نشر ریاضی، سال ۸، شمارهٔ ۱، صص ۱۸ـ۲۵

دریچه‌ای به حلقه‌های تقسیم*

سعید اکبری*

از یک دانشجوی سال آخر کارشناسی ریاضی بخواهید حلقه‌ای مثال بزند، بدون شک مثالهای زیادی بر زبان خواهد آورد. سپس از وی بخواهید حلقه‌ای مثال بزند که چند خاصیت اضافی مثل آرتینی، نوتری، و غیر جابه‌جایی بودن را نیز دارا باشد. وی حتماً برای سؤالات شما جوابی خواهد داشت زیرا در دروس جبر مقدماتی، روش ساخت حلقه‌های مختلف را دیده است. حتی اگر چند روزی به او فرصت دهید شاید بتواند حلقه‌ای بسازد که قبلاً هرگز آن را ندیده بوده است. حال لغت تقسیم را به حلقه اضافه کرده سؤال را تکرار کنید. یادآوری می‌کنیم که منظور از حلقهٔ تقسیم، حلقه‌ای است که هر عنصر ناصفر آن وارون‌پذیر است. احتمالاً تنها چیزی که در این مورد به فکر این دانشجو خواهد رسید حلقهٔ کواترنیونها [=چهارگانها]ی حقیقی است. به او چند روزی فرصت دهید تا مثالهای دیگری نیز پیدا کند. اگر دانشجوی مبتکری باشد حداکثر کاری که خواهد کرد این است که ضرایب کواترنیونها را تغییر بدهد و مثلاً کواترنیونهای با ضرایب گویا را بسازد، و بدون تردید شاهد کار دیگری از او نخواهیم بود البته به شرطی که میدانها [=هیأتها] را کنار بگذاریم. ولی این امر دلیل بر بی‌استعدادی او نیست زیرا جالب است که بدانید برای ساختن اولین حلقهٔ تقسیم یعنی همان کواترنیونهای حقیقی که ما امروزه آن را به‌سادگی به‌کار می‌گیریم، همیلتن ریاضیدان معروف ایرلندی ۱۲ سال تلاش مستمر کرده بود و هم‌اکنون نیز که حدود ۱۵۰ سال از کشف کواترنیونها می‌گذرد فقط تعداد انگشت‌شماری روش ساخت برای این‌گونه حلقه‌ها پیدا شده است. شاید بد نباشد در اینجا تاریخچه‌ای از زندگی همیلتن و چگونگی کشف کواترنیونها را بازگو کنیم.

سر ویلیام رُوان همیلتن[1] (۱۸۰۵ـ۱۸۶۵) در شهر دابلین ایرلند چشم به جهان گشود. در کودکی و نوجوانی، به‌سبب استعداد خارق‌العاده‌اش در زبان‌آموزی، بر هفت زبان تسلط یافت و با شش زبان دیگر، از جمله فارسی، نیز آشنا شد. اما در حدود ۱۴ سالگی به ریاضیات و نجوم روی آورد. در سال ۱۸۲۷ در حالی که هنوز یک دانشجوی کارشناسی بیش نبود به سمت منجم سلطنتی منصوب شد.

همیلتن در مسیر مطالعات ریاضی خود پس از تعمق در ساختمان اعداد مختلط در صدد بر آمد جبری سه‌بعدی روی اعداد حقیقی بسازد که شبیه اعداد مختلط، خاصیت ضربی نرم را نیز داشته باشد یعنی نرم حاصلضرب دو عنصر برابر حاصلضرب نرمهای آنها باشد. برای این منظور سه‌تاییهای

1. Sir William Rowan Hamilton

به‌صورت $a + bi + cj$ را که ضرایب آن اعداد حقیقی هستند در نظر گرفت و در پی یافتن ضربی روی این فضا بر آمد که اولاً بسته باشد و ثانیاً خاصیت ضربی نرم را نیز داشته باشد. ولی تلاشهای فراوانش در این راه به جایی نرسید. همیلتن می‌نویسد به قدری روی تعریف این حاصلضرب فکر کرده بودم که وقتی صبحها برای صرف صبحانه با خانواده‌ام سر یک میز می‌نشستیم دو فرزند کوچکم به من می‌گفتند «پدر، آیا توانستی سه‌تاییها را در هم ضرب کنی؟» و من هم همواره با حالتی غمگین جواب می‌دادم «نه، فقط می‌توانم آنها را جمع و تفریق کنم.»

البته امروزه دلیل بی‌ثمر بودن این کارهای همیلتن بر ما آشکار است زیرا هورویتس ثابت کرده است تنها فضاهایی خاصیت ضربی نرم را می‌پذیرند که بعد آنها ۱، ۲، ۴ و یا ۸ باشد در حالی که فضای مورد آزمایش همیلتن سه‌بعدی بود. کاری که وی در اولین مرحله انجام داد این بود که j^2 را دقیقاً مثل i^2 برابر -1 و ij را برابر ji تعریف کرد. وقتی دو سه‌تایی را مثل زیر در هم‌ضرب می‌کرد

$$(a + ib + jc)(x + iy + jz) = (ax - by - cz) + i(ay + bx) + j(az + cx) + ij(bz + cy)$$

نمی‌دانست که ij را چه تعریف کند. چون $(ij)^2 = 1$، او حدس زد که احتمالاً باید $ij = 1$ یا $ij = -1$. اما به‌راحتی می‌توانید ببینید که در هیچ‌یک از این حالات خاصیت ضربی نرم برقرار نیست. در مرحلهٔ دوم، حالت خاص زیر را در نظر گرفت

$$(a + ib + jc)^2 = a^2 - b^2 - c^2 + 2iab + 2jac + 2ijbc$$

سپس با محاسبهٔ مجموع مربعات ضرایب ۱، i و j در سمت راست و با توجه به‌تساوی

$$(a^2 - b^2 - c^2)^2 + (2ab)^2 + (2ac)^2 = (a^2 + b^2 + c^2)^2$$

با خود گفت اگر قرار باشد خاصیت ضربی نرم برقرار باشد باید ij را برابر صفر تعریف کرد ولی این نیز با ضربی بودن نرم در تناقض است. پس متوجه این مطلب شد که احتمالاً i و j نباید با هم جابه‌جا شوند و تعریف کرد: $ij = k$ و $ji = -k$. همیلتن دو عنصر خاص $a + ib + jc$ و $x + ib + jc$ را در هم ضرب نمود و نتیجهٔ ضرب چنین بود

$$ax - b^2 - c^2 + i(a + x)b + j(a + x)c + k(bc - cb)$$

این محاسبه به وی نشان داد که ضریب k هنوز صفر است و چنین چیزی برای وی دلگرم‌کننده بود زیرا به نظر می‌رسید که ضرب روی این فضا، عملی بسته است. حال با شجاعت کامل دو عنصر دلخواه را مطابق زیر در هم ضرب کرد

$$(a + ib + jc)(x + iy + jz) = (ax - by - cz) + i(ay + bx) + j(az + cx) + k(bz - cy)$$

و با خود گفت آیا تساوی زیر برقرار است؟

$$(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) = (ax - by - cz)^2 + (ay + bx)^2 + (az + cx)^2$$

خیر، طرف راست، جملهٔ $(bz-cy)^2$ را کم دارد، اما این دقیقاً مربع ضریب k است. درست در همین موقع بود که ایدهٔ در نظرگرفتن یک فضای چهار بعدی به‌جای سه‌بعدی به او الهام شد و کواترنیونهای حقیقی متولد گردیدند. این کشف مهم در ۱۶ اکتبر ۱۸۴۳ به‌وقوع پیوست. همیلتن به دوستش گریوز[1] می‌نویسد «اخیراً اطلاع یافتم که در مجلهٔ ریاضی کیمبریج مقاله‌ای دربارهٔ هندسهٔ تحلیلی در ابعاد n بعدی به قلم آقای کیلی به چاپ رسیده است ولی متأسفانه هنوز نمی‌دانم که کارهای کیلی تا چه اندازه با کارهای من شباهت دارد».

