که پاسخ‌های متفاوت به این پرسشْ نمایانگرِ قراردادهای مختلفی هستند. همگی قابلِ دفاع‌اند. تنها بحث‌های موجودی در موردِ این مسأله که من دیده‌ام ــ مالِ هینتیکا [9] و پرایر [10] ــ نظرِ فرگه‌ـستراؤسن را برمی‌گزینند. این نظر ضرورتاً باید به تغییراتی در منطقِ وجهیِ معمول منجر شود. علت‌اش این است که معناشناسیِ منطقِ گزاره‌ایِ وجهی، که قبلاً به‌دست داده‌ایم، این را مفروض می‌گرفت که هر فرمول باید درهر جهانْ ارزشِ صدقی اختیارکند؛ و حالا، به‌ازای هر فرمولِ $A(x)$ شاملِ یک متغیرِ آزادِ x، نظرِ فرگه‌ـستراؤسن الزام می‌کند که در یک جهانِ $\mathbf{H}$، وقتی به متغیرِ x فردی تخصیص داده می‌شود که در حوزهٔ آن جهان نیست، به فرمول ارزشِ صدقی داده نشود. بدین ترتیب دیگر نمی‌توانیم انتظار داشته باشیم که قوانینِ اولیهٔ منطقِ گزاره‌ایِ وجهی در موردِ احکامِ شاملِ متغیرهای آزاد برقرار باشند، و با گزینشی روبه‌رو می‌شویم: یا در منطقِ گزاره‌ایِ وجهی بازنگری کنیم یا قاعدهٔ جایگزینی را محدود کنیم. پرایر اولی را انجام می‌دهد، هینتیکا دومی را. انتخابِ فرگه‌ـستراؤسن متضمنِ شقوقِ دیگری هم هست: آیا باید $\Box A$ را (در $\mathbf{H}$) به این معنا بگیریم که A در همهٔ جهان‌های ممکن (نسبت به $\mathbf{H}$) درست است، یا فقط در هر چنین جهانی غلط نیست؟ شقِّ دوم صرفاً می‌خواهد که در هر جهانی A یا درست باشد یا فاقدِ ارزشِ صدق باشد. پرایر، در نظامِ Qاش، در عمل هر دو نوعِ ضرورت را می‌پذیرد،

1. reduction axioms

۲. Pegasus؛ اسبِ بال‌دار.ـم.

یکی با عنوانِ 'L' و دیگری با عنوانِ 'NMN'. پرسشِ مشابهی در موردِ عطف مطرح می‌شود: اگر A غلط باشد و B ارزشِ صدقی نداشته باشد، آیا $A \wedge B$ را باید غلط بگیریم یا بی ارزشِ صدق؟

در گزارشِ کاملی از این نظریهٔ معناشناختی، می‌توانستیم همهٔ این گونه‌های نظر فرگه‌ـستراؤسن را بررسی کنیم. در اینجا راهِ دیگر را اختیار می‌کنیم، و فرض می‌کنیم که هر حکمی که شامل متغیرهای آزاد باشد در هر جهانی به‌ازای هر تخصیصی به متغیرهای آزادش ارزشِ صدقی دارد [۱۱]. به‌طورِ صوری، مطلب را به این صورت بیان می‌کنیم: قرار دهید $\mathrm{U} = \bigcup_{\mathbf{H}\epsilon\mathbf{K}} \psi(\mathbf{H})$. U^n، nاُمین حاصل‌ضربِ دکارتیِ U با خودش است. هر مدلِ سوری روی یک س.م.س.ی $(\mathbf{G},\mathbf{K},R)$ را به‌صورتِ یک تابع دوتاییِ $\gamma(P^n,\mathbf{H})$ تعریف می‌کنیم، که در آن متغیر اول در حروفِ محمولیِ nتایی، به ازای nهای دلخواه، تغییر می‌کند، و $\mathbf{H}$ در اعضای $\mathbf{K}$ تغییر می‌کند. اگر $n = 0$، $\varphi(P^n,\mathbf{H})$ مساویِ $\mathbf{T}$ یا $\mathbf{F}$ است؛ اگر $n \geq 1$، $\varphi(P^n,\mathbf{H})$ زیرمجموعه‌ای از U^n است. اکنون، به‌صورتِ استقرائی، به ازای هر فرمولِ A و $\mathbf{H}\epsilon\mathbf{K}$، یک ارزشِ صدق، $\varphi(A,\mathbf{H})$، نسبت به تخصیصِ داده‌شده‌ای از اعضای U به متغیرهای آزادِ A تعریف می‌کنیم. موردِ متغیر گزاره‌ای واضح است. به‌ازای هر فرمولِ اتمیِ $P^n(x_1,\ldots,x_n)$، که P^n یک حرفِ محمولیِ nموضعی است و $n \geq 1$، با مفروض بودنِ تخصیصی از اعضای a_1، ...، a_n از U به x_1، ...، x_n، تعریف می‌کنیم $\varphi(P^n(x_1,\ldots,x_n),\mathbf{H}) = \mathbf{T}$ اگر nتاییِ $(a_1,\ldots,a_n)$ عضوی از $\varphi(P^n,\mathbf{H})$ باشد؛ در غیر این صورت، نسبت به تخصیصِ مفروض، $\varphi(P^n(x_1,\ldots,x_n),\mathbf{H}) = \mathbf{F}$. با داده شدنِ این تخصیص‌ها برای فرمول‌های اتمی، می‌توانیم با استقراء تخصیص‌ها را برای فرمول‌های پیچیده بسازیم. گام‌های استقراء برای اداتِ‌های گزاره‌ایِ $\wedge$، $\sim$، $\Box$ قبلاً داده شده‌اند. فرض کنید یک فرمولِ $A(x,y_1,\ldots,y_n)$ داریم، که x و y_iها تنها متغیرهای آزادِ حاضرند، و یک ارزشِ صدقِ $\varphi(A(x,y_1,\ldots,y_n),\mathbf{H})$ به ازای هر تخصیصی به متغیرهای آزادِ $A(x,y_1,\ldots,y_n)$ تعریف شده است. در این صورت $\varphi((x)A(x,y_1,\ldots,y_n),\mathbf{H})$ را نسبت به تخصیصِ b_1، ...، b_n به y_1، ...، y_n (که b_iها اعضای Uاند) $\mathbf{T}$ تعریف می‌کنیم، اگر به ازای هر تخصیصِ a، b_1، ...، b_n به‌ترتیب به x، y_1، ...، y_n، که $a\epsilon\psi(\mathbf{H})$، $\varphi(A(x,y_1,\ldots,y_n),\mathbf{H}) = \mathbf{T}$؛ در غیر این صورت $\varphi((x)A(x,y_1,\ldots,y_n),\mathbf{H})$ را نسبت به تخصیصِ داده‌شده $\mathbf{F}$ تعریف می‌کنیم. توجه کنید که قیدِ $a\epsilon\psi(\mathbf{H})$ یعنی که، در $\mathbf{H}$، فقط روی اشیاء واقعاً موجود در $\mathbf{H}$ سور می‌گذاریم.

