نشر ریاضی، سال ۷، شمارهٔ ۲، صص ۵-۱۴

وقتی که بیضیها دایره به نظر می‌رسند: صورتِ نظریهٔ اندازه‌ایِ قضیهٔ نگاشت ریمان

سعید ذاکری، محمود زینلیان*

۱. مقدمه

در سال ۱۸۲۲ گاوس مقاله‌ای نوشت که عنوانش چنین بود: «دربارهٔ نگاشتن بخشهای یک رویهٔ مفروض به روی یک رویهٔ دیگر به‌طوری که این نگاشت، شباهت دو رویه را حتی درکوچکترین اجزاء حفظ کند» [۹]. به زبان هندسهٔ دیفرانسیل جدید، او در آن مقاله نشان داد که هر دو رویه موضعاً همدیس‌اند. این مطلب معادل آن‌است که بگوییم با مفروض بودن هر خمینهٔ دو بعدیِ مجهز به متریک ریمانی، می‌توان حول هر نقطه مختصاتی یافت که در آن، متریکِ داده‌شده به‌صورت مضربی از متریک اقلیدسی صفحه بیان شود. چنین مختصاتی را مختصات تکدما می‌نامیم. تعویض مختصات تکدما، نگاشتی حافظ زاویه از صفحه است و بنابراین اگر جهت‌نگهدار باشد، تحلیلی خواهد بود. از این‌رو هر رویهٔ جهت‌پذیر را می‌توان به ساختار یک رویهٔ ریمانی مجهز کرد.

در اواخر دههٔ ۱۹۲۰ گروچ[1] مفهوم نگاشت شبه‌همدیس را معرفی کرد. این نوع نگاشتها همسانریختیهای صفحه با مشتقات جزئی تعمیم‌یافته در L^2_{loc}اند که دایره‌های بینهایت کوچک را به بیضیهایی با پخیدگی[2] کراندار می‌نگارند. در دههٔ ۱۹۵۰ و اوایل دههٔ ۱۹۶۰، نظریهٔ نگاشتهای شبه‌همدیس و تحقیقات تایشمولر[3] در مورد فضای ساختارهای مختلط رویه‌های ریمانی فشرده به‌دست دو ریاضیدان پیشرو، لارس آلفرس و لیپمن برس و شاگردانشان توسعهٔ بسیار یافت. این پیشرفت سریع مستلزم صورتی از قضیهٔ گاوس بود که بتوان با استفاده از آن، خانواده‌ای از متریکهای ریمانی اندازه‌پذیر بر یک رویه را نیز بررسی کرد. در ۱۹۶۰ آلفرس و برس به کمک نتایج پیشینِ کالدرون و زیگموند در مورد عملگرهای انتگرالی تکین توانستند صورت مورد نظر قضیه را ثابت کنند که امروزه به «صورتِ نظریهٔ اندازه‌ایِ قضیهٔ نگاشت ریمان» معروف است [۳]. بااین‌حال، برس تشخیص داد که صورتی از همین قضیه (بدون در نظر گرفتن وابستگی به پارامتر) قبلاً توسط موری در ۱۹۳۸ ثابت شده است [۱۴].

قضیهٔ آلفرس-برس-موری به زودی به‌صورت ابزاری اساسی در بررسی فضاهای تایشمولر و گروههای کلاینی در آمد. بعدها، در اوایل دههٔ ۱۹۸۰، ریاضیدانانی چون سالیون[1]، شیشیکورا[2]، دوآدی[3] و هابرد[4] این قضیه را در جراحی شبه‌همدیس[5] و بررسی فرایند تکرار توابع گویا روی کرهٔ ریمان به‌کار بردند. معلوم شد که خاصیت شبه‌همدیس بودن دقیقاً آن درجه از خوشرفتاری یک همسانریختی است که در جریان جراحی لازم است. این واقعیت که ساختارهای همدیس مورد بحث قضیه تنها اندازه‌پذیرند، انعطاف‌پذیری بسیار زیاد آن‌را به عنوان ابزاری برای جراحی نشان می‌دهد. این ایده به اثبات دو حدس قدیمی در دینامیک مختلط منجر شد ([۱۶]، [۱۸])، و منشأ پیدایش نظریهٔ نگاشتهای شبه‌چندجمله‌ای نیز بود [۷].

در این مقاله می‌خواهیم بی‌آنکه به پیشنیاز چندانی احتیاج باشد، این قضیه و چند کاربرد آن‌را شرح بدهیم.

۲. ساختارهای همدیس بر رویه‌ها

فرض کنیم X یک رویهٔ هموار C^∞، همبند، و جهت‌پذیر باشد. یک ساختار همدیس بر X عبارت است از رده‌ای هم‌ارزی از متریکهای ریمانیِ اندازه‌پذیر به مفهوم زیر: اگر متریک g را در مختصات موضعی (x, y) به شکل

$$g(x, y) = E(x, y)dx^۲ + ۲F(x, y)dxdy + G(x, y)dy^۲$$

نمایش دهیم، آنگاه g را اندازه‌پذیر می‌نامیم هرگاه E، F و G توابعی اندازه‌پذیر (به مفهوم لبگ) از x و y باشند به‌طوری که تقریباً همه‌جا $E > ۰$، $G > ۰$،

1. Grötzsch

۲. پخ بودن، معادل dilatation.

3. Teichmüller

1. Sullivan 2. Shishikura 3. Douady

4. Hubbard 5. quasiconformal surgery

و $EG - F^2 > 0$. دو متریک g_1 و g_2 هم‌ارز خوانده می‌شوند اگر و تنها اگر به‌ازای تابع مثبت اندازه‌پذیر بر X مانند γ، $g_1 = \gamma g_2$. بدین ترتیب، در ردهٔ هم‌ارزی یک متریک، داده‌شده، مفهوم زاویهٔ بین دو بردار مماس در تقریباً هر نقطهٔ X خوش تعریف است.

اکنون فرض کنیم که X علاوه بر مفروضات فوق یک رویهٔ ریمانی نیز باشد، یعنی فرض کنیم که به X یک ساختار مختلط $\mathscr{A}$ (یک اطلس تحلیلی ماکسیمال) نسبت داده باشیم. با چنین فرضی بهتر آن‌است که از نمادهای متغیر مختلط برای نمایش متریکها استفاده کنیم. در این‌صورت متریک g را می‌توان به شکل

$$g(z) = \gamma(z)|dz + \mu(z)d\bar{z}|^2 \qquad (1)$$

نمایش داد که در آن $z = x + iy$، γ و μ توابعی اندازه‌پذیر از zاند، و به‌ازای تقریباً هر z، $\gamma(z) > 0$ و $|\mu(z)| < 1$ (ضمیمهٔ الف را نگاه کنید). به سادگی دیده می‌شود که $\mu(z)$ به‌عنوان تابعی روی X خوش تعریف نیست. اما عبارت $\mu(z)\frac{d\bar{z}}{dz}$ تحت تعویض مختصات تحلیلی روی X ناورداست. در واقع اگر $z \mapsto w$ یک چنین تعویض مختصاتی باشد، و اگر g در (۱) را در مختصات w بتوان به شکل $\tilde{\gamma}(w)|dw + \tilde{\mu}(w)d\bar{w}|^2$ نمایش داد، آنگاه

$$\tilde{\mu}(w) = \mu(z)\frac{(dw/dz)}{(d\bar{w}/d\bar{z})} \qquad (2)$$

که از آن نتیجه می‌شود $\tilde{\mu}(w)\frac{d\bar{w}}{dw} = \mu(z)\frac{d\bar{z}}{dz}$. عبارت

$$\mu = \mu(z)\frac{d\bar{z}}{dz}$$

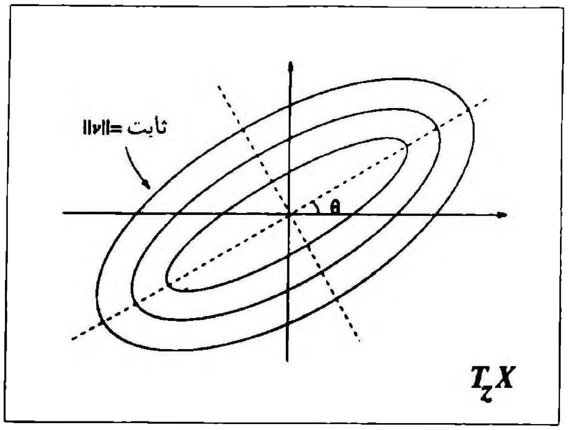
را فرم بلترامی متریک g می‌نامیم. از تعریف ساختار همدیس نتیجه می‌شود که μ تنها به ردهٔ هم‌ارزی g بستگی دارد.

به‌عکس، اگر μ اندازه‌پذیر باشد و $|\mu| < 1$، می‌توانیم ساختار همدیس متناظر آن‌را در نظر بگیریم که ردهٔ هم‌ارزی متریک $|dz + \mu(z)d\bar{z}|^2$ است. نتیجه آنکه بر یک رویهٔ ریمانی، تناظری یک به یک بین ساختارهای همدیس و فرمهای بلترامی برقرار است.