چنین به نظر می‌رسد که همیلتن و کیلی هم‌زمان و مستقلاً به مفهوم هندسهٔ چهار بعدی دست یافته بودند. همیلتن می‌نویسد در ۱۶ اکتبر از فرط خوشحالی کارهایی می‌کردم که اصلاً به ارادهٔ خودم نبود، مثلاً هنگامی که از کنار پل بروگهم رد می‌شدم با یک چاقو فرمولهای اساسی زیر را روی سنگ پل حک کردم

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

که این در واقع جواب مسأله است.

کواترنیونهای حقیقی که همیلتن آنها را ساخت نخستین مثال از حلقه‌های تقسیم غیرجابه‌جایی‌اند.

امروزه کارهای مهم همیلتن در دینامیک به‌خوبی شناخته شده است و اصول وی پایهٔ فیزیک مدرن به‌شمار می‌رود. همچنین کواترنیونها در نسبیت خاص، معادلات ماکسول، مکانیک کوانتومی و در بیان معادلات دیراک برای الکترونها نقش اساسی ایفا می‌کنند. خوانندهٔ علاقه‌مند برای اطلاع بیشتر می‌تواند به مقالهٔ [۲۴] رجوع کند.

اکنون می‌خواهیم به‌طورکلی دربارهٔ ساختمان حلقه‌های تقسیم و ویژگیهای گروه ضربی آنها صحبت کنیم. قبل از شروع بحث، به تعاریف و نمادگذاریهایی در مورد حلقه‌های تقسیم نیاز داریم که آنها را در همین‌جا بیان می‌کنیم. یادآور می‌شویم که مرکز حلقه، مجموعهٔ عناصری از حلقه است که با همهٔ عناصر آن جابه‌جا می‌شوند. فرض کنید D یک حلقهٔ تقسیم با مرکز F باشد. به‌آسانی دیده می‌شود که F یک میدان [=هیأت] است و D روی F، با تعریف حاصلضرب اسکالر طبیعی، یک فضای برداری می‌شود. اگر بعد D روی F متناهی باشد، گوییم که D روی مرکزش متناهی بعد است. فرض کنید $H \subseteq G \subseteq D$ دو مجموعه باشند. عنصر $a \in G$ را روی H رادیکال گوییم هرگاه عدد طبیعی n وجود داشته باشد به‌طوری که $a^n \in H$، و G را روی H رادیکال گوییم هرگاه هر عنصر G روی H رادیکال باشد. عنصر a در یک حلقهٔ تقسیم را روی مرکز جبری گوییم هرگاه ریشهٔ یک معادلهٔ یکین[2] با ضرایب در مرکز باشد. زیرمجموعهٔ G از D را روی F جبری گوییم هرگاه هر عضو G روی F جبری باشد و حلقهٔ تقسیم D را جبری نامیم هرگاه هر عنصر آن روی مرکز، جبری باشد. حلقهٔ تقسیم D موضعاً متناهی نامیده می‌شود هرگاه حلقهٔ تقسیم تولیدشده توسط مرکز و هر تعداد متناهی از عناصر، به‌عنوان فضای برداری روی مرکز، متناهی بعد باشد. حلقهٔ تقسیم متناهی بعد D را دوری گوییم هرگاه شامل یک زیرهیأت ماکسیمال K باشد به‌طوری که K/F توسیعی دوری شود. اگر D یک حلقهٔ تقسیم باشد قرار می‌دهیم $D^* = D - \{0\}$. واضح است که D^* تحت ضرب یک گروه است. اگر $x, y \in D^*$ عنصر $xyx^{-1}y^{-1}$ را یک جابه‌جاگر ضربی گوییم

و گروه مشتق D^* یعنی گروه تولیدشده توسط تمام جابه‌جاگرهای ضربی را با D' نمایش می‌دهیم. زیرگروه N از D^* را زیرنرمال گوییم هرگاه زیرگروههای $N = N_k \lhd N_{k-1} \lhd \cdots \lhd N_1 \lhd D^*$ وجود داشته باشند که در اینجا N_{i+1} زیرگروه نرمالی از N_i است. اگر D یک حلقهٔ تقسیم باشد، آنگاه مجموعهٔ ماتریسهای $n \times n$ با درایه‌های D را با $M_n(D)$ و مجموعهٔ عناصر وارون‌پذیر $M_n(D)$ را با نماد $GL_n(D)$ نمایش خواهیم داد.

سیر تاریخی پیشرفت در زمینهٔ حلقه‌های تقسیم

پس از کشف کواترنیونها توسط همیلتن، تلاش برای ساختن حلقه‌های تقسیم دیگر آغاز شد. در سال ۱۸۷۷ فروبنیوس ثابت کرد که هر حلقهٔ تقسیم با مرکز اعداد حقیقی و جبری روی مرکز، با یکی از سه حلقهٔ اعداد حقیقی، اعداد مختلط و یا کواترنیونها یکریخت است. در آن روزها هیچ‌کس نمی‌توانست تصور کند که حلقه‌های تقسیم با بعد نامتناهی روی مرکز نیز وجود دارند تا اینکه در سال ۱۸۹۹ هیلبرت با استفاده از سریهای توانی نخستین حلقهٔ تقسیم با بعد نامتناهی را کشف کرد. البته هیلبرت در مقاله‌ای که در آن سال نوشت سعی داشت حلقهٔ تقسیم غیر جابه‌جایی و مرتبی را معرفی کند ولی ظاهراً در مقاله‌اش اشکالی وجود داشت و آن این بود که حلقه مرتب نبود. پس از مدتی به اشتباهی که رخ داده بود پی برد و در سال ۱۹۰۳ مقاله‌اش را تصحیح و مجدداً منتشر کرد. بنابراین به گفتهٔ کُن[1]، حلقه‌های تقسیم با بعد نامتناهی را باید فرزندان قرن بیستم به حساب آورد. در سال ۱۹۰۵ بود که ریاضیدان معروف ودربرن[2] قضیهٔ بنیادی و تکان‌دهندهٔ خود را ثابت کرد که بیان می‌کرد هر حلقهٔ تقسیم متناهی، میدان [=هیأت] است. همچنین وی ثابت کرد که اگر حلقهٔ A ایده‌آل دوطرفه نداشته باشد و آرتینی راست باشد آنگاه حلقهٔ تقسیم D وجود دارد به‌طوری که $A \simeq M_n(D)$ و با استفاده از این به نتیجهٔ مهمی دست یافت که مضمون آن چنین است: «بعد هر حلقهٔ تقسیم متناهی‌بعد روی مرکزش همواره مربع کامل است.»

در سال ۱۹۰۶، دیکسن تصمیم گرفت این حلقه‌ها را به‌طور اسلوبمند بررسی کند و در سال ۱۹۱۴ روشی جالب توجه برای ساختن یک دستهٔ نامتناهی از این حلقه‌ها با استفاده از توسیعهای دوری میدانها عرضه کرد. در آن زمان حدس زده می‌شد که هر حلقهٔ تقسیم با بعد متناهی، یا دوری است یا حداقل دارای یک زیرمیدان ماکسیمال می‌باشد که توسیع گالوای مرکز است. در سال ۱۹۳۲ آلبرت نخستین حلقهٔ تقسیم غیر دوری را عرضه کرد و آمیتسر[3] در سال ۱۹۷۲ یک دستهٔ نامتناهی حلقهٔ تقسیم معرفی نمود که هیچ‌یک شامل یک زیرمیدان ماکسیمال گالوا روی مرکز نبود و به این ترتیب حدس اخیر غلط از آب درآمد. یک حدس قدیمی در این مورد وجود دارد مبنی بر اینکه اگر D یک حلقهٔ تقسیم با مرکز F، و بعد D روی F مربع یک عدد اول باشد آنگاه D دوری است. این حدس هنوز رد یا اثبات نشده است. اسکولم[4] و نوتر در سال ۱۹۲۷ یک قضیهٔ اساسی و پر اهمیت را در مورد رده‌بندی همریختیهای میان دو حلقهٔ ساده و به‌ویژه دو حلقهٔ تقسیم به اثبات رساندند. این قضیه در حالتی که دو حلقهٔ تقسیم متناهی‌بعد هم‌مرکز داشته باشیم، چنین می‌گوید: «اگر D یک حلقهٔ تقسیم متناهی‌بعد با مرکز F باشد و $f: D \to D$ یک Fـجبر همریختی باشد آنگاه f یک همریختی

1. Graves 2. monic

1. Cohn 2. Wedderburn 3. Amitsur 4. Skolem

درونی است یعنی $a \in D$ وجود دارد به‌طوری که به‌ازای هر $x \in D$ داریم «$f(x) = axa^{-1}$».