برای توضیحِ این معناشناسی، مثال‌های نظریهٔ نقضی به‌دست می‌دهیم برای دو پیشنهادِ آشنا برای قوانینِ تسویر وجهی ــ «فرمولِ بارکان[1]» $(x)\Box A(x) \supset \Box(x)A(x)$ و معکوس‌اش $\Box(x)A(x) \supset (x)\Box A(x)$. برای هر کدام یک ساختارِ مدلیِ $(\mathbf{G},\mathbf{K},R)$ در نظر می‌گیریم، که $\mathbf{K} = \{\mathbf{G},\mathbf{H}\}$، $\mathbf{G} \neq \mathbf{H}$، و R همان حاصل‌ضربِ دکارتیِ $\mathbf{K}^2$ است. به‌وضوح R انعکاسی، متعدی، و متقارن است، پس ملاحظاتِ ما حتی در S5 هم موضوعیت دارد.

برای فرمولِ بارکان، $(\mathbf{G},\mathbf{K},R)$ را با تعریفِ $\psi(\mathbf{G}) = \{a\}$ و $\psi(\mathbf{H}) = \{a,b\}$، که a و b متمایزند، به یک ساختارِ مدلیِ سوری گسترش می‌دهیم. بعد، به ازای یک حرفِ محمولیِ تک‌موضعیِ P، یک مدلِ φ تعریف می‌کنیم که در آن $\varphi(P,\mathbf{G}) = \{a\}$، $\varphi(P,\mathbf{H}) = \{a\}$. در این صورت به‌وضوح وقتی a به x تخصیص داده شود $\Box P(x)$ درست است؛ و چون a تنها شیء در حوزهٔ $\mathbf{G}$ است، $(x)\Box P(x)$ هم چنین است. اما، $(x)P(x)$ به‌وضوح در $\mathbf{H}$ غلط است (چون وقتی b به x تخصیص داده شود $\varphi(P(x),\mathbf{H}) = \mathbf{F}$)، و لذا $\Box(x)P(x)$ در $\mathbf{G}$ غلط است. پس مثالِ نقضی برای فرمولِ بارکان داریم. توجه کنید که این مثالِ نقض کاملاً مستقل از این است که وقتی b به x تخصیص داده می‌شود به $P(x)$ در $\mathbf{G}$ ارزشِ صدقی تخصیص داده می‌شود یا نه، پس این مثال در نظام‌های هینتیکا و پرایر هم موضوعیت دارد. چنین مثال‌های نقضی را فقط در صورتی می‌توان مردود دانست، و فرمولِ بارکان را به مقامِ سابق بازگرداند، که ساختارهای مدلی این شرط را برآورند که هرگاه $\mathbf{H}R\mathbf{H}'$، $\mathbf{H},\mathbf{H}'\epsilon\mathbf{K}$، $\varphi(\mathbf{H}') \subseteq \psi(\mathbf{H})$.