از سوی دیگر، هرگاه ساختار مختلطی چون $\mathscr{A}$ را بر X در نظر بگیریم، می‌توانیم به X ساختاری همدیس نسبت بدهیم که فرم بلترامی آن نسبت به هر مختصات موضعی وابسته به $\mathscr{A}$، متحد با صفر باشد. این ساختار همدیس را ساختار همدیس استاندارد X می‌خوانیم و همواره آن‌را با σ_X نشان می‌دهیم. بنابراین یک متریک نوعی در σ_X نسبت به هر مختصات موضعی z وابسته به $\mathscr{A}$، به شکل $\gamma(z)|dz|^2$ خواهد بود.

اندکی پیش دیدیم که هر ساختار همدیس بر رویهٔ ریمانی X را می‌توان به شکل یک به یک به‌وسیلهٔ یک فرم بلترامی بر X توصیف کرد. در اینجا سؤالی طبیعی پیش می‌آید و آن اینکه چگونه می‌توان توصیفی از یک ساختار همدیس بر X به دست داد که هندسی‌تر باشد؟ پاسخ ساده است: کافی است نگاهی به «میدان بیضیهای» مرکب از بردارهای با طول ثابت در صفحات مماس بر X بیندازیم. بگذارید این مطالب را با تفصیل بیشتری بررسی کنیم.

ساختار همدیس σ بر X و فرم بلترامی μی آن‌را در نظر می‌گیریم. برای تقریباً هر z در X، می‌توان بیضیهای هم‌مرکز «ثابت $=\|\mathrm{v}\|$» را به‌ازای v در T_zX (صفحهٔ مماس بر X در نقطهٔ z) تشکیل داد:



توجه کنید که این بیضیهای هم‌مرکز تنها به σ بستگی دارند، زیرا تحدید هر دو متریک ریمانی دلخواه در این ساختار همدیس به صفحهٔ T_zX، مضرب حقیقی یکدیگرند. به آسانی می‌توان وضعیت این بیضیها را برحسب μ مشخص کرد. بردار مماس $\mathrm{v} = u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y}$ را در T_zX در نظر می‌گیریم. با استفاده از نمادهای متغیر مختلط می‌بینیم که شرط $\|\mathrm{v}\| = c$ معادل است با $|(u + iv) + \mu(z)(u - iv)| = c$ (ضمیمهٔ الف را نگاه کنید). هرگاه $u + iv = re^{i\theta}$، شرط اخیر به‌صورت $|1 + |\mu(z)|e^{i(\arg\mu(z) - 2\theta)}| = c/r$ در می‌آید. بنابراین، نسبت قطر بزرگ به قطر کوچک این بیضی، محاسبه شده در ساختار همدیس استاندارد σ_X، از رابطهٔ

$$K(z) = \frac{1 + |\mu(z)|}{1 - |\mu(z)|} \qquad (3)$$

و زاویهٔ انحراف قطر کوچک نسبت به راستای افقی در این مختصات موضعی خاص از رابطهٔ

$$\theta(z) = \frac{1}{2}\arg\mu(z) \qquad (4)$$

به دست می‌آید. از (۳) ضمناً نتیجه می‌شود که $|\mu(z)|$ تابع اندازه‌پذیر خوش تعریفی بر X است (این مطلب از قانون تعویض مختصات (۲) نیز معلوم می‌شود). این رابطه همچنین نشان می‌دهد که هرگاه بیضیهای حاصل از σ_X را در نظر بگیریم، خانواده‌ای از «دایره»ها به دست می‌آوریم.

به‌عکس، به‌ازای هر میدان اندازه‌پذیر بیضیها بر X، یعنی خانواده‌ای از بیضیهای هم‌مرکز بر تقریباً هر صفحهٔ مماس که به طرز اندازه‌پذیر تغییر می‌کنند، می‌توانیم با حرکت در جهت عکس یک ساختار همدیس به دست بیاوریم: ابتدا نسبت قطر بزرگ به قطر کوچک بیضیها را در ساختار همدیس استاندارد اندازه می‌گیریم تا K را پیدا کنیم. سپس زاویهٔ θ را نسبت به یک مختصات موضعی خاص z اندازه می‌گیریم. آنگاه از (۳) و (۴)، $\mu(z)$ را می‌یابیم. در این‌صورت ساختار همدیس مطلوب، ردهٔ هم‌ارزی $|dz + \mu(z)d\bar{z}|^2$ خواهد بود.

نتیجه آنکه ساختارهای همدیس بر X و میدانهای اندازه‌پذیر بیضیها بر صفحات مماس بر X، اشیای واحدی هستند.

می‌گوییم میدان اندازه‌پذیری از بیضیها نسبت به σ_X پخیدگی کراندار دارد هرگاه $\|K\|_\infty < +\infty$، که در آن $\|\cdot\|_\infty$ نشانگر کوچکترین کران

بالای اساسی روی X است. این بدان معنی است که میزان پخیدگی بیضی‌های این میدان نمی‌تواند به قدر دلخواه زیاد باشد. در واقع در یک چنین میدانی تنها مجازیم به اندازهٔ معینی در رسم دایره‌هایمان مرتکب خطا بشویم. به موجب (۳) طبیعی است که بگوییم یک ساختار همدیس نسبت به σ_X پخیدگی کراندار دارد هرگاه فرم بلترامیش در

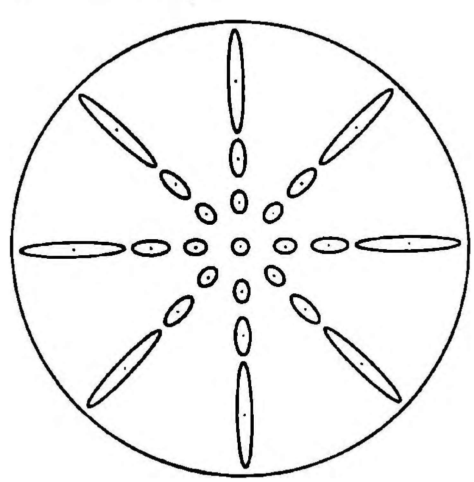
$$\|\mu\|_\infty < 1$$

صدق کند.

مثلاً، ردهٔ هم‌ارزی متریک

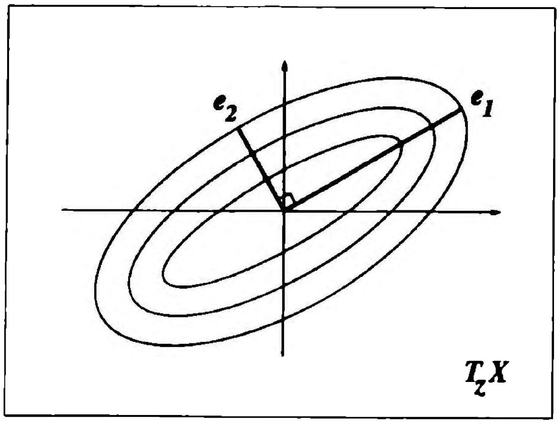
$$|dz + \frac{z^2}{|z|} d\bar{z}|^2 \qquad (5)$$

روی قرص واحد $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$ پخیدگی کراندار ندارد.



راه دیگری برای توصیف ساختاری همدیس بر یک رویهٔ ریمانی، اتخاذ رهیافتی جبری است. ساختار همدیس σ را بر X تثبیت می‌کنیم و میدان بیضی‌های حاصل را بر تقریباً هر صفحهٔ مماس T_zX در نظر می‌گیریم. در این‌صورت می‌توان یک یکریختی $\mathbb{R}$ـخطی J_z بر T_zX تعریف کرد به‌طوری‌که $J_z^2 = -id$ (که در آن id تبدیل همانی روی T_zX است). بدین منظور جفت بردارهای (e_1, e_2) را مانند شکل بعدی انتخاب می‌کنیم و قرار می‌دهیم $J_z(e_1) = e_2$ و $J_z(e_2) = -e_1$ و J_z را به‌طور خطی به T_zX گسترش می‌دهیم. روشن است که J_zای که چنین تعریف می‌شود به انتخاب بیضی خاصی که (e_1, e_2) روی آن قرار دارد بستگی ندارد. این خانواده از تبدیلهای خطی مثالی است از یک ساختار تقریباً مختلط اندازه‌پذیر. به بیان صریحتر، یک ساختار تقریباً مختلط اندازه‌پذیر بر X تابعی اندازه‌پذیر چون $z \mapsto J_z$ است که به تقریباً هر z در X یک یکریختی $\mathbb{R}$ـخطی مانند J_z روی T_zX نسبت می‌دهد به‌طوری‌که $J_z^2 = -id$.