این قضیه در جبر غیر جابه‌جایی کاربردهای فراوانی پیدا کرده است. سه سال بعد آلبرت، هسه[1]، براوئر، و نوتر نشان دادند که هر حلقهٔ تقسیم با مرکز Q و بعد نامتناهیْ دوری است. در واقع اینها از همان ساختاری که دیکسن معرفی کرده بود استفاده کردند. در حدود همین سالها بود که کُته[2] حلقهٔ تقسیمی با بعد نامتناهی و موضعاً متناهی ارائه داد. او دنباله‌ای از حلقه‌های تقسیم با مرکز یکسان در نظر گرفت به‌طوری که بعدهای آنها روی مرکز دو به‌دو نسبت به هم اول بودند و سپس با تانسور کردن هر تعداد متناهی از آنها و اجتماع گرفتن، چنین حلقهٔ تقسیمی را ساخت [۲۳]. لازم به توضیح است که اگر D_1 و D_2 دو حلقهٔ تقسیم با مرکز F باشند و بعد آنها نسبت به هم اول باشد آنگاه $D_1 \otimes_F D_2$ نیز حلقهٔ تقسیم خواهد بود. همچنین قضیهٔ جالب توجه تجزیهٔ اولیه برای حلقه‌های تقسیم چنین می‌گوید: اگر D یک حلقهٔ تقسیم متناهی‌بعد با مرکز F باشد و $[D : F] = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$ تجزیهٔ بعد به عوامل اول باشد آنگاه حلقه‌های تقسیم $D_1, \cdots, D_k$ همگی با مرکز F وجود دارند به‌طوری که $D \simeq D_1 \otimes_F \cdots \otimes_F D_k$ و D_iها با تقریب یکریختی یکتا هستند [۱۴]. با توجه به تعریف دیده می‌شود که هر حلقهٔ تقسیم موضعاً متناهی، جبری است و تنها ساختاری که تاکنون برای حلقه‌های تقسیم جبری پیدا شده است همان روش کُته است که بیان شد. مثال کُته باعث شد تا کوروش[3] در سال ۱۹۴۱ سؤال معروف خود را مطرح کند: «آیا هر حلقهٔ تقسیم جبری روی مرکز، موضعاً متناهی است؟»

امروزه این سؤال یکی از پرسشهای مهم در جبر غیر جابه‌جایی به‌شمار می‌رود و جوابی مثبت به این سؤال، صحت و سقم بسیاری از حدسیات دیگر از جمله حدس هرشتاین[4] و سؤال جیکوبسن[5] را که به‌زودی در مورد آنها صحبت خواهیم کرد روشن خواهد کرد. از سال ۱۹۴۰ به بعد ریاضیدانان بزرگی مثل آمیتسر، براوئر، کارتان، هوا[6]، هرشتاین، جیکوبسن و کاپلانسکی ساختمان این حلقه‌ها را مورد بررسی قرار دادند و به نتایج مهمی دست یافتند. قضیهٔ معروف کارتان-براوئر-هوا یک ابزار کلیدی در حلقه‌های تقسیم به‌شمار می‌رود و چنین می‌گوید:

«اگر D یک حلقهٔ تقسیم با مرکز F، و S یک زیرحلقهٔ تقسیم آن باشد و به‌ازای هر $x \in D^*$، $xSx^{-1} \subseteq S$، آنگاه $S \subseteq F$ یا $S = D$.»

در سال ۱۹۵۰ کاپلانسکی قضیهٔ ودربرن را تعمیم داد و ثابت کرد که اگر D یک حلقهٔ تقسیم با مرکز F بوده و D روی F رادیکال باشد آنگاه D جابه‌جایی است. توجه کنید که این مطلب، قضیهٔ ودربرن را نتیجه می‌دهد زیرا اگر D متناهی باشد آنگاه D^* گروهی متناهی است و هر عضو آن مرتبه‌ای متناهی دارد. پس از گذشت سالها هرشتاین در سال ۱۹۷۸ حدس زیر را مطرح کرد [۱۹]:

«اگر D یک حلقهٔ تقسیم با مرکز F باشد و به‌ازای هر $x, y \in D^*$، عدد طبیعی $n(x,y)$ وجود داشته باشد به‌طوری که $(xyx^{-1}y^{-1})^{n(x,y)} \in F$، آنگاه D جابه‌جایی است.»

این حدس در واقع تعمیمی از قضیهٔ کاپلانسکی است زیرا می‌گوید که برای جابه‌جایی بودن D تنها کافی است جابه‌جاگرهای ضربی روی F رادیکال باشند. درستی حدس فوق در حالتی که $n(x,y) = 2^{m(x,y)}$، قبلاً توسط یوتچا و یاکوب [۲۶] به اثبات رسیده بود. هرشتاین درستی حدس خود را در حالتی که D متناهی‌بعد یا F ناشمارا باشد [۱۹ و ۲۰] ثابت کرده است. اخیراً درستی این حدس در حالتی که $n(x,y) = 2^{m(x,y)}3^{r(x,y)}$ بررسی شده است [۳]. هرشتاین حتی شجاعانه حدس خود را به‌شکل موضعی نیز بیان می‌کند [۱۹]:

«اگر D یک حلقهٔ تقسیم با مرکز F باشد و $a \in D^*$ و به‌ازای هر $x \in D^*$ عدد طبیعی $n(x,y)$ وجود داشته باشد به‌طوری که $(xax^{-1}a^{-1})^{n(x,y)} \in F$، آنگاه $a \in F$.»

دو سال قبل ریاضیدان ژاپنی چیبا در حالتی که F ناشمارا باشد به این حدس پاسخی مثبت داد [۱۱] ولی لازم به توضیح است که دو حدس اخیر در حالت کلی هنوز حل‌نشده باقی مانده‌اند.

اخیراً قضیهٔ کاپلانسکی را تعمیم داده و نشان داده‌اند که اگر D' روی F رادیکال باشد آنگاه D جابه‌جایی است [۴]. توجه کنید که در حدس هرشتاین مجموعهٔ جابه‌جاگرهای ضربی روی F رادیکال‌اند در حالی که در قضیهٔ فوق هر حاصل‌ضربی از جابه‌جاگرها نیز روی F رادیکال است ولی فرضیات قضیهٔ فوق از فرضیات قضیهٔ کاپلانسکی بسیار کمتر است. در کنار حدس قبلی، هرشتاین حدس زیر را نیز مطرح می‌کند که به‌خودی خود جالب است:

«اگر D یک حلقهٔ تقسیم با مرکز F، و N زیرگروه زیرنرمالی از D^* باشد به‌طوری که روی F رادیکال باشد آنگاه $N \subseteq F$.»

این حدس حتی در حالتی که N نرمال باشد نیز ثابت نشده است ولی درستی آن وقتی D متناهی‌بعد یا F ناشمارا باشد توسط خود هرشتاین به اثبات رسیده است [۱۹ و ۲۰].