برای معکوسِ فرمولِ بارکان، قرار دهید $\psi(\mathbf{G}) = \{a,b\}$، $\psi(\mathbf{H}) = \{a\}$، که باز هم $a \neq b$. تعریف کنید $\varphi(P,\mathbf{G}) = \{a,b\}$، $\varphi(P,\mathbf{H}) = \{a\}$، که P حرفِ محمولیِ تک‌موضعیِ داده‌شده‌ای است. در این صورت به‌وضوح $(x)P(x)$ در هر دوی $\mathbf{G}$ و $\mathbf{H}$ برقرار است، و لذا $\varphi(\Box(x)P(x),\mathbf{G}) = \mathbf{T}$. اما وقتی b به x تخصیص داده شود، $\varphi(P(x),\mathbf{H}) = \mathbf{F}$ و لذا، وقتی b به x تخصیص داده شود، $\varphi(\Box P(x),\mathbf{G}) = \mathbf{F}$. پس $\varphi((x)\Box P(x),\mathbf{G}) = \mathbf{F}$، و مثالِ نقضِ مطلوب‌مان برای معکوسِ فرمولِ بارکان را به‌دست آورده‌ایم. اما این مثالِ نقض متکی است به اینکه، در $\mathbf{H}$، وقتی b به x تخصیص داده شود $P(x)$ واقعاً غلط است؛ پس ممکن است این نتیجه از بین برود اگر، به‌ازای این تخصیص، $P(x)$ در $\mathbf{H}$ فاقدِ ارزشِ صدق اعلام می‌شد. در این وضعیت، هنوز هم مثالِ نقض‌مان را خواهیم داشت اگر الزام کنیم که حکمِ ضروری در همهٔ جهان‌های ممکنْ درست باشد ('L'ـِ پرایر)، و فقط الزام نکنیم که هرگز غلط نباشد ('NMN'ـِ پرایر). با قراردادِ فعلی‌مان، می‌توانیم این مثالِ نقض را با صِرفِ الزامِ این امر از دور خارج کنیم که، به‌ازای هر س.م.س.، $\psi(\mathbf{H}) \subseteq \psi(\mathbf{H}')$ هرگاه $\mathbf{H}R\mathbf{H}'$.

این مثال‌های نقض به مشکلِ خاصی منجر می‌شوند: در S5ـِ سوری، پادمَدل‌هایی هم برای فرمولِ بارکان و هم برای معکوس‌اش عرضه کرده‌ایم. اما به نظر می‌رسد که پرایر نشان داده باشد [۱۲] که فرمولِ بارکان در S5ـِ سوریْ استنتاج‌پذیر است؛ و به نظر می‌آید که معکوس حتی در Mـِ سوری هم با این استدلالْ استنتاج شود:

(A) $(x)A(x) \supset A(y)$ (طبقِ نظریهٔ تسویر)

(B) $\Box((x)A(x) \supset A(y))$ (طبقِ ضروری‌سازی)

(C) $\Box((x)A(x) \supset A(y)) \supset \Box(x)A(x) \supset \Box A(y)$ (اصلِ موضوعِ A2)

(D) $\Box(x)A(x) \supset \Box A(y)$ (از (B) و (C))

(E) $(y)(\Box(x)A(x) \supset \Box A(y))$ (تعمیم روی (D))

(F) $\Box(x)A(x) \supset (y)\Box A(y)$ (طبقِ نظریهٔ تسویر، و (E))

به نظر می‌رسد حکم را با استفاده از اصولی به‌دست آورده‌ایم که همگی باید در نظریهٔ مدل‌ها معتبر باشند. در واقع، خطا در اِعمالِ ضروری‌سازی

۱. منسوب به Ruth Barcan Marcus، منطقدانِ امریکایی‌ـم.

بر (A) نهفته است. در فرمولی مثلِ (A)، به متغیرهای آزاد تعبیرِ عمومیت می‌دهیم [۱۳]: وقتی (A) در مقامِ قضیه ادعا می‌شود، ادعای بستارِ عمومیِ معمولی‌اش، یعنی

$$(y)((x)A(x) \supset A(y)) \qquad (\mathrm{A}')$$

را خلاصه می‌کند. حالا اگر ضروری‌سازی را بر (A') اِعمال کنیم به‌دست خواهیم آورد

$$\Box(y)((x)A(x) \supset A(y)) \qquad (\mathrm{B}')$$

از طرفِ دیگر، خودِ (B) به‌صورتِ ادعای

$$(y)\Box((x)A(x) \supset A(y)) \qquad (\mathrm{B}'')$$

تعبیر می‌شود. برای به‌دست آوردنِ (B'') از (B')، نیاز به قانونی به شکلِ $(y)\Box C(y) \supset \Box(y)C(y)$ داریم، که درست معکوسِ فرمولِ بارکان است که داریم سعی می‌کنیم اثبات‌اش کنیم. در واقع، به‌سادگی بررسی می‌شود که اگر $A(x)$ را با $P(x)$ جایگزین کنیم (B'') در پادمدلی که در بالا برای معکوسِ فرمولِ بارکان دادیم نادرست می‌شود.

می‌توانیم از این نوع مشکل اجتناب کنیم اگر، به اقتفای کواین [۱۴]، نظریهٔ تسویر را چنان صورت‌بندی کنیم که فقط فرمول‌های بسته را بتوان ادعا کرد. ادعای فرمول‌های حاویِ متغیرهای آزاد در بهترین حالت برای سهولت است؛ ادعای $A(x)$ با متغیر آزاد x را می‌توان همواره با ادعای $(x)A(x)$ جایگزین کرد.

اگر A فرمولی حاویِ متغیرهای آزاد باشد، یک بستارِ A را هر فرمولِ بدونِ سوری تعریف می‌کنیم که با قراردادنِ سورهای عمومی و علامت‌های ضرورت، با هر ترتیبی، در جلوی A به‌دست می‌آید. بعد اصولِ موضوعِ Mـِ سوری را بستارهای این قالب‌های کلّیْ تعریف می‌کنیم:

(۰) همهٔ همان‌گویی‌های قدرِ صدقی

(۱) $\Box A \supset A$

(۲) $\Box(A \supset B). \supset .\Box A \supset \Box B$

(۳) $A \supset (x)A$، که x در A آزاد نیست

(۴) $(x)(A \supset B). \supset .(x)A \supset (x)B$

(۵) $(y)((x)A(x) \supset A(y))$

قاعدهٔ استنتاجْ تفکیک[1] [یا: وضعِ مقدم] برای استلزامِ مادّی است. ضروری‌سازی را می‌توان به‌صورتِ یک قاعدهٔ استخراج‌شده به‌دست آورد

برای به‌دست آوردنِ توسیع‌های سوریِ S4، S5، نظامِ براوُری، کافی است به این قالب‌های اصولِ موضوعْ همهٔ بستارهای اصلِ موضوعِ تحویلِ مناسب را اضافه کنید.