به‌عنوان مثال، ساختار تقریباً مختلطی که از σ_X به دست می‌آید، در هر مختصات موضعی $z = x + iy$ بردار $\frac{\partial}{\partial x}$ را به $\frac{\partial}{\partial y}$ و بردار $\frac{\partial}{\partial y}$ را به $-\frac{\partial}{\partial x}$ می‌فرستد. بنابراین اگر نمادهای متغیر مختلط را به کار ببریم، $\frac{\partial}{\partial z}$ را به $i\frac{\partial}{\partial z}$ می‌نگارد (ضمیمهٔ الف را نگاه کنید). به همین دلیل است که معمولاً این ساختار تقریباً مختلط را به‌صورت «ضرب در i» یا «دوران به اندازهٔ 90°» در جهت مثبت T_zX تصور می‌کنیم.



به‌عکس، ساختار تقریباً مختلط $z \mapsto J_z$ را در نظر می‌گیریم به‌طوری‌که جهت زوج $(\frac{\partial}{\partial x}, J_z(\frac{\partial}{\partial x}))$ به‌ازای تقریباً هر نقطهٔ X با جهت $(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y})$ یکی باشد. نقطهٔ نوعی z را تثبیت می‌کنیم و یکریختی $\mathbb{R}$ـخطی ϕ بر T_zX را چنان انتخاب می‌کنیم که $\phi^{-1}J_z\phi(\frac{\partial}{\partial x}) = \frac{\partial}{\partial y}$ و $\phi^{-1}J_z\phi(\frac{\partial}{\partial y}) = -\frac{\partial}{\partial x}$. به عبارت دیگر ϕ چنان یکریختیی است که J_z را با ضرب در i تزویج می‌کند. دایره‌های هم‌مرکز القاشده از σ_X را بر T_zX و تصویر آنها را تحت ϕ در نظر می‌گیریم. بیضی‌های هم‌مرکز به‌دست آمده خوش تعریف‌اند، زیرا نه به مختصات موضعی z بستگی دارند و نه به انتخاب ϕ. هر بیضی در این خانواده تحت اثر J_z به‌روی خودش نگاشته می‌شود. به‌این ترتیب با مفروض بودن یک ساختار تقریباً مختلط، یک میدان بیضی‌ها و از آنجا یک ساختار همدیس به دست می‌آید.

اکنون می‌خواهیم عملی روی ساختارهای همدیس تعریف کنیم که متناظر با برگردان کردن[1] متریکهای ریمانی در هندسهٔ دیفرانسیل است. به بیان غیر دقیق، می‌توان هر ساختار همدیس را به کمک هر وابریختی [دیفئومورفیسم] موضعی برگردان کرد، اما به دلیل سرشت اندازه‌پذیر اشیای مورد مطالعه‌مان، می‌توانیم شرط هموار بودن را ضعیف کنیم. موقتاً فرض می‌کنیم X و Y دو رویهٔ ریمانی و $f : X \to Y$ یک وابریختی هموار جهت نگهدار باشد. با در دست داشتن هر ساختار همدیس σ بر Y، می‌توانیم آن‌را به کمک f به روی X برگردان کنیم تا ساختار همدیسی چون $f^*\sigma$ به‌دست بیاوریم. در واقع، هرگاه σ ردهٔ هم‌ارزی $|dw + \mu(w)d\bar{w}|^2$ باشد و f را موضعاً به شکل $w = f(z)$ بنویسیم، آنگاه $f^*\sigma$ ردهٔ هم‌ارزی

$$|dz + \frac{f_{\bar{z}} + \mu(f(z))\,\overline{f_z}}{f_z + \mu(f(z))\,\overline{f_{\bar{z}}}} d\bar{z}|^2$$

خواهد بود که در آن f_z و $f_{\bar{z}}$ مشتقات جزئی مختلط f در مختصات موضعی zاند (ضمیمهٔ الف را نگاه کنید). بویژه اگر σ_Y ساختار همدیس استاندارد Y باشد، آنگاه

$$f^*\sigma_Y = \text{ردهٔ هم‌ارزی } |dz + \frac{f_{\bar{z}}}{f_z} d\bar{z}|^2 \qquad (6)$$

در این‌صورت معادلات کوشی-ریمان نشان می‌دهند که $f : X \to Y$ همدیس است اگر و تنها اگر $f^*\sigma_Y = \sigma_X$. این مطلب، برحسب ساختارهای تقریباً

1 to pull back

مختلط، بدان معنی است که مشتق $Df(z)$ به عنوان تابعی $\mathbf{R}$ـخطی از T_zX به $T_{f(z)}Y$ با ضرب در iهای متناظر جابه‌جا می‌شود:

$$\begin{array}{ccc} T_zX & \xrightarrow{Df(z)} & T_{f(z)}Y \\ J_z\downarrow & & \downarrow J'_z \\ T_zX & \xrightarrow{Df(z)} & T_{f(z)}Y \end{array}$$

اکنون توجه کنیم که همهٔ ساختارهای همدیس مورد بررسی تنها اندازه‌پذیرند و بنابراین استفادهٔ انحصاری از نگاشتهای هموار برای برگردان کردن آنها نابجاست. درواقع عملیاتی را مانند آنچه در بالا دیدیم می‌توان حتی هنگامی‌که f وابرریختی نباشد تعریف کرد. اما به هر حال برای توسعهٔ ردهٔ نگاشتهایی که برگردان کردن تحت آنها معنی دارد باید آن همسانریختیهایی را انتخاب کنیم که به مفهومی منطقی مشتقات جزئی دارند. معلوم می‌شود که چنین همسانریختیهایی واقعاً وجود دارند و همسانریختیهای شبه‌همدیس نامیده می‌شوند.

به بیان صریح، همسانریختی $f : X \to Y$ **شبه‌همدیس** نام دارد اگر در تقریباً هر نقطه، مشتقات جزئی تعمیم‌یافتهٔ موضعاً مربع‌ـانتگرالپذیر f_z و $f_{\bar z}$ نسبت به هر مختصات موضعی z وجود داشته باشند (ضمیمهٔ ب را نگاه کنید) و

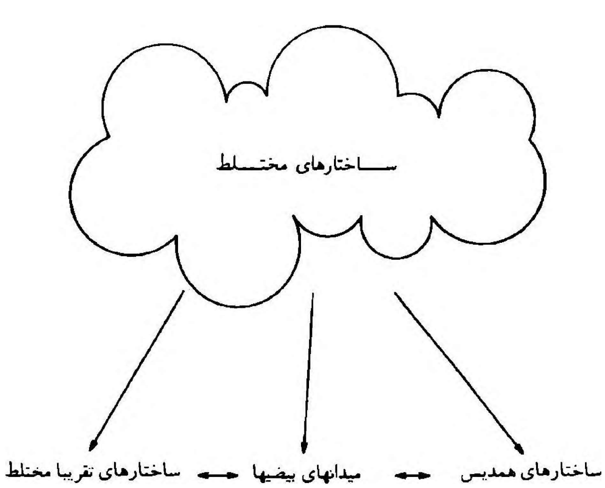
$$\left\| \frac{f_{\bar z}}{f_z} \right\|_\infty < ۱ \qquad (۷)$$

در این‌صورت می‌توانیم مانند حالت وابرریختی، محاسبات بالا را تکرار و ساختار همدیس σ_Y را تحت f برگردان کنیم، به‌طوری که (۶) همچنان برقرار باشد. در نتیجه $f : X \to Y$ شبه‌همدیس است اگر و تنها اگر $f^*\sigma_Y$ نسبت به σ_X پخیدگی کراندار داشته باشد.

نکتهٔ جالبتر آنکه حتی برای یک نگاشت شبه‌همدیس $f : X \to Y$، رابطهٔ $f^*\sigma_Y = \sigma_X$ همدیس بودن را نتیجه می‌دهد. به بیان دیگر، همسانریختی شبه‌همدیس f که در $f_{\bar z} = ۰$ صدق می‌کند عملاً تحلیلی است. این تعمیمی از معادلات کوشی‌ـریمان برای همسانریختیهاست، که به لم وایل موسوم است. کمیت سمت چپ (۷) حداکثر پخیدگی f نام دارد. بنابر لم وایل، f همدیس است اگر و تنها اگر حداکثر پخیدگی آن صفر باشد.

همسانریختیهای شبه‌همدیس خواص تحلیلی خارق‌العاده‌ای دارند. آنها را می‌توان به کمک خواص هندسی ساده‌ای نیز تعریف و مشخص کرد. برای مطالعهٔ بیشتر در این زمینه خواننده را به [۲] رجوع می‌دهیم (ضمیمهٔ ب، قضیهٔ ب ـ ۱ را هم نگاه کنید).