هُوا مطالب مهمی را در مورد گروههای ضربی حلقه‌های تقسیم به اثبات رساند. وی نشان داد که گروه ضربی یک حلقهٔ تقسیم غیر جابه‌جایی نمی‌تواند حل‌پذیر باشد. آمیتسر نیز تحقیقات ارزنده‌ای روی زیرگروههای متناهی حلقه‌های تقسیم انجام داد؛ او در سال ۱۹۵۵ در مقاله‌ای مفصل [۷]، تمام گروههای متناهی را که می‌توانند زیرگروه ضربی یک حلقهٔ تقسیم با مشخصهٔ صفر باشند رده‌بندی کرد. شاید برایتان جالب باشد که بدانید اگر حلقهٔ تقسیم D دارای مشخصهٔ $p \neq 0$ باشد آنگاه هر زیرگروه متناهی آن دوری است؛ اثبات این موضوع بسیار ساده است. فرض کنید $G < D^*$، و G متناهی باشد. حال حلقهٔ تولیدشده توسط Z_p و G را در نظر بگیرید؛ چون D مقسوم‌علیه صفر ندارد پس این یک حلقهٔ تقسیم متناهی است و لذا بنا بر قضیه ودربرن میدان است. ولی می‌دانیم که زیرگروههای متناهی میدانها دوری‌اند و لذا نتیجه می‌گیریم که G دوری است. همچنین به‌راحتی می‌توان نشان داد که زیرگروههای آبلی و متناهی حلقه‌های تقسیم دوری هستند. در سال ۱۹۷۷ لیچمن [۲۵] این سؤال را در مورد زیرگروههای ضربی حلقه‌های تقسیم مطرح می‌کند که آیا گروه ضربی یک حلقهٔ تقسیم غیر جابه‌جایی همواره شامل یک گروه آزاد دو مولدی است؟ این سؤال در حالتی که بعد D روی F متناهی باشد یا عنصری جبری مانند a وجود داشته باشد به‌طوری که $F(a)$ دارای F-خودریختی نابدیهی باشد، پاسخی مثبت دارد. لازم به توضیح است که در حالات خاص دیگر نیز جواب این سؤال مثبت بوده است [۱۵]. فرض کنید H حلقهٔ کواترنیونهای حقیقی و H' مشتق گروه ضربی آن باشد. با استفاده از قضیهٔ اسکولم-نوتر و قضیهٔ ۹۰ هیلبرت می‌توان نشان داد که هر

1. Hesse 2. Köthe 3. Kurosch 4. Herstein
5. Jacobson 6. Hua

عضوی که نُرم آن برابر یک است یعنی عنصری مانند $a + bi + cj + dk$ که در آن $a^۲ + b^۲ + c^۲ + d^۲ = ۱$، یک جابه‌جاگر ضربی است. از طرفی چون نُرم خاصیت ضربی دارد، بنابراین نرم هر جابه‌جاگر ضربی برابر یک است و لذا نتیجه می‌گیریم H' دقیقاً از عناصری تشکیل شده است که نرم آنها یک است. با استفاده از این خاصیت می‌توان دید که $H' = H''$. در [۱۶] نشان داده شده است که اگر N یک زیرگروه زیرنرمال غیرمرکزی از H^* باشد (یعنی درون مرکز قرار نداشته باشد) آنگاه $H' \subseteq N$ و در نتیجه N نرمال است. هرشتاین و اسکات [۱۸] حدس زده بودند که هر زیرگروه زیرنرمال از یک حلقهٔ تقسیم، نرمال است. در واقع همان‌طور که گفته شد این خاصیت برای H برقرار است ولی می‌توان نشان داد که برای حلقه‌های تقسیمی که مرکز آنها pـمیدان موضعی با ضابطهٔ $p > ۳$ باشد (pـمیدان موضعی، توسیع متناهی میدان p آدیک Q_p یا $F_q(x)$ است که در آن q توانی از p و F_q میدانی q عضوی است.) این ادعا درست نیست. گرینفیلد در مقالهٔ خود [۱۷] که در سال ۱۹۸۱ به چاپ رسیده است حدس زیر را مطرح می‌کند: «اگر D یک حلقهٔ تقسیم باشد، آنگاه هر زیرگروه زیرنرمال غیر مرکزی از D^* شامل یک زیرگروه نرمال غیر مرکزی از D^* است.» وی نشان می‌دهد که برای حلقه‌های تقسیم متناهی‌بعد که مرکز آنها pـمیدان موضعی ($p \neq ۲$) است، حدس فوق درست است.

یکی از مباحث مطرح در حلقه‌های تقسیم، بررسی ویژگیهای عناصر جبری آن است. می‌دانیم که در یک حلقهٔ جابه‌جایی اگر دو عنصر روی یک زیرحلقه جبری باشند، آنگاه مجموع و حاصلضرب آنها نیز روی آن زیرحلقه جبری است. ولی حلقه‌های تقسیم ساختمانی مرموز و پیچیده دارند و از این قانون تبعیت نمی‌کنند. در حقیقت می‌توان با استفاده از روش هیلبرت حلقهٔ تقسیمی ساخت به‌طوری که مجموع و حاصلضرب دو عنصر جبری روی مرکز، جبری نباشد. برای اینکه ویژگیهای جبری حلقه‌های تقسیم را بهتر بشناسیم دانستن این مطلب مهم است که جبری بودن چه زیرمجموعه‌هایی از D جبری بودن D را نتیجه خواهد داد. به هر یک از این زیرمجموعه‌ها، یک مجموعهٔ تعیین‌کنندهٔ جبری می‌گوییم. اخیراً ثابت شده است [۲] که هرگاه D' روی F جبری باشد آنگاه D روی F جبری است. بنابراین D' یک مجموعهٔ تعیین‌کنندهٔ جبری برای D است. به نظر می‌رسد که هر زیرگروه نرمال غیر مرکزی از D^* یک مجموعهٔ تعیین‌کنندهٔ جبری باشد و درستی این مطلب در حالتی که F ناشمارا باشد به اثبات رسیده است [۱].

شاید این سؤال جالب باشد که مجموعه‌های تعیین‌کنندهٔ جبری مینیمال کدامها هستند. در [۲] این حدس مطرح شده است که مجموعهٔ جابه‌جاگرهای ضربی یک مجموعهٔ تعیین‌کنندهٔ جبری است. در حالت ناشمارا بودن F صحت حدس فوق به اثبات رسیده است [۱].

در ارتباط با مسألهٔ جبری بودن حلقه‌ها، جیکوبسن در [۲۱] این پرسش را مطرح می‌کند که آیا جبری بودن D روی F، جبری بودن $M_n(D)$ روی F را ایجاب می‌کند؟

در سال ۱۹۵۶، آمیتسر ثابت کرد [۶] که برای Fهای ناشمارا سؤال فوق جوابی مثبت دارد. او برهانی نسبتاً طولانی بر اساس جمع ایده‌آلهای جبری ارائه داد. خواننده برای ملاحظهٔ اثباتی کوتاه و بدون استفاده از ایده‌آلهای جبری می‌تواند به [۱] رجوع کند.

در سالهای اخیر که هندسهٔ جبری غیر جابه‌جایی پیشرفت فراوان داشته است ناوردهایی از حلقه‌های تقسیم روی میدانهای تابعی خمها به‌دست آمده است. باید توجه داشت که ایدهٔ ایجاد تناظر طبیعی میان حلقه‌های ساده و اشیای هندسهٔ جبری از کارهای وت[1] سرچشمه می‌گیرد؛ او در سال ۱۹۳۴ تناظری یک‌به‌یک میان میدانهای تابعی از ردهٔ صفر و جبر کواترنیونی برقرار کرد و نشان داد که جبر کواترنیونی با حلقهٔ ماتریسها یکریخت می‌شود اگر و تنها اگر میدان تابعی آن گویا باشد. شاید این توضیح برای خواننده لازم باشد که جبر کواترنیونی، جبری شبیه دستگاه کواترنیونهاست که چنین تعریف می‌شود: فرض کنید K یک میدان باشد. قرار دهید $\alpha^۲ = a \in K^*$ و $\beta^۲ = b \in K^*$ و $\alpha\beta = -\beta\alpha$. دراین صورت Kـجبر تولیدشده توسط α و β را یک جبر کواترنیونی گوییم. پس از وت این ایده توسط چتلت (۱۹۴۴) و آمیتسر (۱۹۵۵) و رُکت[2] (۱۹۶۳) مورد مطالعه قرار گرفت و توسعه یافت. چتلت به هر حلقهٔ ساده یک واریتهٔ افکنشی که امروزه به واریتهٔ براوئر-سِوِری[3] موسوم است نسبت می‌دهد که این واریته یک فضای افکنشی است فقط وقتی که جبر متناظر آن جبر ماتریسها باشد. چند سال بعد آمیتسر مفهوم میدان شکافندهٔ نوعی را معرفی کرد و نشان داد که این مفهوم در واقع میدان توابع گویا روی واریتهٔ براوئر-سوری است. سپس رُکت کوهومولوژی گالوای غیر جابه‌جایی را به‌عنوان ابزاری برای مطالعهٔ میدانهای شکافندهٔ نوعی مورد استفاده قرار داد و به نتایج مهمی دست یافت.