نظام‌هایی که به‌دست آورده‌ایم این خواص را دارند: توسیعِ سرراستی‌اند از منطق‌های گزاره‌ایِ وجهی، بدونِ جرح و تعدیلاتِ Qی پرایر؛ بر خلافِ نحوهٔ عرضهٔ هینتیکا، قاعدهٔ جایگزینیْ بدونِ محدودیت برقرار است؛ و با این حال نه فرمولِ بارکانْ استنتاج‌پذیر است نه معکوسِ آن. به‌علاوه، قوانینِ نظریهٔ تسویر ــ جرح و تعدیل‌شده برای پذیرشِ حوزهٔ تهی ــ برقرارند. قضیهٔ تمامیّتِ معناشناختی‌ای که برای منطقِ گزاره‌ایِ وجهی عرضه کردیم را می‌توان به این نظام‌های جدید گسترش داد.

در نظامِ فعلی اگر بخواهیم می‌توانیم وجود را در مقامِ یک محمول معرفی کنیم. به لحاظِ معناشناختی، وجودْ یک محمولِ تک‌موضعیِ $\mathbf{E}(x)$ است که، به ازای هر مدلِ φ روی هر س.م.ی $(\mathbf{G}, \mathbf{K}, R)$، در برابریِ $\varphi(\mathbf{E}, \mathbf{H}) = \psi(\mathbf{H})$ به ازای هر $\mathbf{H} \epsilon \mathbf{K}$ صدق می‌کند. به لحاظِ اصلِ موضوعی، می‌توانیم آن را با اصل گرفتنِ بستارهای فرمول‌های به شکلِ $(x)\mathbf{E}(x)$ و $(x)A(x) \wedge \mathbf{E}(y). \supset .A(y)$ معرفی کنیم. محمولِ Pیِ به‌کار رفته در بالا در مثالِ نقضِ معکوسِ فرمولِ بارکان را اکنون می‌توان به سادگی به‌صورتِ وجود باز شناخت. این امر نشان می‌دهد که وجود چه فرقی با محمولِ همان‌گویانهٔ $A(x) \vee \sim A(x)$ دارد اگرچه $\Box(x)\mathbf{E}(x)$ اثبات‌پذیر است. زیرا اگرچه $(x)\Box(A(x) \vee \sim A(x))$ معتبر است، $(x)\Box\mathbf{E}(x)$ نیست؛ اگرچه این ضروری است که هر چیزی وجود دارد، نتیجه نمی‌شود که هر چیزی خاصیتِ وجودِ ضروری را دارد.

می‌توانیم اینهمانی را به‌صورتِ معناشناختی در نظریهٔ مدل این‌طور معرفی کنیم که $x = y$ را در جهانِ $\mathbf{H}$ وقتی به x و y مقدارِ واحدی تخصیص داده شود درست و در غیر این‌صورت غلط تعریف کنیم؛ در این صورت وجود را می‌توان برحسبِ اینهمانی تعریف کرد، با مقرر کردنِ اینکه $\mathbf{E}(x)$ یعنی $(\exists y)(x = y)$. به دلایلی که در اینجا عرضه نمی‌شود، اگر مفهومِ ساختارِ مدلیِ سوری را پیچیده‌تر می‌کردیم می‌شد نظریهٔ این‌همانیِ وسیع‌تری به‌دست آورد.

با مطالبِ خلاصه و مجملی در موردِ تعبیرهای «اثبات‌پذیری»ی منطق‌های وجهی، که در هر مورد فقط برای حسابِ جمله‌ها عرضه می‌کنیم، بحث را ختم می‌کنیم. خواننده نکتهٔ اصلیِ این مقاله را درک کرده خواهد بود اگر این بخش را حذف کند. تعبیرهای اثبات‌پذیری مبتنی‌اند بر تمایل به الحاقِ یک عملگرِ ضرورت به نظامی صوری، مثلاً حسابِ پئانو، به شیوه‌ای که، به ازای هر فرمولِ A از این نظام، $\Box A$ درست تعبیر شود اگر و تنها اگر A در دستگاه اثبات‌پذیر باشد. استدلال شده است که چنین تعبیرهای «اثبات‌پذیری»‌ای برای عملگریِ وجهیْ لازم نیستند و می‌توانند با یک محمولِ اثبات‌پذیری، که بر عددِ گودلِ A حمل می‌شود، جایگزین شوند؛ اما مقالهٔ پروفسور مانتگیو در این مجلّد دست‌کم شکّی در موردِ این دیدگاه ایجاد می‌کند.