اکنون بگذارید لحظه‌ای تأمل کنیم و نظری به آنچه تاکنون ساخته‌ایم بیندازیم. با مفروض بودن یک ساختار مختلط بر یک رویه، می‌توان یک ساختار همدیس (استاندارد)، یا معادل آن یک میدان بیضیها، یا معادلش یک ساختار تقریباً مختلط، به دست آورد:



در اینجا سؤال بسیار ظریفی مطرح می‌شود: آیا می‌توان در نمودار فوق پیکانی از پایین به بالا رسم کرد؟ به بیان دیگر، با مفروض بودن

(الف) یک ساختار همدیس σ، یا

(ب) یک میدان اندازه‌پذیر بیضیها، یا

(ج) یک ساختار تقریباً مختلط اندازه‌پذیر J

بر رویهٔ X، آیا می‌توان ساختار مختلطی چون $\mathscr{A}$ بر X یافت به‌طوری که

(الف ۱) σ ساختار همدیس استاندارد $(X, \mathscr{A})$ باشد؛ یا

(ب ۱) دایره‌های واقع در صفحات مماس $(X, \mathscr{A})$ همان بیضیهای داده‌شده باشند؛ یا

(ج ۱) عمل J، همان ضرب در i در $(X, \mathscr{A})$ باشد؟

۳. قضیه

صورت نظریهٔ اندازه‌ای قضیهٔ نگاشت ریمان پاسخ کاملی به پرسش بالا می‌دهد. معلوم می‌شود که پاسخ مثبت است مشروط بر اینکه یک شرط کرانداری روی ساختار همدیسِ داده‌شده بگذاریم. به بیان غیر دقیق، قضیه می‌گوید که پاسخ مثبت است هرگاه ساختار همدیس داده‌شده در فاصلهٔ معقولی از ساختار همدیس استاندارد نسبت به یك ساختار مختلط بر رویهٔ مورد نظر باشد. به بیان دیگر، هرگاه ساختار مختلطی بر X وجود داشته باشد به‌طوری که σ نسبت به σ_X پخیدگی کراندار داشته باشد، آنگاه می‌توان ساختار مختلط X را به‌گونه‌ای عوض کرد که σ در اطلس تحلیلی جدید استاندارد باشد. در این حالت σ، یا میدان بیضیهای وابسته، یا ساختار تقریباً مختلط وابسته، انتگرالپذیر نامیده می‌شود.

ابتدا بگذارید پرسش بالا را به زبان مناسبتری فرمولبندی کنیم. فرض کنیم به X ساختار مختلط مشخصی نسبت داده باشیم و نیز فرض کنیم σ نسبت به σ_X پخیدگی کراندار داشته باشد.

گزارهٔ (*) انتگرالپذیری σ معادل آن است که بگوییم رویهٔ ریمانی Y و همسانریختی شبه‌همدیسی چون $f : X \to Y$ وجود دارند به‌طوری که $f^*\sigma_Y = \sigma$.

درواقع، اگر f چنین نگاشتی باشد، X را به برگردان ساختار مختلط Y مجهز می‌کنیم (که نقشه[۱]های آن عبارت‌اند از ترکیب f با نقشه‌های Y). در این‌صورت σ در این ساختار مختلط جدید استاندارد خواهد بود. برعکس، اگر σ نسبت به یک ساختار مختلط جدیدْ روی X استاندارد باشد، X مجهز شده به‌این ساختار جدید را Y می‌نامیم و تابع همانی $id : X \to Y$ را در نظر می‌گیریم. واضح است که $(id)^*\sigma_Y = \sigma$.

1. chart

به علاوه، به آسانی می‌توان یکتایی چنین Yای را (در صورت وجود) ثابت کرد. هرگاه $g: X \to Z$ همسانریختی شبه‌همدیس دیگری با $\sigma = g^*\sigma_Z$ باشد، آنگاه $h = g \circ f^{-1}: Y \to Z$ در $h^*\sigma_Z = \sigma_Y$ صدق می‌کند و بنابراین h همدیس است. به‌عکس، اگر $h: Y \to Z$ یک همسانریختی همدیس باشد، آنگاه $g = h \circ f: X \to Z$ در $\sigma = g^*\sigma_Z$ صدق می‌کند. نتیجه آنکه جواب $f: X \to Y$ در حد ترکیب از چپ با یك همسانریختی همدیس Y یکتاست.

برای بررسی یک حالت اساسی، ابتدا حالت $X = \mathbb{D}$، یعنی قرص واحد در صفحهٔ مختلط را در نظر می‌گیریم. فرض کنیم σ نسبت به $\sigma_{\mathbb{D}}$ پخیدگی کراندار داشته باشد، که بدین معنی است که فرم بلترامی μی وابسته در $\|\mu\|_\infty < 1$ صدق می‌کند. در این‌صورت از (۶) معلوم می‌شود که $f: \mathbb{D} \to Y$ در $f^*\sigma_Y = \sigma$ صدق می‌کند اگر و تنها اگر f جواب معادلهٔ

$$\frac{f_{\bar z}}{f_z} = \mu, \qquad \|\mu\|_\infty < 1$$

باشد، که **معادلهٔ بلترامی** خوانده می‌شود.

گاوس نخستین کسی بود که جوابهای موضعی این معادله را برای μی تحلیلی حقیقی به دست آورد. خود بلترامی در مطالعاتش در زمینهٔ رویه‌ها استفاده‌های گوناگونی از این معادله کرد [۴]. موری اولین کسی بود که برای μی اندازه‌پذیر وجود جوابهای سراسری[1] معادلهٔ بلترامی را ثابت کرد. با وجود این حدود ۲۰ سال طول کشید تا ارتباط کار او با معادلهٔ بلترامی بر آلفرس و بسیاری از دیگر متخصصان آشکار شود، زیرا که و مقاله‌اش را کاملا به زبان معادلات دیفرانسیل جزئی نوشته بود. در نتیجه زمانی‌که برس این ارتباط را تشخیص داد، آلفرس صورت اولیهٔ قضیه را برای μی پیوستهٔ هولدر در مقاله‌ای به چاپ رسانیده بود. با این‌همه، آلفرس و برس در مقالهٔ اساسی سال ۱۹۶۰ خود شکل بسیار قویتری از این قضیه را ثابت کردند که در عین حال وابستگی تحلیلی نسبت به پارامتر را نیز نشان می‌داد. بعداً مشخص شد که این نکتهٔ به ظاهر فنّی، در نظریهٔ فضاهای تایشمولر اهمیت زیادی دارد.

بنابر قضیهٔ یکنواخت‌سازی، رویهٔ ریمانی Yی بالا به‌طور همدیس معادل با $\mathbb{D}$ یا صفحهٔ مختلط $\mathbb{C}$ است. اما قضیه عملاً نشان می‌دهد که Y را همواره می‌توان $\mathbb{D}$ اختیار کرد، و این بدان معنی است که معادلهٔ بلترامی جوابهایی دارد که همسانریختیهای شبه‌همدیس $\mathbb{D} \to \mathbb{D}$ هستند. این نکته نشان می‌دهد که Y هرگز نمی‌تواند $\mathbb{C}$ باشد، یعنی هیچ همسانریختی شبه‌همدیسی بین $\mathbb{D}$ و $\mathbb{C}$ وجود ندارد (نتیجهٔ ۱ زیر را ببینید).

قضیهٔ ۱ (آلفرس ـ برس ـ موری). فرض کنیم σ یك ساختار همدیس اندازه‌پذیر با پخیدگی کراندار روی قرص واحد $\mathbb{D}$ باشد. در این‌صورت همسانریختی شبه‌همدیسی چون $f: \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ وجود دارد به‌طوری که $\sigma = f^*\sigma_{\mathbb{D}}$. f در حد ترکیب از چپ با یك همسانریختی همدیس $\mathbb{D}$ یکتاست. به علاوه، اگر $\{\sigma^t\}$ خانواده‌ای از این ساختارهای همدیس باشد که به‌طور پیوسته (به‌ترتیب، هموار، تحلیلی) به پارامتر t وابسته باشد، آنگاه خانواده‌ای چون $\{f^t\}$ از همسانریختیهای شبه‌همدیس $\mathbb{D}$ وجود دارد به‌طوری که $(f^t)^*\sigma_{\mathbb{D}} = \sigma^t$ و وابستگی $\{f^t\}$ به t نیز پیوسته (به‌ترتیب، هموار، تحلیلی) است.

1. global

نتیجهٔ ساده‌ای از این قضیه چنین است:

نتیجهٔ ۱. هیچ همسانریختی شبه‌همدیسی بین $\mathbb{D}$ و $\mathbb{C}$ وجود ندارد.

در واقع فرض کنیم $g: \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ چنین همسانریختیی باشد. در این صورت $g^*\sigma_{\mathbb{C}}$ نسبت به $\sigma_{\mathbb{D}}$ پخیدگی کراندار دارد. بنابر قضیهٔ بالا، $f: \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ای هست که $f^*\sigma_{\mathbb{D}} = g^*\sigma_{\mathbb{C}}$، یا $(f \circ g^{-1})^*\sigma_{\mathbb{D}} = \sigma_{\mathbb{C}}$. اما این بدان معنی است که $f \circ g^{-1}: \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ همدیس است، پس بنابر قضیهٔ لیوویل باید ثابت باشد.