هم‌اکنون هندسهٔ جبری غیر جابه‌جایی تحولی دیگر یافته و کم‌کم چهرهٔ واقعی خویش را نشان می‌دهد. همان‌طور که می‌دانید در اثر پیشرفت جبر جابه‌جایی و پیدایش قضایای اساسی متعدد در این زمینه، این شاخه به‌صورت کلاسیک در آمده و به‌کارگیری قضایای آن میان اکثر ریاضیدانان متداول گشته است، در حالی که در جبر غیر جابه‌جایی تعداد قضایای اساسی بسیار محدود است. به قول شفارویچ[4]، قرن بیستم قرن ریاضیات جابه‌جایی بود و قرن بیست و یکم قرن ریاضیات غیر جابه‌جایی خواهد بود.

دترمینان ماتریسهای یک حلقهٔ تقسیم

نظریهٔ دترمینانها روی حلقه‌های جابه‌جایی از زمان لایب‌نیتس در سال ۱۶۹۶ پدید آمده است و سپس بزو[5]، واندرموند[6]، کرامر، لاگرانژ و لاپلاس این نظریه را توسعه داده و کوشی، ژاکوبی و سیلوستر در نیمهٔ اول قرن نوزدهم آن‌را به شکل امروزیش مورد استفاده قرار داده‌اند. لغت دترمینان را نخستین بار گاوس در سال ۱۸۰۱ درکتاب تحقیقات حسابی[7] خود به‌کار برده است. اگر دترمینان را برای یک حلقهٔ غیر جابه‌جایی مانند حلقهٔ جابه‌جایی، مجموع حاصل‌ضربهای عناصر قطرهای پراکنده با علامت مثبت و منفی تعریف کنیم، آنگاه به‌دلیل اینکه ترتیب اعضا در حاصلضرب مهم است باید خوش‌تعریفی بررسی شود و در ضمن اگر خوش‌تعریفی آن نیز ثابت شود مشخص نیست که ویژگیهای اصلی تابع دترمینان را داشته باشد. نخستین کسی که وسوسه شد که تابع دترمینان را برای ماتریسهای روی کواترنیونها معرفی کند، کیلی بود ولی او علی‌رغم تلاش زیادش در این کار موفق نشد.

شکست کیلی در تعریف دترمینان

دقیقاً دو سال بعد از کشف کواترنیونها یعنی در سال ۱۸۴۵ کیلی تصمیم گرفت تابعی از $M_n(H)$ به H تعریف کند که ویژگیهای اصلی دترمینان در

1. Witt 2. Roquette 3. Severi 4. Shafarevich 5. Bézout
6. Vandermonde 7. Disquistiones arithmeticae

حالت جابه‌جایی را داشته باشد. او در ابتدا سعی کرد این تابع را برای مقادیر کوچک n، یعنی $n = ۲, ۳$ تعریف کند. اگر دترمینان کیلی را با Cdet نمایش دهیم، وی دترمینان ماتریس $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ و $B = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$ را چنین تعریف کرد (بسط نسبت به ستون اول):

$$\mathrm{Cdet}\, A = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

و

$$\mathrm{Cdet}\, B = a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - a_2(b_1c_3 - b_3c_1) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1)$$

ولی آیا این تابع مناسبی است؟ کیلی متوجه شد که اگر دو سطر این ماتریس مساوی باشند آنگاه داریم

$$\mathrm{Cdet}\begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix} = ab - ab = 0$$

در حالی که اگر دو ستون مساوی باشند به‌دست می‌آوریم

$$\mathrm{Cdet}\begin{pmatrix} a & a \\ b & b \end{pmatrix} = ab - ba$$

که لزوماً صفر نیست. البته این پدیده برای وی اهمیت زیادی نداشت و او را مصمم کرد که مقاله‌ای دربارهٔ این دترمینان بنویسد. اگرچه چنین چیزی امروز با مذاق ما سازگار نیست.

حال بیایید کمی دقیق‌تر دربارهٔ تابع دترمینان صحبت کنیم. بر اساس تجربیاتمان از دترمینان روی میدانها، تابع $d : M_n(H) \to H$ را تابع دترمینان نامیم هرگاه d در سه شرط زیر صدق کند:

(i) $d(A) = 0$ اگر و تنها اگر A وارون‌ناپذیر باشد.

(ii) به‌ازای هر $A, B \in M_n(H)$، $d(AB) = d(A)d(B)$.

(iii) اگر A' ماتریسی باشد که از ضرب کردن عنصری از H در یک سطر A و اضافه کردن آن به سطر دیگر یا از ضرب کردن ستونی از A در یک عنصر از سمت راست و جمع کردن آن با ستون دیگر به‌دست آید، آنگاه $d(A) = d(A')$.

می‌توان نشان داد که اگر d تابع ثابت ۱ نباشد آنگاه شرط دوم ایجاب می‌کند که به‌ازای هر ماتریس A داشته باشیم $d(A) = 0$ (نگاه کنید به [۱۰]). بنابراین کافی است اثر تابع d را تنها روی ماتریسهای وارون‌پذیر مشخص کنیم. شرط سوم را می‌توان بر طبق ضرب ماتریسی به‌صورت زیر بیان کرد. فرض کنیم e_{ij} ماتریسی باشد که درایهٔ ijام آن یک و بقیه درایه‌های آن صفرند. به‌ازای هر $b \in H$ تعریف می‌کنیم $B_{ij}(b) = I + be_{ij}$ $(i \neq j)$. اگر $B_{ij}(b)$ را از سمت چپ در ماتریس A ضرب کنیم، سطر jام از سمت چپ در b ضرب می‌شود و با سطر iام جمع می‌گردد و اگر آن را از سمت راست در A ضرب کنیم، ستون iام از راست در b ضرب می‌شود و با ستون jام جمع می‌گردد. با توجه به دو ویژگی اخیر تابع d نتیجه می‌گیریم که به‌ازای هر b و هر i و j $(i \neq j)$، $d(B_{ij}(b)) = 1$. چون $B_{ij}(-b) = (B_{ij}(b))^{-1}$، حاصلضربهای متناهی $B_{ij}(b)$ها زیرگروهی از $GL_n(H)$ تشکیل می‌دهند که آن را با $SL_n(H)$ نمایش می‌دهیم. توجه کنید در حالتی که K میدان باشد $SL_n(K)$ شامل تمام ماتریسهایی است که دترمینان آنها برابر یک است [۱۴] ولی چون ما در اینجا هنوز تابع دترمینانی نداریم، $SL_n(H)$ را چنین تعریف کردیم و امیدواریم بتوانیم تابع دترمینانی ارائه دهیم که $SL_n(H)$ هستهٔ آن باشد. حال سؤالی که طبیعی به نظر می‌رسد این است که آیا این کار شدنی است؟

قضیهٔ ۱. فرض کنید d تابع دترمینان باشد یعنی در سه شرطی که بیان شد صدق کند. در این صورت $d(M_n(H))$ زیرمجموعه‌ای جابه‌جایی از H است.