بگذارید نظامِ صوریِ $\mathbf{PA}$یِ حسابِ پئانو را، آنچنان که در کلینی [۱۵] صورت‌بندی شده، بررسی کنیم. به قواعدِ ساختْ عملگرهای $\wedge$، $\sim$، و $\Box$ را الحاق می‌کنیم (عاطف و ناقضِ الحاق‌شده متمایز از عاطف و ناقضِ نظامِ اولیه‌اند)، که فقط بر فرمول‌های بسته عمل می‌کنند. در نظریهٔ مدلی که در بالا عرضه کردیم، فرمول‌های اتمی را متغیرهای گزاره‌ای، یا حرف‌های محمولی‌ای گرفتیم که متغیرهای فردیِ در پرانتز قرار گرفته‌ای به دنبال‌شان می‌آیند؛ در اینجا فرمول‌های اتمی را صرفاً فرمول‌های خوش‌ساختِ بستهٔ $\mathbf{PA}$ (نه فقط فرمول‌های اتمیِ $\mathbf{PA}$) می‌گیریم. یک ساختِ مدلیِ $(\mathbf{G}, \mathbf{K}, R)$ تعریف می‌کنیم، که $\mathbf{K}$ مجموعهٔ همهٔ مدل‌های شمارای متمایزِ (غیریکریختِ) $\mathbf{PA}$ است، $\mathbf{G}$ مدلِ استانداردِ اعدادِ طبیعی است، و R حاصل‌ضربِ دکارتیِ $\mathbf{K}^2$ است. مدلِ φ را با الزامِ این تعریف می‌کنیم که، به ازای هر فرمولِ اتمیِ P و هر $\mathbf{H} \epsilon \mathbf{K}$، $\varphi(P, \mathbf{H})$ مساویِ $\mathbf{T}(\mathbf{F})$ است اگر و تنها اگر P در مدلِ $\mathbf{H}$ درست (غلط) باشد. (به یاد آورید که P فرمولِ درست‌ساختی از $\mathbf{PA}$، و $\mathbf{H}$ یک مدلِ شمارای $\mathbf{PA}$ است.) بعد ارزیابی برای فرمول‌های مرکب را مثلِ قبل می‌سازیم [۱۶]. گفتنِ اینکه A درست است گفتنِ این است که در جهانِ واقعِ $\mathbf{G}$ درست است؛ و، به ازای هر Pیِ اتمی، $\varphi(\Box P, \mathbf{G}) = \mathbf{T}$

1. detachment

اگر و تنها اگر P در $\mathbf{PA}$ اثبات‌پذیر باشد. (توجه کنید که $\varphi(P, \mathbf{G}) = \mathbf{T}$ اگر و تنها اگر P به مفهومِ شهودیْ درست باشد.) چون $(\mathbf{G}, \mathbf{K}, R)$ یک S5ـس.م. است، همهٔ قوانینِ S5 در این تعبیر معتبر خواهند بود؛ و می‌توانیم نشان دهیم که فقط قوانینِ S5 عموماً معتبر خواهند بود. (مثلاً اگر P فرمولِ تعیین‌ناپذیرِ گودل باشد، $\varphi(\Box P \vee \Box \sim P, \mathbf{G}) = \mathbf{F}$، که مثالِ نقضی برای این «قانون» است که $\Box A \vee \Box \sim A$.)

تعبیرِ اثبات‌پذیریِ دیگر این است: باز هم فرمول‌های اتمی را فرمول‌های درست‌ساختِ بستهٔ $\mathbf{PA}$ می‌گیریم، و بعد با استفاده از ادات‌های الحاقیِ $\wedge$، $\sim$، و $\Box$ فرمول‌های جدید می‌سازیم. $\mathbf{K}$ را مجموعهٔ همهٔ زوج‌های مرتبِ $(\mathbf{E}, \alpha)$ بگیرید، که $\mathbf{E}$ توسیعِ سازگاری از $\mathbf{PA}$ است، و α مدلی (شمارا) از نظامِ $\mathbf{E}$. قرار دهید $\mathbf{G} = (\mathbf{PA}, \alpha_0)$، که α_0 مدلِ استاندارِدِ $\mathbf{PA}$ است. می‌گوییم $(\mathbf{E}, \alpha) R (\mathbf{E}', \alpha')$، که در آن $(\mathbf{E}, \alpha)$ و $(\mathbf{E}', \alpha')$ در $\mathbf{K}$اند، اگر و تنها اگر $\mathbf{E}'$ توسیعی از $\mathbf{E}$ باشد. برای Pهای اتمی، $\varphi(P, (\mathbf{E}, \alpha))$ را $\mathbf{T}(\mathbf{F})$ تعریف کنید اگر و تنها اگر P در α درست (غلط) باشد. در این صورت می‌توانیم نشان دهیم که، به ازای Pهای اتمی، $\varphi(\Box P, (\mathbf{E}, \alpha)) = \mathbf{T}$ اگر و تنها اگر P در $\mathbf{E}$ اثبات‌پذیر باشد؛ به‌ویژه، $\varphi(\Box P, \mathbf{G}) = \mathbf{T}$ اگر و تنها اگر P در $\mathbf{PA}$ اثبات‌پذیر باشد. چون $(\mathbf{G}, \mathbf{K}, R)$ یک S4ـس.م. است، همهٔ قوانینِ S4 برقرارند. اما این‌طور نیست که همهٔ قوانینِ S5 برقرار باشند؛ اگر P فرمولِ تعیین‌ناپذیرِ گودل باشد، $\varphi((\sim \Box P \supset \Box \sim \Box P), \mathbf{G}) = \mathbf{F}$. اما بعضی قوانین معتبرند که در S4 اثبات‌پذیر نیستند؛ به‌ویژه، می‌توانیم اثبات کنیم که به ازای هر A، $\varphi(\Box \sim \Box(\Diamond A \wedge \Diamond \sim A), \mathbf{G}) = \mathbf{T}$، که قضایای S4.1ـِ مک‌کینسی را به‌دست می‌دهد [۱۶]. با جرح و تعدیلاتِ مناسب می‌توان این مشکل را برطرف کرد؛ اما ما در اینجا واردِ این مطلب نمی‌شویم.