ممکن است چنین تصور شود که در حالت یک رویهٔ ریمانی دلخواه، موانع ذاتی سراسری در برابر انتگرال‌پذیر بودن یک ساختار همدیس وجود دارد. ما در واقع چنین نیست. در زیر نشان می‌دهیم که حالت کلی نتیجه‌ای از حالت «موضعی» $X = \mathbb{D}$ است.

فرض کنیم X یک رویهٔ ریمانی دلخواه با اطلس تحلیلی $\mathscr{A}$ باشد. σ را یک ساختار همدیس اندازه‌پذیر می‌گیریم که نسبت به σ_X پخیدگی کراندار داشته باشد. X را با دستهٔ شمارش‌پذیری از نقشه‌های (U, z) در $\mathscr{A}$ می‌پوشانیم که در آن $z: U \to \mathbb{D}$ یک همسانریختی است. در هر چنین مختصهٔ موضعی zای، σ ردهٔ همارزی $|dz + \mu(z)d\bar z|^2$ است که z در $\mathbb{D}$ است و $\|\mu\|_\infty < 1$. بنابر قضیهٔ بالا، همسانریختی شبه‌همدیسی چون $f: \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ وجود دارد به‌طوری که $\sigma = f^*\sigma_{\mathbb{D}}$. زوج $(U, f \circ z)$ را به عنوان نقشه‌ای در یک اطلس جدید $\mathscr{B}$ انتخاب می‌کنیم. اگر (V, w) نیز در $\mathscr{A}$ باشد و $U \cap V \neq \emptyset$، و اگر $(V, g \circ w)$ نقشهٔ جدید متناظر در $\mathscr{B}$ باشد، آنگاه تعویض مختصات $(g \circ w) \circ (f \circ z)^{-1}$ همدیس است، زیرا $\sigma_{\mathbb{D}}$ را حفظ می‌کند

$$\begin{aligned}[(g \circ w) \circ (f \circ z)^{-1}]^*\sigma_{\mathbb{D}} &= (f^{-1})^*(w \circ z^{-1})^* g^*\sigma_{\mathbb{D}} \\ &= (f^{-1})^*(w \circ z^{-1})^*\sigma \\ &= (f^{-1})^*\sigma \\ &= \sigma_{\mathbb{D}}\end{aligned}$$

بنابراین $\mathscr{B}$ عملاً یک اطلس تحلیلی برای X است که نسبت به مختصات آن، σ استاندارد است. بنابر گزارهٔ (*) بالا، ثابت کرده‌ایم که

قضیهٔ ۲. فرض کنیم X یك رویهٔ ریمانی و σ یك ساختار همدیس اندازه‌پذیر بر X باشد که نسبت به σ_X پخیدگی کراندار دارد. در این‌صورت رویه‌ای ریمانی چون Y و همسانریختی شبه‌همدیسی چون $f: X \to Y$ وجود دارد به‌طوری که $\sigma = f^*\sigma_Y$. f در حد ترکیب از چپ با یك همسانریختی همدیس Y یکتاست.

در حالتی که X کرهٔ ریمان $\bar{\mathbb{C}}$ باشد، از قضیهٔ یکنواخت‌سازی نتیجه می‌شود که هر رویهٔ ریمانی Y همسانریخت با X در واقع به‌طور همدیس

هم‌ارز X است. به علاوه هر همسانریختی همدیس کره یک تبدیل موبیوس مختلط است که با اثرش بر ۳ نقطهٔ متمایز به‌طور یکتا مشخص می‌شود. در نتیجه

قضیهٔ ۳. فرض کنیم σ یک ساختار همدیس اندازه‌پذیر بر $\bar{\mathbb{C}}$ با پخیدگی کراندار باشد. در این صورت همسانریختی شبه‌همدیس یکتایی چون $f:\bar{\mathbb{C}}\to\bar{\mathbb{C}}$ وجود دارد به‌طوری که $f(0)=0$، $f(1)=1$، $f(\infty)=\infty$ و $f^*\sigma_{\bar{\mathbb{C}}}=\sigma$.

اثبات قضیهٔ (۲) همچنین حقیقت زیر را آشکار می‌کند: هرگاه رده‌ای هم‌ارزی از متریکهای ریمانی پیوسته را بر یک رویهٔ ریمانی در نظر بگیریم، برای مسألهٔ انتگرالپذیری لزومی ندارد که هیچ نوع شرط کرانداری بر آن اعمال کنیم. در واقع با مفروض بودن هر چنین ردهٔ هم‌ارزیی، X را به یک ساختار مختلط دلخواه مجهز می‌کنیم و پوششی از X را با قرصها در نظر می‌گیریم که در آن هر قرص به‌طور فشرده در دامنهٔ یک نقشهٔ X می‌نشیند. به سادگی دیده می‌شود که تابع $|\mu|$ بر هر قرص به‌طور یکنواخت کوچکتر از ۱ خواهد بود. اکنون همان اثبات بالا را برای قضیهٔ (۲) می‌توان تکرار کرد.

نتیجه ۲. هر ساختار همدیس پیوسته بر یک رویهٔ هموار، انتگرالپذیر است.

به‌عنوان مثال، ساختار همدیس (۵) بر $\mathbb{D}$ نسبت به $\sigma_{\mathbb{D}}$ پخیدگی کراندار ندارد. بااین‌حال پیوسته و بنابراین انتگرالپذیر است. می‌توان دید که رویهٔ ریمانیی که (۵) بر آن استاندارد است به‌طور همدیس هم‌ارز $\mathbb{C}$ است. در واقع، تابع $f(z)=z(1-|z|)^{-2}$ همسانریختی همدیس مطلوب از $\mathbb{D}$ به $\mathbb{C}$ را به دست می‌دهد.

۴. یک کاربرد: نگاشتهای شبه چندجمله‌ای

در چند سال اخیر نتایج متعددی در دینامیک مختلط به دست آمده‌اند که در اثبات آنها، صورت نظریهٔ اندازه‌ای قضیهٔ نگاشت ریمان نقش اساسی دارد. به عنوان مثال می‌توان از نتایج زیر نام برد: اثبات سالیون از حدس دامنه‌های ناسرگردان[1] [۱۸]، تخمینهای دقیق شیشیکورا از تعداد مدارهای تناوبی غیر دافع یک تابع گویا بر کرهٔ ریمان [۱۶]، ساختن حلقه‌های هرمان به کمک جراحی شبه‌همدیس [۱۶]، و نظریهٔ نگاشتهای شبه چندجمله‌ای دوآدی و هابرد [۷] که ابزاری مهم در مطالعهٔ خانوادهٔ چندجمله‌ایهای درجهٔ دوی $\{z\mapsto z^2+c\}$ و مجموعهٔ مندلبرات است. در اینجا می‌خواهیم کاربردی مقدماتی از قضیهٔ ۳ را در نظریهٔ نگاشتهای شبه‌چندجمله‌ای ارائه کنیم.

فرض‌کنیم P یک چندجمله‌ای با ضرایب مختلط از درجهٔ $d>1$ باشد. برای $|z|$ به قدر کافی بزرگ، رفتار P همانند رفتار $z\mapsto cz^d$ است. بنابراین اگر $R>0$ به قدر کافی بزرگ باشد، P قرص $U=\{z:|z|<R\}$ را به روی قرص توپولوژیک V می‌نگارد که $V\supset\bar{U}$ و $P:U\to V$ یک نگاشت تحلیلی سرهٔ d به ۱ است. **مجموعهٔ زوایای پرشده** $K(P)$ را به عنوان مجموعهٔ همهٔ نقاطی چون x تعریف می‌کنیم که مدار $\{P^n(x)\}_{n\geq 0}$ آنها تحت P در صفحهٔ مختلط کراندار می‌ماند:

$$K(P)=\bigcap_{n\geq 0} P^{-n}(\bar{U})$$

این مجموعه، زیرمجموعه‌ای فشرده از U است که غالباً شکل بسیار پیچیدهٔ برخالی دارد.

با توجه به رفتار چندجمله‌ایها به‌ازای $|z|$ بزرگ، به فکر مطالعهٔ وضعیت زیر می‌افتیم: فرض کنیم U و V دو قرص توپولوژیک در صفحه باشند که مرزشان هموار است و $\bar{U}\subset V$. همچنین فرض کنیم $f:U\to V$ یک نگاشت تحلیلی سره از درجهٔ $d>1$ باشد. در این‌صورت f را یک **نگاشت شبه چندجمله‌ای** می‌نامیم. با الگو گرفتن از حالت چندجمله‌ایها، مجموعهٔ زوایای پرشدهٔ f را به‌عنوان مجموعهٔ همه نقاطی در U تعریف می‌کنیم که مدارشان تحت f هیچگاه U را ترک نمی‌کند. این مجموعه را به $K(f)$ نشان می‌دهیم. پس $K(f)=\bigcap_{n\geq 0} f^{-n}(\bar{U})$.