این قضیه می‌گوید که تصویر $M_n(H)$ تحت d باید در درون یک نسخه از اعداد مختلط قرار گیرد. به‌راحتی دیده می‌شود که دترمینان کیلی پوشاست یعنی برد آن برابر H است که این با قضیهٔ ۱ در تناقض است و لذا دترمینان کیلی تابع جالبی برای ما نیست.

قبل از آوردن برهان قضیهٔ ۱ باید به چند نکته اشاره کنیم. فرض کنید $a \neq 0$ و d تابع دترمینان باشد. در این صورت چون تساوی زیر برقرار است

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -a^{-1} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & a-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & a^{-1}-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

به‌دست می‌آوریم $d\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} = 1$. **این را خوب به‌خاطر داشته باشید** زیرا به‌زودی از آن استفاده خواهیم کرد. همچنین لم زیر در اثبات قضیهٔ ۱ به ما کمک خواهد کرد.

لم ۱. فرض کنید $A \in GL_n(H)$. در این صورت $B \in SL_n(H)$ و $x \in H$ وجود دارند به‌طوری که $A = B\delta(x)$ که در آن

$$\delta(x) = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & x \end{pmatrix}$$

برهان. چون A وارون‌پذیر است، لااقل یکی از درایه‌های ستون اول آن مثلاً a_{j1} ناصفر است. با ضرب کردن jامین سطر در $(1 - a_{11})a_{j1}^{-1}$ از سمت چپ و اضافه کردن آن به سطر اول به‌دست می‌آوریم $a_{11} = 1$. حال به‌راحتی می‌توان سایر درایه‌های ستون اول را صفر کرد و همین‌طور فرایند را برای ستونهای بعدی انجام داد که در نتیجه، حکم ثابت می‌شود.

برهان قضیهٔ ۱. تابع $f : H \to H$ را چنین تعریف می‌کنیم: به‌ازای هر $x \in H$ قرار می‌دهیم $f(x) = d(\delta(x))$. بنابر لم فوق داریم $f(H) = d(M_n(H))$. برای سادگی محاسبات فرض می‌کنیم $n = 2$. حال داریم

$$d\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix} = d\left(\begin{pmatrix} x & 0\\ 0 & x^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&x\end{pmatrix}\right) = f(x)$$

و از اینجا به‌دست می‌آوریم

$$f(x)f(y) = d\left(\begin{pmatrix} x & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&y\end{pmatrix}\right) =$$

$$d\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y\end{pmatrix} = d\left(\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x&0\\0&1\end{pmatrix}\right) = f(y)f(x)$$

و این بدان معنی است که $f(H)$ جابه‌جایی است.

نکته. فرض کنید $M = \begin{pmatrix}k & j\\ i & 1\end{pmatrix}$. به‌آسانی دیده می‌شود که دستگاه $M\binom{x}{y} = \binom{0}{0}$ فقط جواب بدیهی $x = y = 0$ را داراست و لذا M وارون‌پذیر است. اما بنابه تعریف دترمینان کیلی داریم $\mathrm{Cdet}\, M = 0$ و این شرط اول تابع دترمینان را نقض می‌کند و لذا دترمینان کیلی تابع خوبی نیست.

از مطالب گفته شده چنین استنتاج می‌شود که وقتی با حلقه‌های تقسیم کار می‌کنیم نمی‌توانیم تمام ویژگیهای دترمینان در حالت جابه‌جایی را برآورده کنیم پس به نظر می‌رسد باید کمی شرایط را تغییر دهیم. در سال ۱۹۷۲ فریمن دایسن[1] فیزیکدان معروف تصمیم گرفت شرط سوم را اندکی تغییر دهد و آن را به شکل زیر عوض کرد:

(*) فرض کنید A، B و C سه ماتریس $n \times n$ باشند. اگر به‌ازای عدد طبیعی r داشته باشیم $a_{ij} = b_{ij} = c_{ij}$ برای هر $i \neq r$ و $a_{ri} + b_{ri} = c_{ri}$، آنگاه تساوی $d(A) + d(B) = d(C)$ برقرار است.

وی ثابت کرد که با این تغییر نیز تصویر d جابه‌جایی می‌شود. البته می‌توان نشان داد که شرایط اول و دوم تابع دترمینان به‌اضافهٔ شرط (*)، شرط سوم دترمینان را نتیجه می‌دهد. برای این کار نخست ثابت می‌کنیم به‌ازای هر b، $d(B_{ij}(b)) = 1$. فرض کنید B' ماتریسی باشد که از ماتریس $B_{ij}(b)$ با جایگزینی صفر به‌جای یک در iامین درایهٔ قطر به‌دست آید. در این صورت B' وارون‌ناپذیر است و اگر در (*) قرار دهیم $A = I$، $B = B'$ و $C = B_{ij}(d)$، آنگاه نتیجه می‌گیریم $d(B_{ij}(b)) = 1$. زیرا بنا به شرط دوم، $d(I) = 1$. بنابراین دو شرط اول و (*) حتی از سه شرط قبلی قوی‌ترند.

حال نشان می‌دهیم چنین تابع دترمینانی روی کواترنیونها وجود ندارد. چون $2D(0) = D(-1) + I$، و $D(0)$ وارون‌ناپذیر است پس داریم $d(D(-1)) = -1$. از طرفی $iji^{-1}j^{-1} = -1$، لذا نتیجه می‌گیریم

$$D(-1) = D(i)D(j)D(i^{-1})D(j^{-1})$$

از اینجا بنا بر قضیهٔ ۱ رابطهٔ $d(D(-1)) = 1$ حاصل می‌شود که تناقض است.

در سال ۱۸۸۹، در ویراست دوم کتاب اصول کواترنیونهای همیلتن، ویراستار کتاب ضمیمه‌ای به آن اضافه کرد که حاوی مطالبی بود که کیلی در

1. Dyson

تلاش برای تعریف دترمینان به‌دست آورده بود. در سال ۱۹۲۰ ریاضیدانی به‌نام ادوارد مقالهٔ جالبی دربارهٔ دترمینان روی کواترنیونها نوشت. در این مقاله او به هر ماتریس $n \times n$ با درایه‌های متعلق به H یک ماتریس $2n \times 2n$ با درایه‌های مختلط نظیر می‌کرد و سپس دترمینان معمولی می‌گرفت ولی اشکال این روش آن بود که نمی‌شد آن را برای ماتریسهایی با درایه‌های متعلق به یک حلقهٔ تقسیم دلخواه تعمیم داد.

در سالهای ۱۹۳۰ مسألهٔ تعریف دترمینان روی حلقه‌های غیر جابه‌جایی بسیار مورد توجه قرارگرفت. اشخاصی مانند هیتینگ[1]، مور[2]، اُر[3] و ریچاردسن همگی مقالاتی در این زمینه منتشر کردند. مقاله اُر دربرگیرنده نکات قابل ملاحظه‌ای بود زیرا در آن صحبت از حلقهٔ کسرهای یک حلقهٔ غیر جابه‌جایی به میان آمده بود. شاید بتوان گفت تنها کسی که تا حد زیادی به حل اساسِ مسأله نائل آمد ریچاردسن بود زیرا در مقالاتش فرمولهایی برای دترمینان بر حسب جابه‌جاگرها بیان می‌شد هرچند این فرمولها شسته و رفته نبودند. سرانجام در سال ۱۹۴۳ دیودونه با روشی که در مقاله‌اش بیان نمود با هوشمندی تمام توانست این مسأله را فیصله بخشد.

موفقیت دیودونه در تعریف دترمینان

در سال ۱۹۴۳ دیودونه موفق شد فرمول دترمینان را برای ماتریسهای روی یک حلقهٔ تقسیم دلخواه به‌دست آورد. او پس از بررسی دقیق ایده‌های دیگران به‌خوبی دریافته بود که برد تابع دترمینان باید در یک موجود جبریِ جابه‌جایی قرار داشته باشد؛ نکتهٔ ظریفی که به ذهن بقیه خطور نکرده بود این بود که این موجود جبری باید نیم‌گروه جابه‌جایی انتخاب می‌شد نه حلقهٔ جابه‌جایی!! روشی که شرح آن در زیر می‌آید دقیقاً روشی است که از مقالهٔ دیودونه [۱۳] اخذ گردیده است.