می‌توان تعبیراتِ مشابهی برای M و نظامِ براؤری بیان کرد؛ اما، در نظرِ مؤلف، جذابیتِ اینها کمتر از آنهایی است که در بالا عرضه شد. یک ردهٔ دیگر از تعبیراتِ اثبات‌پذیری، توسیع‌های «انعکاسی»ی $\mathbf{PA}$، را ذکر می‌کنیم. فرض کنید $\mathbf{E}$ نظامی صوری باشد که شاملِ $\mathbf{PA}$ است، و فرمول‌های بسته‌اش از فرمول‌های بستهٔ $\mathbf{PA}$ با استفاده از ادات‌های $\&$، $\neg$، و $\Box$ ساخته شده‌اند. (می‌گویم '$\&$' و '$\neg$' تا مشخص کنم که دارم همان عاطف و ناقضِ خودِ $\mathbf{PA}$ را به‌کار می‌گیرم، نه اینکه عاطف و ناقضِ جدیدی معرفی کنم. یادداشتِ [۱۶] را ببینید.) در این صورت $\mathbf{E}$ یک توسیعِ انعکاسیِ $\mathbf{PA}$ خوانده می‌شود اگر و تنها اگر: (۱) توسیعی غیراساسی از $\mathbf{PA}$ باشد؛ (۲) $\Box A$ در $\mathbf{E}$ اثبات‌پذیر باشد اگر و تنها اگر A باشد؛ (۳) ارزیابیِ αای باشد که فرمول‌های بستهٔ $\mathbf{E}$ را به توی مجموعهٔ $\{\mathbf{T}, \mathbf{F}\}$ طوری بنگارد که عاطف و ناقض از جدول‌های صدقِ معمول تبعیت کنند، همهٔ فرمول‌های بستهٔ درستِ $\mathbf{PA}$ مقدارِ $\mathbf{T}$ بگیرند، $\alpha(\Box A) = \mathbf{T}$ اگر و تنها اگر A در $\mathbf{E}$ اثبات‌پذیر باشد، و همهٔ قضایای $\mathbf{E}$ مقدارِ $\mathbf{T}$ بگیرند. می‌توان نشان داد که توسیع‌های انعکاسی‌ای از $\mathbf{PA}$ هستند که شاملِ اصولِ موضوعِ S4 یا حتی S4.1اند، اما هیچ توسیعِ انعکاسی‌ای شاملِ S5 نیست.

سرانجام، می‌گوییم که، با استفاده از نگاشتِ معمولِ منطقِ شهودگرایانه به توی S4، می‌توانیم نظریهٔ مدلی برای حسابِ محمولاتِ شهودگرایانه به‌دست آوریم. این نظریهٔ مدل را در اینجا نمی‌آوریم، اما در عوض، فقط در موردِ حسابِ گزاره‌ها، تعبیرِ مفیدِ ویژه‌ای از منطقِ شهودگرایانه را ذکر می‌کنیم که از این نظریهٔ مدلْ حاصل می‌شود. فرض کنید $\mathbf{E}$ توسیعی سازگار از $\mathbf{PA}$ باشد. می‌گوییم یک فرمولِ Pی $\mathbf{PA}$ در $\mathbf{E}$ توجیه‌شده است اگر و تنها اگر در $\mathbf{E}$ اثبات‌پذیر باشد. فرمول‌های خوش‌ساختِ Pی $\mathbf{PA}$ را اتمی می‌گیریم، و فرمول‌ها را از روی آنها با استفاده از ادات‌های شهودگرایانهٔ $\wedge$، $\vee$، $\neg$، و $\supset$ می‌سازیم. بعد به‌طورِ استقرائی مقرر می‌کنیم: $A \wedge B$ در $\mathbf{E}$ توجیه‌شده است اگر و تنها اگر A و B باشند؛ $A \vee B$ در $\mathbf{E}$ توجیه‌شده است اگر و تنها اگر A یا B باشند؛ $\neg A$ در $\mathbf{E}$ توجیه‌شده است و اگر و تنها اگر هیچ توسیعِ سازگاری از $\mathbf{E}$ نباشد که A را توجیه کند؛ $A \supset B$ در $\mathbf{E}$ توجیه شده است اگر و تنها اگر هر توسیعِ $\mathbf{E}'$ از $\mathbf{E}$ که A را توجیه کند B را هم توجیه کند.

در این صورت همهٔ نمونه‌های هر قانونِ منطقِ شهودگرایانه در $\mathbf{PA}$ توجیه شده است؛ اما، مثلاً، $A \vee \neg A$ نیست، اگر A فرمولِ تعیین‌ناپذیرِ گودل باشد. در کارِ بعدی، این تعبیر را باز هم گسترش خواهیم داد، و با استفاده از آن نشان می‌دهیم که با استفاده از آن می‌توانیم تعبیری برای نظامِ FCی کرایزل برای دنباله‌های انتخابِ مطلقاً آزاد بیابیم [۱۷]. در ضمن، روشن است که در تعبیراتِ اثبات‌پذیریِ S4 و S5 می‌توان $\mathbf{PA}$ را با هر نظامِ قدرِ صدقی دیگری (یعنی با هر نظامی که مدل‌هایش هر فرمولِ بسته را به‌صورتِ درست یا غلط معلوم کنند) جایگزین کرد؛ اما این تعبیرِ شهودگرایی بر هر گونه نظامِ صوری‌ای قابلِ اِعمال است.