می‌خواهیم نشان دهیم که هر نگاشت شبه‌چندجمله‌ای درنزدیکی مجموعهٔ زوایای پرشده‌اش رفتار دینامیکیِ مشابهی با یک چندجمله‌ای واقعی دارد. در حقیقت نشان خواهیم داد که یک تزویج شبه‌همدیس بین هر نگاشت شبه چندجمله‌ای و یک چندجمله‌ای واقعی وجود دارد که در درون مجموعهٔ زوایای پرشده همدیس است. در چنین حالتی می‌گوییم که این دو نگاشت **به‌طور پیوندی هم‌ارز**[1]ند.

قضیهٔ ۴ (دوآدی ـ هابرد). فرض کنیم $f:U\to V$ یک نگاشت شبه چندجمله‌ای از درجهٔ $d>1$ باشد. در این‌صورت یک چندجمله‌ای P از درجهٔ d و یک همسانریختی شبه‌همدیس $\phi:\bar{\mathbb{C}}\to\bar{\mathbb{C}}$ با $\phi(\infty)=\infty$ وجود دارد که f و P را در یک همسایگی مجموعه‌های زوایای پرشده‌شان مزدوج می‌کند

$$\phi(f(z))=P(\phi(z))$$

به علاوه، بر $K(f)$ داریم $\phi_{\bar{z}}=0$، بنابراین تزویج ϕ در درون $K(f)$ همدیس است.

قلب اثبات در این نکته نهفته است که عمل f را می‌توان با چسباندن[2] آن به چندجمله‌ای $z\mapsto z^d$ به همهٔ کرهٔ ریمان گسترش داد. در این‌صورت می‌توانیم یک ساختار همدیس ناوردا روی کره پیدا کنیم و قضیهٔ ۳ را به کار ببندیم و نتیجه بگیریم که آن ساختار انتگرالپذیر است.

بدین منظور فرض می‌کنیم $h:\bar{\mathbb{C}}\setminus V\to\{z:|z|\geq 2\}$ همسانریختی همدیسی باشد که $h(\infty)=\infty$. h را به‌طور هموار به یک وابرریختی $h:\bar{\mathbb{C}}\setminus U\to\{z:|z|\geq 2^{1/d}\}$ گسترش می‌دهیم به‌طوری که

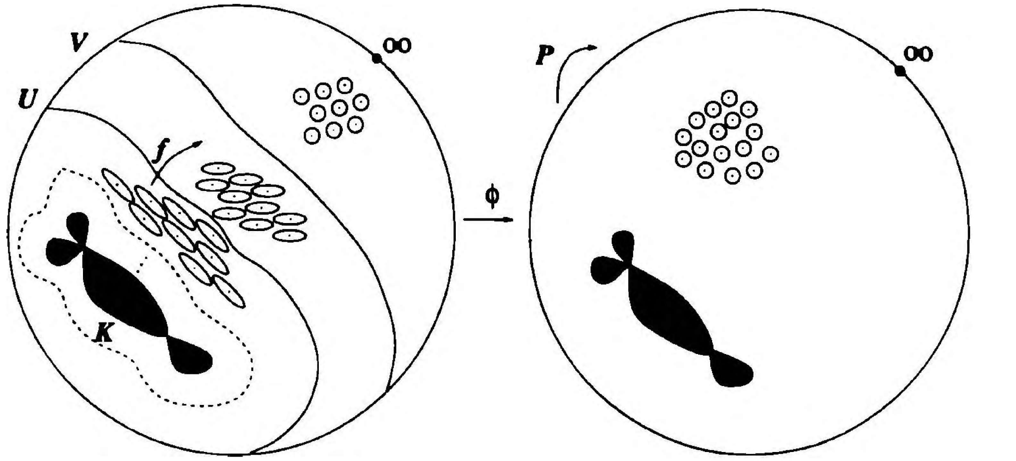
$$h(f(z))=(h(z))^d \qquad \text{به‌ازای } z \text{ بر } \partial U$$

اکنون تابع هموار

$$\tilde{f}(z)=\begin{cases} f(z) & z\in U\\ h^{-1}\circ(h(z))^d & z\in\bar{\mathbb{C}}\setminus U\end{cases}$$

1. nonwandering

1. hybrid equivalent 2. to glue



توسیع مورد نظر f است که در خارج V به‌طور همدیس با $z \mapsto z^d$ مزدوج است. ساختار همدیس اندازه‌پذیر σ را بر کرهٔ ریمان چنین تعریف می‌کنیم: فرض کنیم σ در $\bar{\mathbb{C}} \setminus \overline{V}$ همان $\sigma_{\bar{\mathbb{C}}}$ باشد. می‌توانیم این ساختار را به کمک $\tilde{f}$ از $\bar{\mathbb{C}} \setminus \overline{V}$ به $V \setminus \overline{U}$ برگردان کنیم تا تعریف σ روی $V \setminus \overline{U}$ به دست آید. سپس σ را روی $U \setminus f(\overline{U})$ به عنوان برگردان σ روی $V \setminus \overline{U}$ توسط $\tilde{f}$ تعریف می‌کنیم. این روند برگردان کردن به کمک $\tilde{f}$ را می‌توان ادامه داد تا سرانجام σ در همه جا، مگر روی $K(f)$، تعریف شود. بر $K(f)$ به‌سادگی قرار می‌دهیم $\sigma = \sigma_{\bar{\mathbb{C}}}$. توجه کنیم که σیی که چنین تعریف شده تحت $\tilde{f}$ ناورداست $(\tilde{f}^{*}\sigma = \sigma)$ و پخیدگی کراندار دارد، زیرا پس از مرحلهٔ اول، همهٔ برگردانهای بعدی به کمک f انجام می‌شود که تابعی تحلیلی است و پخیدگی را تغییر نمی‌دهد.

بنابر قضیهٔ ۳، همسانریختی شبه‌همدیسی چون $\phi: \bar{\mathbb{C}} \to \bar{\mathbb{C}}$ وجود دارد که ∞ را ثابت نگه می‌دارد و $\sigma = \phi^{*}\sigma_{\bar{\mathbb{C}}}$. چون σ تحت $\tilde{f}$ ناورداست، $\sigma_{\bar{\mathbb{C}}}$ تحت $P = \phi \circ \tilde{f} \circ \phi^{-1}$ ناوردا خواهد بود، پس P یک نگاشت تحلیلی است. همچنین P یک نگاشت سرهٔ d به ۱ است که ∞ را ثابت نگه می‌دارد. بنابراین P یک چندجمله‌ای درجهٔ d خواهد بود. دقت کنیم که روی $K(f)$ داریم $\bar{\partial}\phi = 0$ زیرا σ را در آنجا ساختار استاندارد تعریف کردیم.

۵. منابعی برای مطالعهٔ بیشتر

این مقاله تنها درآمدی بر چند جنبهٔ بسیار مقدماتیِ صورتِ نظریهٔ اندازه‌ایِ قضیهٔ نگاشت ریمان است. در اینجا به‌طور خلاصه چند مرجع را ذکر می‌کنیم که در آنها، اغلب مباحث اشاره‌شده در این مقاله با تفصیل بیشتر بررسی شده است.

اثبات گاوس برای وجود مختصات تکدما را می‌توان در مجموعه آثار او یافت [۹]. ترجمهٔ انگلیسی بخش اعظم مقالهٔ او در این زمینه، در [۱۷] آمده است. اثبات بسیار جالبی از دوآدی وفتی در مورد وجود جوابهای معادلهٔ بلترامی (بدون وابستگی به پارامتر) در [۶] آمده است. آنها ابتدا به کمک یک معادلهٔ دیفرانسیل معمولی با زمان مختلط، نتیجه را برای μی تحلیلی حقیقی ثابت می‌کنند و سپس با به کار بستن فنون استاندارد تقریب، وجود جواب را در حالت کلی نشان می‌دهند. به مسألهٔ کلی انتگرالپذیری ساختارهای تقریباً مختلط هموار در قضیه‌ای بنیادی از نیولندر و نیرنبرگ پاسخ داده شده است [۱۵]؛ این قضیه در حالت هموار دوبعدی اثبات ساده‌ای از انتگرالپذیری را به‌دست می‌دهد.

جامعترین بررسی نگاشتهای شبه‌همدیس را می‌توان در [۱۲] یافت. برای ملاحظهٔ مدخلی کوتاه و عالی بر این موضوع، شامل اثباتی از قضیهٔ ۱ مقالهٔ حاضر و نیز کاربردهایی در نظریهٔ فضاهای تایشمولر، [۲] را ببینید. موضوع جالب توجه دیگر در این میان، نظریهٔ نگاشتهای شبه‌همدیس در بعدهای بالاتر است [۱۰].