فرض کنید D یک حلقهٔ تقسیم باشد و $A \in GL_n(D)$. دقیقاً شبیه لم ۱ می‌توان نشان داد $B \in SL_n(D)$ و $x \in D$ وجود دارند به‌طوری که $A = B\delta(x)$ که در آن $SL_n(D)$ گروه تولیدشده توسط $B_{ij}(\lambda)$هاست. حال گروه آبلی D^*/D' را در نظر بگیرید و عنصر خارجی $\bar{0}$ را به آن اضافه کنید و قرار دهید $\overline{D} = D^*/D' \cup \{\bar{0}\}$. چون D^*/D' یک نیم‌گروه است، اگر به‌ازای هر $a \in \overline{D}$ تعریف کنیم $a \cdot \bar{0} = \bar{0} \cdot a = \bar{0}$، $\overline{D}$ تبدیل به یک نیم‌گروه جابه‌جایی می‌شود. هدف ما این است که تابعی مانند $\det : M_n(D) \to \overline{D}$ بسازیم که دارای سه ویژگی زیر باشد.

(الف) اگر B ماتریسی باشد که از ضرب کردن یک سطر A در اسکالر a به‌دست آمده باشد آنگاه داشته باشیم $\det B = \bar{a}\det A$ (توجه کنید که به‌ازای هر $a \in D^*$ همدستهٔ[4] راست Da را با $\bar{a}$ نمایش می‌دهیم.)

(ب) اگر B ماتریسی باشد که از اضافه کردن یک سطر A به سطر دیگرش حاصل شود آنگاه $\det B = \det A$.

(پ) $\det I = \bar{1}$.

لم ۲. اگر تابع det وجود داشته باشد که در ۳ شرط فوق صدق کند آنگاه در ۶ شرط زیر نیز صدق می‌کند.

۱) به‌ازای هر $B \in SL_n(D)$ داریم $\det(BA) = \det A$.

۲) اگر $A = B\delta(x)$ که در آن $B \in SL_n(D)$، آنگاه $\det A = \bar{x}$.

1. Heyting 2. Moore 3. Ore 4. coset

۳) اگر یکی از سطرهای A صفر باشد آنگاه داریم $\det A = \overline{0}$.
۴) A وارون‌ناپذیر است اگر و تنها اگر $\det A = \overline{0}$.
۵) به‌ازای هر $A, B \in SL_n(D)$، $\det(AB) = \det A \det B$.
۶) اگر B ماتریسی باشد که از تعویض دو سطر A به‌دست آید آنگاه داریم $\det B = \overline{-1}\det A$.

برهان. ۱) چون B حاصلضرب تعداد متناهی از ماتریسهای $B_{ij}(\lambda)$ است، کافی است نشان دهیم $\det(B_{ij}(\lambda)A) = \det A$. اگر $\lambda \neq 0$ و سطر jام A را از سمت چپ در λ ضرب کنیم و آن را B بنامیم، آنگاه بنابر خاصیت (الف) داریم $\det B = \overline{\lambda}\det A$.

از طرف دیگر اگر C ماتریسی باشد که از اضافه کردن سطر jام B به سطر iام به‌دست آید آنگاه بنابر خاصیت (ب) داریم

$$\det C = \det B = \overline{\lambda}\det A = \overline{\lambda}\det(B_{ij}(\lambda)A)$$

۲) این قسمت از قسمت قبل و (الف) و (پ) نتیجه می‌شود.
۳) از خاصیت (الف) نتیجه می‌شود.
۴) فرض کنید A وارون‌ناپذیر باشد. در این صورت هر سطری از A ترکیبی خطی از سطرهای دیگر است [۱۴]. بنابراین ماتریس $B \in SL_n(D)$ وجود دارد به‌طوری که BA دارای یک سطر صفر است. از اینجا نتیجه می‌گیریم $\det A = \det(BA) = \overline{0}$. حال فرض کنید $\det A = \overline{0}$. می‌دانیم ماتریس $B \in SL_n(D)$ و $x \in D$ وجود دارند به‌طوری که $A = B\delta(x)$. لذا بنا بر قسمت ۲) داریم $x = 0$ و در نتیجه A وارون‌ناپذیر است.
۵) اگر A وارون‌ناپذیر باشد آنگاه AB نیز وارون‌ناپذیر است و چیزی برای اثبات نداریم. پس فرض کنید $A \in GL_n(D)$؛ در این صورت $C \in SL_n(D)$ وجود دارد به‌طوری که $A = C\delta(x)$ و لذا داریم

$$\det(AB) = \det(C\delta(x)B) = \det(\delta(x)B)$$

ولی ماتریس $\delta(x)B$ ماتریسی است که از ضرب x از سمت چپ در سطر آخر B به‌دست می‌آید و لذا نتیجه می‌گیریم

$$\det(AB) = \overline{x}\det B = \det A \det B$$

۶) از قسمت اول و خاصیت (الف) نتیجه می‌شود.

قضیهٔ ۲. تابع یکتای $\det : M_n(D) \to \overline{D}$ وجود دارد که در شرایط (الف)، (ب) و (پ) صدق می‌کند و به‌علاوه $\det$ یک بروریختی [اپی‌مورفیسم] است.

برهان. از قسمتهای (۲) و (۴) نتیجه می‌شود که حداکثر یک تابع با سه شرط فوق وجود دارد. حال با استقرا روی n این تابع را می‌سازیم. اگر $n = 1$، قرار می‌دهیم $\det a = \overline{a}$. پس فرض کنیم $n > 1$، و

$$\det : M_{n-1}(D) \to \overline{D}$$

با شرایط مذکور ساخته شده باشد. اگر $A \in M_n(D)$ تکین باشد قرار می‌دهیم $\det A = \overline{0}$. اگر A وارون‌پذیر و A_1، …، A_n سطرهای A باشند، آنگاه مجموعهٔ $\{A_1, \ldots, A_n\}$ تشکیل پایه‌ای برای D^n به‌عنوان D مدول چپ می‌دهد و لذا $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in D^n$ وجود دارند به‌طوری که $\sum_{k=1}^n \lambda_k A_k = (1, 0, \ldots, 0)$. هر A_i را می‌توان به‌صورت $A_i = (a_{i1}, B_i)$ نوشت که در آن $B_i \in D^{n-1}$ و لذا نتیجه می‌گیریم $\sum_{k=1}^n \lambda_k B_k = (0, \ldots, 0)$. قرار می‌دهیم $C = \begin{bmatrix} \underline{B_1} \\ \vdots \\ \overline{B_n} \end{bmatrix}$ و فرض می‌کنیم $C_i \in M_{n-1}(D)$ ماتریسی باشد که از حذف سطر iام ماتریس C به‌دست آید. اگر λ_i و λ_j $(i \neq j)$ دو عنصر ناصفر باشند آنگاه دو ماتریس M و N در $M_{n-1}(D)$ را به شکل زیر می‌سازیم. در ماتریس C_i، B_j را با $\lambda_j B_j$ تعویض کرده و آن را M می‌نامیم. همچنین در ماتریس C_i، B_j را به B_i تبدیل کرده و آن را با N نمایش می‌دهیم.