افزوده

من دیگر نمی‌توانم بنویسم «هومز وجود ندارد، اما ۱و در اوضاع و احوالِ دیگری وجود می‌داشت». دیگر به نظرم نمی‌آید که نام‌های تخیلی‌ای از قبیلِ «شرلوک هومز» هویّاتِ خاصِ ممکن‌ـولی‌ـناموجودی را نام‌گذاری کنند که در شرایطی وجود می‌داشتند. البته می‌شد شخصی در قرنِ نوزدهم وجود داشته باشد که ماجراجویی‌هایی از آن قبیل که در داستان‌های هومز توصیف شده را انجام داده باشد. هر شخصِ واقعیِ آن دوره (مثلاً داروین) ممکن بود چنان کرده باشد، گرچه بر آن‌ام که هیچ کسی نکرده است؛ یا، به صورتی دیگر، می‌شد شخص (یا اشخاصِ) دیگری، در $\psi(\mathbf{H})$ اما نه در $\psi(\mathbf{G})$، متولد شده باش(ن)د و اَعمالِ هومزواری داشته بوده باشند. اما حق نداریم هیچ چنین هویّتِ خاصی را «شرلوک هومز» بخوانیم. حکمِ «شرلوک هؤمز می‌شد وجود داشته باشد» اکنون به نظرِ من بیجا می‌آید.

این تغییر بر نظرِ من در موردِ وضعِ زبان‌شناختیِ نام‌های تخیلی در زبانِ معمولی اثر می‌گذارد ولی بر مطالبِ مدل‌نگریکِ داخلِ متن اثر نمی‌گذارد، یعنی: (۱) برخی هویّات که واقعاً وجود دارند می‌شد وجود نداشته باشند، و می‌شد هویّاتی باشند غیر از آنهایی که واقعاً وجود دارند، پس لازم نیست $\psi(\mathbf{H})$ به‌ازای همهٔ $\mathbf{H} \epsilon \mathbf{K}$ها ثابت باشد. (۲) با توجه به (۱)، اگر به متغیرِ 'x' یک هویّتِ a تخصیص داده شود، به‌نحوی که $a \in \psi(\mathbf{H}_2)$، $a \notin \psi(\mathbf{H}_2)$، آیا باید ــ نسبت به این تخصیص به x ــ به $\varphi(P(x), \mathbf{H}_2)$ ارزشی بدهیم؟ به‌کار گرفتنِ نام‌های تخیلی برای روشن ساختنِ این نکاتْ اتفاقی بود. واضح است که نمی‌توانم در موردِ این موضوعِ زبان‌شناختیْ تفصیل دهم، گرچه به برخی مسائلِ فلسفی در موردِ وضعِ «هویّاتِ ممکنِ محققْ‌نشده» مربوط است.

۱۱ ژانویهٔ ۱۹۷۱

یادداشتها

۱. نظریه‌ای که در اینجا داده شده است با نظریه‌های مؤلفانِ زیادی مرتبط است: برای فهرست‌هایی از اینها نگاه کنید به

S. Kripke, 'Semantical Analysis of Modal Logic', *Zeitschrift für Mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik*, 9 (1963), 67-96.

J. Hintikka, 'Modality and Quantification', *Theoria*, 27 (1961), 119-28.

مؤلفانی که به نظریهٔ حاضر نزدیک‌تر‌ین‌اند به نظر می‌رسد هینتیکا وکانگر [Kanger] باشند. با این حال، تا آنجا که من خبر دارم، این نحوهٔ برخورد با موضوع منحصر به فرد است، اگرچه آشنایی با روش‌های بسیار متفاوتِ هینتیکا و پرایر [Prior] برای آن منابعِ الهام بوده است.

2. 'A Completeness Theorem in Modal Logic', *Journal of Symbolic Logic*, 24 (1959), 1-15.

3. 'Semantical Analysis of Modal Logic', Ibid., pp. 323-4 (Abstract)

۴. در موردِ اینها نگاه کنید به

'A Completeness Theorem in Modal Logic', *Journal of Symbolic Logic*, 24 (1959), 1-15

و

'Semantical Analysis of Modal Logic', *Zeitschrift für Mathematische Logik und grundlagen der Mathematik*, 9, 67-96.

۵. برای اثبات، نگاه کنید به

'Semantical Analysis. . . ', Zeitschrift . . . ,.

6. G. Frege, 'Uber Sinn und Bedeutung', *Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik*, 100 (1892), 25-50.

ترجمه‌های انگلیسی در

Geach and Black, *Translations from the Philosophical Writings of Gottlob Frege* (Oxford: Blackwell, 1952),

و در

Feigel and Sellars (eds.), *Readings in Philosophical Analysis* (New York: Appleton Century Crofts, 1949).

7. P. F. Strawson, 'On referring', *Mind*, n.s., 59 (1950), 320-44.

[ترجمهٔ فارسی: پ. ف. استراوسون، «پیرامون اشاره»، ترجمهٔ رضا محمدزاده، ارغنون، سالِ دوم، شمارهٔ ۷ و ۸ (پاییز و زمستانِ ۱۳۷۴)، ۳۲۹-۲۸۹-م.]