نظریهٔ فضاهای تایشمولر عبارت است از بررسی فضای دگردیسیهای شبه‌همدیس یک رویهٔ ریمانی. این نظریه از لحاظ تاریخی در نتیجهٔ تلاش برای حل مسألهٔ رده‌بندی ساختارهای مختلط روی رویه‌های فشرده به وجود آمد. برای آشنایی با این نظریه و ارتباط آن با دیفرانسیلهای درجهٔ دوم و گروههای فوخسی می‌توان به [۱]، [۸]، یا [۱۱] مراجعه کرد.

دینامیک مختلط قلمرو پهناوری است که کاربرد نگاشتهای شبه‌همدیس در آن موفقیت‌آمیز بوده است. در [۱۳] شرح بسیار خوبی برای آشنایی با نظریهٔ کلاسیک ژولیا ـ فاتو آمده است. کاربردهای استاندارد نگاشتهای شبه‌همدیس در دینامیک مختلط را می‌توان در [۷]، [۱۶]، و [۱۸] یافت. برای ملاحظهٔ توصیفی کلی از کاربرد نگاشتهای شبه‌همدیس در دینامیک (و نیز چند شاخهٔ دیگر) مرجع [۱۹] را نگاه کنید. فنون نظریهٔ فضاهای تایشمولر کاربردهای زیبایی در نظریهٔ باز بهنجارش[1] دارند، که برای ملاحظهٔ آن خواننده را به فصل آخر کتاب [۵] رجوع می‌دهیم.

ضمیمهٔ الف. نمادهای متغیر مختلط بر رویه‌ها

فرض کنیم X یک رویهٔ هموار C^{∞}، همبند، و جهتپذیر باشد. کلاف مماس حقیقی X، TX، و دوگان آن $T^{*}X$ را که کلافهای برداری از رتبهٔ ۲ اند می‌توان با گرفتن حاصلضرب تانسوری $T_{\mathbb{C}}X = TX \otimes \mathbb{C}$ و $T_{\mathbb{C}}^{*}X = T^{*}X \otimes \mathbb{C}$ به‌صورت مختلط درآورد. بنابراین، در یک مختصات موضعی (x, y) بر X، مقاطع نوعی $T_{\mathbb{C}}X$ و $T_{\mathbb{C}}^{*}X$ به‌ترتیب به شکل

1. renormalizatoin

$$u(x,y)\frac{\partial}{\partial x}+v(x,y)\frac{\partial}{\partial y}$$

و

$$u(x,y)dx+v(x,y)dy$$

هستند، که در آن u و v توابعی هموار از x و y با مقادیر مختلط‌اند. دو مقطع خاص

$$d\bar{z}=dx-idy \quad , \quad dz=dx+idy$$

را در نظر می‌گیریم که در هر مختصات موضعی (x,y) پایه‌ای برای $T_{\mathbb{C}}^{*}X$ تشکیل می‌دهند. برای پایهٔ دوگان در همین مختصات، نمادهای $\frac{\partial}{\partial z}$ و $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ را برمی‌گزینیم:

$$\begin{array}{ll} dz(\frac{\partial}{\partial z})=1 \quad , & dz(\frac{\partial}{\partial \bar{z}})=0 \\ d\bar{z}(\frac{\partial}{\partial z})=0 \quad , & d\bar{z}(\frac{\partial}{\partial \bar{z}})=1 \end{array}$$

بنابراین

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}=\frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}) \quad \text{و} \quad \frac{\partial}{\partial z}=\frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y})$$

می‌توان $\frac{\partial}{\partial z}$ و $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ را عملگرهای دیفرانسیلی تلقی کرد که بر توابع هموار $f:U\to\mathbb{C}$ عمل می‌کنند، که در آن U قلمرو مختصات موضعی (x,y) است. این عمل به سادگی با روابط

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}=\frac{1}{2}(\frac{\partial f}{\partial x}+i\frac{\partial f}{\partial y}) \quad \text{و} \quad \frac{\partial f}{\partial z}=\frac{1}{2}(\frac{\partial f}{\partial x}-i\frac{\partial f}{\partial y})$$

تعریف می‌شود. از این پس برای سادگی مشتقات جزئی را با اندیس نشان می‌دهیم، مانند f_z برای $\frac{\partial f}{\partial z}$ و غیره. اکنون در هر مختصات موضعی (x,y) دیفرانسیل تابع f در رابطهٔ

$$df=f_x dx+f_y dy=f_z dz+f_{\bar{z}}d\bar{z}$$

صدق می‌کند.

در حالتی که X ساختار مختلطی دارد که آن‌را به یک رویهٔ ریمانی مبدل می‌کند، زیرفضای یک بعدیِ مختلطِ پدیدآمده توسط $\frac{\partial}{\partial z}$ نسبت به هر مختصات موضعی $z=x+iy$ زیرکلافی از $T_{\mathbb{C}}X$ تعریف می‌کند که آن‌را با $T_{hol}X$ نشان می‌دهیم. این مطلب مستقیماً از تحلیلی بودن تعویض مختصات روی X نتیجه می‌شود. $T_{hol}X$ به عنوان یک کلاف حقیقی رتبهٔ ۲ از طریق نگاشت $\frac{\partial}{\partial x}\mapsto\frac{\partial}{\partial z}$ و $\frac{\partial}{\partial y}\mapsto i\frac{\partial}{\partial z}$ با TX یکریخت می‌شود. از معادلات کوشی-ریمان به سادگی نتیجه می‌شود که تابع f بر X تحلیلی است اگر و تنها اگر $f_{\bar{z}}=0$ یا df به کلاف دوگان $T_{hol}^{*}X$ تعلق داشته باشد.

به حالتِ رویهٔ هموار بازگردیم. یک متریک ریمانی اندازه‌پذیر بر X را می‌توان موضعاً به‌صورت

$$g=Edx^2+2Fdxdy+Gdy^2 \qquad (۸)$$

نوشت که در آن E، F، و G توابعی اندازه‌پذیر (به مفهوم لبگ) از x و yاند و تقریباً همه‌جا $E>0$، $G>0$، و $EG-F^2>0$. طول یک بردار مماس

$$\mathbf{v}=u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}$$

از رابطهٔ

$$\|\mathbf{v}\|^2=Eu^2+2Fuv+Gv^2$$

به دست می‌آید. هرگاه از نمادهای مختلط استفاده کنیم، بردار $\mathbf{v}$ نمایشی به‌صورت

$$\mathbf{v}=(u+iv)\frac{\partial}{\partial z}+(u-iv)\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \qquad (۹)$$

خواهد داشت. با محاسبهٔ مستقیم معلوم می‌شود که g در (۸) را می‌توان به شکل

$$g(z)=\gamma(z)|dz+\mu(z)d\bar{z}|^2 \qquad (۱۰)$$

نوشت که در آن $z=x+iy$، و

$$\gamma(z)=\frac{1}{2}\left(\frac{E+G}{2}+\sqrt{EG-F^2}\right)$$

$$\mu(z)=\frac{1}{\gamma(z)}\left(\frac{E-G}{4}+i\frac{F}{2}\right)$$

به آسانی می‌توان دید که تقریباً همه‌جا $\gamma>0$ و $|\mu|<1$. عبارت (۱۰) بدین معنی است که طول بردار مماس $\mathbf{v}$ در (۹) از رابطهٔ

$$\|\mathbf{v}\|^2=\gamma|(u+iv)+\mu(u-iv)|^2$$

به دست می‌آید.

متریک g را در مختصات موضعی z همدیس می‌نامیم اگر $\mu(z)\equiv 0$، که در این‌صورت g به شکل $\gamma(z)|dz|^2$ در می‌آید. این مفهوم بر رویه‌ای که تعویض مختصات آن تنها توابعی هموارند خوش تعریف نیست. در واقع، اگر $z\mapsto w$ چنین تعویض مختصاتی باشد، آنگاه g برحسب w به شکل

$$g(w)=\gamma(w)|z_w dw+z_{\bar{w}}d\bar{w}|^2=\gamma(w)|z_w|^2|dw+\frac{z_{\bar{w}}}{z_w}d\bar{w}|^2$$

در خواهد آمد که برحسب w همدیس نیست. اما اگر X به ساختاری مختلط مجهز باشد که آن‌را به یک رویهٔ ریمانی بدل کند، تعویض مختصات تابعی تحلیلی است و بنابراین $z_{\bar{w}}=0$، که نشان می‌دهد متریک برحسب w نیز همدیس خواهد بود. نتیجه آنکه بر یک رویهٔ ریمانی، مفهوم یک متریک همدیس به انتخاب مختصات موضعی خاص بستگی ندارد.

ضمیمهٔ ب. همسانریختیهای شبه‌همدیس

دراین ضمیمه چند تعریف معادل برای شبه‌همدیسی را در مورد همسانریختیهای صفحه می‌آوریم. به‌کمک این تعاریف «موضعی» می‌توان مفهوم شبه‌همدیس بودن یک نگاشت را بر رویه‌های ریمانی را تعریف کرد (مراجع [۲] و [۱۲] را نیز ببینید).