با استفاده از خاصیت (الف) داریم

$$\det C_i = \overline{\lambda_j}^{-1} \det M$$

حال در ماتریس M هر سطر B_k $(k \neq j)$ را از سمت چپ در λ_k ضرب کرده با سطر $\lambda_j B_j$ جمع می‌کنیم. چون $\sum_{k \neq i} \lambda_k B_k = -\lambda_i B_i$ داریم $\det M = -\overline{\lambda}_i \det N$ و از اینجا نتیجه می‌گیریم

$$\det C_i = \overline{\lambda_j}^{-1} (-\overline{\lambda}_i) \det N$$

توجه کنید که با تعویض سطرهای ماتریس C_j به دفعات متناهی، می‌توان به N رسید و لذا به‌دست می‌آوریم $\det N = \overline{(-1)^{j-i-1}} \det C_j$ و از اینجا تساوی زیر حاصل می‌شود

$$\overline{(-1)^{i+1}\lambda_i^{-1}} \det C_i = \overline{(-1)^{j+1}\lambda_j^{-1}} \det C_j$$

بنابراین به‌ازای هر i که $\lambda_i \neq 0$، عبارت $\overline{(-1)^{i+1}\lambda_i^{-1}} \det C_i$ مقدار ثابتی است. حال قرار می‌دهیم $\det A = \overline{(-1)^{i+1}\lambda_i^{-1}} \det C_i$.

اکنون ثابت می‌کنیم این تابع همان تابع مطلوب است یعنی شرایط (الف)، (ب) و (پ) را داراست. فرض کنید $A \in M_n(D)$، و B ماتریسی باشد که از ضرب کردن عنصر a از سمت چپ در سطر iام ماتریس A به‌دست آید. اگر A وارون‌ناپذیر باشد، خاصیت (الف) به‌وضوح برقرار است. اگر A وارون‌پذیر باشد آنگاه B نیز وارون‌پذیر است و لذا بر طبق ضابطهٔ تابع فوق داریم

$$\det B = \overline{(-1)^{i+1} a \lambda_i^{-1}} \det C_i = \overline{a} \det A \qquad (\text{اگر } \lambda_i \neq 0)$$

زیرا λ_i به $\lambda_i a^{-1}$ تبدیل شده است. اما اگر $\lambda_i = 0$ و $\lambda_k \neq 0$ آنگاه چنانچه ضابطهٔ تابع را برای اندیس k به‌کار بریم به‌دست می‌آوریم $\det B = \overline{a}\det A$.

حال فرض کنید B ماتریسی باشد که از قرار دادن $A_i + A_j$ به‌جای A_i در ماتریس A به‌دست آید. اگر A وارون‌ناپذیر باشد B نیز وارون‌ناپذیر است و $\det B = \overline{0} = \det A$. اگر A وارون‌پذیر باشد آنگاه B نیز وارون‌پذیر است. چون تساوی زیر برقرار است

$$\lambda_i(A_i + A_j) + (\lambda_j - \lambda_i)A_j = \lambda_i A_i + \lambda_j A_j$$

بنابراین اگر kای $(k \neq j)$ وجود داشته باشد که $\lambda_k \neq 0$، آنگاه داریم

$$\det A = \overline{(-1)^{k+1}\lambda_k^{-1}}\det C_k = \det B$$

اما اگر به‌ازای هر $k \neq j$ داشته باشیم $\lambda_k = 0$، آنگاه تساوی

$$\lambda_j B_j = (0, \dots, 0)$$

را خواهیم داشت و لذا $B_j = 0$. بنابراین A وارون‌ناپذیر است، و این تناقض است.

حال برقراری شرط (پ) را بررسی می‌کنیم. فرض کنید $A = I$. در این صورت $\lambda_1 = 1$ و به‌ازای هر $k > 1$ داریم $\lambda_k = 0$. در نتیجه $C_1 = I$، و بنابراین با توجه به فرض استقرا نتیجه می‌گیریم $\det I = \overline{1}$. توجه کنید که همریختی تابع نتیجهٔ فوری شرایط (۲) و (۴) است. □

نکته. جنبهٔ جالب تعریف دترمینان دیودونه این است که هنگامی که D جابه‌جایی یعنی میدان باشد، این مفهوم با تعریف دترمینان معمولی یکی می‌شود زیرا $D' = 1$، $\overline{D} = D$ و $\det \delta(x) = x$.

مراجع

1. S. Akbari, *The Role of Commutators in the Structure of Division Rings*, Ph.D thesis, Sharif University of Technology (1995).
2. ———, H. Hajie-Abolhasan, M. Mahdavi-Hezavehi and M. Mehraabaadi, "On derived groups of division rings II", *Comm. Algebra*, **23** (1995) 2881-2887.
3. S. Akbari and M. Mahdavi-Hezavehi, "On a question of Herstein concerning commutators in division rings", *Rev. Roumaine Math Pures Appl.*, (3-4) **41** (1996) 201-204.
4. ———, "A generalization of Kaplansky's theorem," *Bull. Iranian Math. Soc.*, (2) **21** (1995) 1-4.
5. S. A. Amitsur, *Division Algebras, A Survey*, *Contemporary Math.*, **13** (1982) 3-26.
6. ———, "Algebras over infinite fields", *Proc. Amer. Math Soc.*, **7** (1956) 35-48.
7. ———, "Finite subgroups of division rings", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **80** (1955) 361-386.
8. E. Artin, *Geometric Algebra*, Interscience (1957).
9. H. Aslaksen, "Quaternionic determinants", *Math. Intelligencer*, (3) **18** (1996) 57-65.
10. J. Brenner, "Applications of the Dieudonné determinant", *Linear Algebra Appl.*, **1** (1968) 511-536.
11. K. Chiba, "Skew fields with a non-trivial general power central rational identity", *Bull. Austral. Math. Soc.*, **49** (1994) 85-90.
12. P. M. Cohn, "A brief history of infinite-dimensional skew fields", *Math. Scientist*, **17** (1992) 1-14.
13. J. Dieudonné, "Les déterminants sur un corps non commutatif", *Bulletin de la Société Mathématique de France*, **71** (1943) 4373-4378.
14. P. K. Draxl, *Skew Fields*, Vol. 81 of London Mathematical Society Lecture Notes Series, Cambridge University Press (1983).
15. J. Goncalves and M. Shirvani, "On free group algebras in division rings with uncountable center", *Proc. Amer. Math. Soc.*, (3) **124** (1996) 685-687.
16. G. R. Greenfield, "A note on subnormal subgroups of division algebras", *Canad. J. Math*, (1) **30** (1978) 161-163.
17. ———, "Subnormal subgroups of p-adic division algebras", *J. Algebra*, **73** (1981) 65-69.
18. I. N. Herstein and W. R. Scott, "Subnormal subgroups of division rings", *Canad. J. Math.*, **15** (1963) 80-83.
19. I. N. Herstein, "Multiplicative commutators in division rings", *Isr. J. Math*, **31** (1978) 180-188.
20. ———, "Multiplicative commutators in division rings II", *Rendiconti del Circolo Matematico di palermo, Serie* II, (1980) 485-489.
21. N. Jacobson, "Structure theory for algebraic algebras of bounded degree", *Ann. of Math.*, **46** (1945) 369-707.
22. A. I. Kostrikin and I. R. Shafarevich, *Algebra IX*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences Vol. 77, Springer - Verlag (1996).
23. T. Y. Lam, *A First Course in Noncommutative Rings*, Vol. 131 of GTM, Springer-Verlag, New York (1991).
24. J. Lambek, "If Hamilton had prevailed: quaternions in physics", *Math. Intelligencer*, (4) **17** (1995) 7-15.
25. A. I. Lichtman, "On subgroups of the multiplicative group of skew fields", *Proc. Amer. Math. Soc.*, **63** (1977) 15-16.
26. M. S. Putcha and A. Yaqub, "Multiplicative commutators in division rings", *Math. Japan*, (1974) 111-115.
27. Z. Reichstein and N. Vonessen, "Free subgroups of division allegras", *Comm. Algebra*, (6) **23** (1995) 2181-2185.
28. D. A. Suprunenko, *Matrix Groups*, Amer. Math. Society (1976).
29. B. L. Van der Waerden, "Hamilton's discovery of quaternions", *Math. Magazine* (1976) 227-234.

* * * * * *

• سعید اکبری، دانشگاه صنعتی شریف

s-akbari@rose.ipm.ac.ir