8. Bertrand Russell, 'On denoting', *Mind*, n.s., 14 (1905), 479-93.

9. 'Modality and Quantification'

10. A. N. Prior, *Time and Modality* (Oxford: Clarendon Press, 1957, VIII+148 pp).

۱۱. طبیعی است که فرض کنیم هر محمولِ ۱تمی باید در هر جهانِ $\mathbf{H}$ در موردِ همهٔ افرادی که در آن جهان وجود ندارند غلط باشد؛ یعنی اینکه مصداقِ هر حرفِ محمولی باید از افرادِ واقعاً موجود تشکیل شود. این کار را می‌توانیم به این صورت انجام دهیم که به‌صورتِ معناشناختی قید کنیم که $\varphi(P^n, \mathbf{H})$ زیرمجموعه‌ای از $[\psi(\mathbf{H})]^n$ باشد؛ برخوردِ معناشناختیِ ذیل از جنبه‌های دیگر بدونِ تغییر کفایت خواهد کرد. مجبوریم به نظامِ اصولِ موضوعِ ذیل همهٔ بستارهای فرمول‌های به شکلِ $A(x_i) .\supset. (y)A(y) \wedge P^n(x_1, \ldots, x_n)$، $1 \leq i \leq n$، را اضافه کنیم. ترجیح داده‌ایم این‌کار را نکنیم چون قاعدهٔ جایگزینی دیگر برقرار نخواهد بود؛ قضایایی در موردِ فرمول‌های اتمی برقرار خواهند شد که وقتی فرمول‌های اتمی با فرمول‌های دلخواه جایگزین شده باشند برقرار نخواهند بود. (این به یک پرسشِ پاتنم [Putnam] و کالمر [Kalmar] پاسخ می‌دهد.

۱۲. نگاه کنید به

'Modality and Quantification in s5', *Journal of Symbolic Logics*, 21 (1956), 60-2.

۱۳. ادعا نشده است که تعبیرِ عمومیت برای قضایای با متغیرهای آزاد یگانه تعبیرِ ممکن است. ممکن است بخواهیم که فرمولِ A اثبات‌پذیر باشد اگر و تنها اگر، به ازای هر φ، به ازای هر تخصیص به متغیرهای آزادِ A، $\varphi(A, \mathbf{G}) = \mathbf{T}$. اما در این صورت $(x)A(x) \supset A(y)$ قضیه نخواهد بود؛ درواقع، در پادمُدلی که در بالا برای فرمولِ بارکان دادیم اگر b به y تخصیص داده شود، $\varphi((x)P(x) \supset P(y), \mathbf{G})] = \mathbf{F}$. بدین ترتیب نظریهٔ تسویر باید به شیوه‌هایی که در

Hintikka, 'Existential Presuppositions and Existential Commitments', *Journal of Philosophy*, 56 (1959), 125-37.

و

H. Leblanc and T. Hailperin, 'Nondesignating Singular Terms', *Philosophical Review*, 68 (1959), 239-45

پیشنهاد شده بازنگری شود. این فرآیند چیزهایی زیادی دارد که قابلِ قبول‌اش می‌سازد، اما ما آن را برنگزیده‌ایم چون می‌خواستیم نشان دهیم که مشکل را بدونِ بازنگری در نظریهٔ تسویر یا منطقِ گزاره‌ایِ وجهی هم می‌توان حل کرد.

14. W. Quine, *Mathematical Logic* (Cambridge, Mass: Harvard Univ. Press, 1940; 2nd ed., rev., 1951, XII+346 pp.).

15. S. C. Kleene, *Introduction to Metamathematics* (New York: D. van Nostrand, 1952, x+550 pp.)

۱۶. ممکن است اعتراض شود که $\mathbf{PA}$ نقداً نمادهایی برای عاطف و ناقض دارد، مثلاً '&' و '¬'؛ پس چرا نمادهای جدیدِ '$\wedge$' و '$\sim$' را الحاق می‌کنیم؟ جوابْ این است که اگر P و Q فرمول‌های اتمی‌ای باشند، آنگاه $P\&Q$ نیز به مفهومِ فعلی اتمی است، چرا که در $\mathbf{PA}$ خوش‌ساخت است؛ اما $P \wedge Q$ این‌طور نیست. برای آنکه بتوانیم نظریهٔ قبلی را ــ که در آن ترکیبِ عطفیِ فرمول‌های اتمی اتمی نیست ــ به‌کار گیریم، '$\wedge$' را لازم داریم. با این حال، به ازای هر $\mathbf{H} \epsilon \mathbf{K}$ و P و Qی اتمی، $\varphi(P \wedge Q, \mathbf{H}) = \varphi(P\&Q, \mathbf{H})$، و لذا خلطِ & با '$\wedge$' در عمل باعثِ ضرری نمی‌شود. نکاتِ مشابهی در موردِ ناقض، و در موردِ تعبیرِ اثبات‌پذیریِ S4 در پاراگرافِ بعدی موضوعیت دارند.

۱۷. نگاه کنید به

J. C. C. Mckinsey, 'On the Syntactical Construction of Systems of Modal Logic', *Journal of Symbolic Logic*, 10 (1945), 83-94.

18. G. Kreisel, 'A Remark on Free Choice Sequences and the Topological Completeness Proofs', *Journal of Symbolic Logic*, 23 (1958), 369-88.

ترجمهٔ ک. ل.