در مطالب زیر، همواره فرض بر آن ست که $f:U\to V$ یک همسانریختی جهت نگهدار بین دو دامنه در صفحه ست.

می‌گوییم همسانریختی f مشتقات جزئی تعمیم‌یافته دارد هرگاه توابعی انتگرالپذیر چون ξ و η وجود د شته باشند به‌طوری که به‌ازای هر تابع هموار

$h : U \to \mathbb{C}$ با تکیه‌گاه فشرده، داشته باشیم

$$\int_U \xi h\, dxdy = -\int_U f h_z\, dxdy$$

$$\int_U \eta h\, dxdy = -\int_U f h_{\bar z}\, dxdy$$

در این حالت به مفهوم تعمیم‌یافته می‌نویسیم $f_z = \xi$ و $f_{\bar z} = \eta$.

می‌گوییم f مشتقات جزئی تعمیم‌یافتهٔ موضعاً مربع‌ـانتگرالپذیر دارد، و می‌نویسیم $f \in W^1_{loc}$، اگر مشتقات جزئی تعمیم‌یافتهٔ f_z و $f_{\bar z}$ در U به‌ازای هر زیرمجموعهٔ فشردهٔ $E \subset U$ در

$$\int_E |f_z|^2 dxdy < \infty \quad \text{و} \quad \int_E |f_{\bar z}|^2 dxdy < \infty$$

صدق کنند.

همسانریختی f مطلقاً پیوسته بر خطوط نامیده می‌شود هرگاه تحدید آن به تقریباً هر خط افقی و عمودی در U مطلقاً پیوسته باشد. از آنالیز حقیقی کلاسیک نتیجه می‌شود که تقریباً همه‌جا در U، مشتقات جزئی f_x و f_y، و بنابراین f_z و $f_{\bar z}$ (به مفهوم عادی) وجود دارند.

یک طوقه زیرمجموعه‌ای از صفحه است که با یک طوقهٔ «مُدور» $A(1,r) = \{z : 1 < |z| < r\}$ همسانریخت باشد. قرار می‌دهیم $A(1,\infty) = \{z : |z| > 1\}$. از قضیهٔ یکنواخت‌سازی نتیجه می‌شود که هر طوقهٔ A به‌طور همدیس با یک $A(1,r)$ یکتا همسانریخت است، که در آن $1 < r \leqslant \infty$. در این‌صورت پیمانهٔ A را با رابطهٔ

$$\mathrm{mod}\,(A) = \frac{1}{2\pi}\log r$$

تعریف می‌کنیم، که $\log\infty = \infty$. نتیجه آنکه پیمانه یک ناوردای همدیس است: دو طوقهٔ A و A' به‌طور همدیس با یکدیگر همسانریخت‌اند اگر و تنها اگر $\mathrm{mod}\,(A) = \mathrm{mod}\,(A')$

قضیهٔ زیر را می‌توان به عنوان تعریف شبه‌همدیسی به‌کار برد.

قضیهٔ ب.۱. فرض کنیم $K \geqslant 1$. برای یک همسانریختی جهت نگهدار $f : U \to V$ شرایط زیر هم‌ارزند:

(i) $f \in W^1_{loc}$ و تقریباً همه‌جا بر U، $|\frac{f_{\bar z}}{f_z}| \leqslant \frac{K-1}{K+1}$.

(ii) f مطلقاً پیوسته بر خطوط است و تقریباً همه‌جا بر U، $|\frac{f_{\bar z}}{f_z}| \leqslant \frac{K-1}{K+1}$.

(iii) به‌ازای هر **طوقهٔ** $A \subset U$،

$$K^{-1}\mathrm{mod}(A) \leqslant \mathrm{mod}\,(f(A)) \leqslant K\ \mathrm{mod}\,(A)$$

(iv) به‌ازای تقریباً هر x در U،

$$\limsup_{r\to 0} \frac{\max\{|f(x)-f(y)| : |x-y| = r\}}{\min\{|f(x)-f(y)| : |x-y| = r\}} \leqslant K$$

همسانریختی f را **Kـشبه‌همدیس** می‌نامیم هرگاه در یکی از شرایط بالا (و بنابراین در همهٔ آنها) صدق کند.

تعریف. فرض کنیم $f : X \to Y$ یک همسانریختی جهت نگهدار بین رویه‌های ریمانی باشد. f را **Kـشبه‌همدیس** می‌نامیم اگر نمایش موضعی آن در هر مختصات روی X و Y یک همسانریختی Kـشبه‌همدیس بین دامنه‌های صفحه باشد. f را **شبه‌همدیس می‌نامیم هرگاه به‌ازای یک $K \geqslant 1$**، Kـ شبه‌همدیس باشد.

به‌سادگی دیده می‌شود که این تعریف با تعریفی که پیشتر برحسب برگردان ساختارهای همدیس دادیم یکی است.

در قضیهٔ زیر ویژگیهای اساسی همسانریختیهای شبه‌همدیس خلاصه شده است.

قضیهٔ ب.۲. (الف) اگر $f : X \to Y$ یک همسانریختی K_1ـشبه‌همدیس و $g : Y \to Z$ یک همسانریختی K_2ـشبه‌همدیس باشد، آنگاه $g \circ f : X \to Z$ یک همسانریختی K_1K_2ـشبه‌همدیس است.

(ب) $f : X \to Y$ یک همسانریختی Kـشبه‌همدیس است اگر و تنها اگر $f^{-1} : Y \to X$ چنین باشد.

(ج) $f : X \to Y$ یک همسانریختی ۱ـشبه‌همدیس است اگر و تنها اگر همدیس باشد.

(د) اگر f شبه‌همدیس باشد، آنگاه تقریباً همه‌جا $f_z \neq 0$.

(هـ) اگر f شبه‌همدیس باشد، مجموعه‌های با اندازهٔ صفر را به روی مجموعه‌های با اندازهٔ صفر می‌نگارد.

سپاسگزاری

لازم می‌دانیم از آقایان سیاوش شهشهانی، فردریک گاردینر، و برنارد مسکیت به‌خاطر پیشنهادهای ارزشمندشان برای بهبود کیفیت توصیفی مقاله تشکر کنیم.

مراجع

1. W. Abikoff, *The Real Analytic Theory of Teichmüller Spaces*, Lecture Notes in Mathematics 820, Springer-Verlag (1980).
2. L. Ahlfors, ***Lectures on Quasiconformal Mappings***, Van Nostrand- Reinhold, Princeton (1966), reprint.
3. ———, and L. Bers, "Riemann mapping's theorem for variable metrics", *Annals of Math.*, **72** (1960) 385-404.
4. E. Beltrami, "Ricerce di analisis applicata alla geometria", *G. Mat. Battaglini*, **2** (1864).
5. W. de Melo, and S. van Strien, *One-Dimensional Dynamics*, Springer- Verlag (1993).
6. A. Douady, and A. Fathi, Notes on quasiconformal mappings, University of Paris 11, Orsay (1990).
7. A. Douady, and J. Hubbard, "On the dynamics of polynomial-like mappings", *Ann. Sc. Ecole Norm. Sup.*, (4)**20**(1985) 287-343.
8. F. Gardiner, *Teichmüller Theory and Quadratic Differentials*, Wiley-Interscience (1987).
9. C. F. Gauss, *Werke IV*, 193-216.
10. F. Gehring, "Topics in quasiconformal mappings", *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Berkeley, vol.1* (1986) 62-80.

11. O. Lehto, *Univalent Functions and Teichmüller Spaces*, Springer- Verlag (1987).

12. ______, and K. Virtanen, *Quasiconformal Mappings in the Plane*, Springer-Verlag (1973).

13. J. Milnor, *Dynamics in One Complex Variable: Introductory Lectures*. Institute for Mathematical Sciences, SUNY Stony Brook (1990).

14. C. Morrey, "On the solutions of quasi-linear elliptic partial differential equations", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **43**(1938) 126-166.

15. A. Newlander, and L. Nirenberg, "Complex analytic coordinates in almost complex manifolds", *Annals of Math.*, **65**(1957) 391-404.

16. M. Shishikura, "On the quasiconformal surgery of rational functions". *Ann. Sc. Ecole Norm. Sup.* (4)**20**(1987) 1-29.

17. D. Smith, *Source Book in Mathematics*, McGraw-Hill (1922).

18. D. Sullivan, "Quasiconformal homeomorphisms and dynamics, I: Solution of the Fatou-Julia problem on wandering domains". *Annal of Math.*, **122**(1985) 401-418.

19. ______, "Quasiconformal homeomorphisms in dynamics, topology, and geometry", *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Berkeley, vol.II*, (1986) 1216-1228.

* * * * * *

* سعید ذاکری، دانشگاه ایالتی نیویورک در استونی بروک، آمریکا

zakeri@math.sunysb.edu

* محمود زینالیان، دانشگاه شهری نیویورک، آمریکا

mzeinali@email.gc.cuny.edu