آیا ریاضیات به اصول موضوع جدید نیاز دارد؟•

سالومون ففرمن*

ترجمهٔ هاله المعی

این سؤال تقریباً از هر لحاظ ابهام دارد:

منظور از «ریاضیات» چیست؟

منظور از «نیاز» چیست؟

منظور از «اصل موضوع» چیست؟

حتی می‌شود پرسید منظور از «آیا» چیست؟

بخشی از این ابهام به خاطر این است که این سؤال را از دیدگاههای مختلفی می‌توان مطرح کرد. مهمترین اختلاف، بین دیدگاه ریاضیکاران است و دیدگاه منطقدانانی که سروکار با مبانی ریاضیات دارند. شاید بعضی منطقدانان به این تمایز اعتراض کنند چون آنها هم خودشان را ریاضیدانهایی می‌دانند که ازقضا تخصصشان منطق ریاضی است. شکی نیست که منطق جدید شاخهٔ بسیار معتبری از ریاضیات شده است و درواقع چند نشریهٔ کاملاً تخصصی منطق داریم که در یک نگاه اجمالی، مطالبشان، گذشته از موضوع، هیچ فرقی با نشریه‌های ریاضی ندارد، مثل انالز آو پیور اند اپلاید لاجیک و جورنال آو سیمبالیک لاجیک. حتی دقیقتر که نگاه کنیم، می‌شود مقاله‌ای پیدا کرد، مثلاً دربارهٔ نیم‌مشبکهٔ درجات حل‌ناپذیری یا نظریهٔ مدلهای میدانها که از لحاظ سرشت کلی هیچ فرقی با مقاله‌ای در باب نظریهٔ ترکیبیاتی گرافها یا همانستگی [کوهومولوژی] گروهها نداشته باشد؛ اینها به اصطلاح به یک چارچوب ذهنی تعلق دارند. اما اگر مقالهٔ گودل دربارهٔ ناتمامیت دستگاههای اصل موضوعی برای ریاضیات، یا قضیه‌های او و کوهن دربارهٔ سازگاری و استقلال اصل موضوع انتخاب نسبت به اصل موضوعهای نظریهٔ مجموعه‌ها را در نظر بگیریم، در چارچوب ذهنی دیگری خواهیم بود، چون داریم کاری را می‌کنیم که هیلبرت فراریاضیات می‌نامد: مطالعهٔ خودِ ریاضیات به‌وسیلهٔ منطق ریاضی از طریق صورتبندی آن در دستگاه اصل موضوعی. و این موضع است که می‌خواهم آن را متمایزکنم از موضع ریاضیدانانی که کارشان آنالیز یا جبر یا توپولوژی یا درجات حل‌ناپذیری و از این قبیل چیزهاست. صحبت از منطقدان به منزلهٔ فراریاضیدان ناخوشایند است، و من از منطق این‌طور صحبت نخواهم کرد، اما این چیزی است که در ذهن دارم.

با اینکه اصلاً نمی‌خواهم دیدگاه ریاضیکاران را نادیده بگیرم، در این مقاله عمدتاً سؤال مورد بحث را از دیدگاه منطقدانان بررسی می‌کنم، و به‌خصوص از چشم‌انداز یکی از منطقدانان بسیار مهم: کورت گودل. گودل از زمان انتشار قضیهٔ چشمگیر ناتمامیت در سال ۱۹۳۱ تا پایان عمر درصدد پیداکردن اصول موضوع جدیدی برای حل و فصل مسائل بلاتکلیف حساب بود. و علاوه بر این از سال ۱۹۴۷ به بعد با انتشار مقالهٔ نامتعارفش «مسألهٔ پیوستار کانتور چیست؟» [۱۲] به دنبال اصول موضوع تازه‌ای برای به سامان رساندن حدس مشهور کانتور در بارهٔ عدد کاردینال پیوستار بود. در هر دو مورد، به عقیدهٔ او این اصول موضوع جدید باید در شِماهای بینهایتِ [مراتب] بالاتر در نظریهٔ مجموعه‌ها جستجو می‌شد. در سالهای اخیر منطقدانان مطالب زیادی آموخته‌اند که به برنامهٔ گودل مربوط می‌شود، اما در بارهٔ اینکه از یافته‌های آنها چه نتایجی عاید می‌شود، هنوز خیلی حرفها هست. من در این مورد اصلاً بی‌طرف نیستم و آخر مقاله می‌بینید چه نتیجه‌ای از این بحثها می‌گیرم، اما سعی می‌کنم سایر مواضع را هم منصفانه ارائه کنم تا خودتان هر طور می‌خواهید نتیجه‌گیری کنید.

فرهنگ انگلیسی آکسفورد «اصل موضوع» را درکاربرد منطق و ریاضی چنین تعریف می‌کند: «گزاره‌ی بدیهی که برای اثبات صدق آن نیازی به برهان صوری نیست، بلکه به محض بیان، پذیرفته و تأیید می‌شود.» فکر می‌کنم وقتی صحبت از اصل موضوع ریاضی می‌شود اولین چیزی که در ذهن

داریم کم‌وبیش همین تعریف است: من این را معنای آرمانی کلمه می‌نامم. جای تعجب است که معنای اصل موضوع عملاً چه در ریاضیات و چه در منطق این‌قدر از مفهوم آرمانی دور شده است. بعضی حتی آن را به معنای فرض دلخواه به‌کار می‌برند و به این ترتیب اصلاً جدی نمی‌گیرند که اصل موضوع قرار است در خدمت چه هدفی باشد.

وقتی ریاضیکاری صحبت از اصل موضوع می‌کند، معمولاً منظورش اصول موضوع مربوط به بخش خاصی از ریاضیات مثل گروه، حلقه، فضای برداری، فضای توپولوژیک، فضای هیلبرت و امثال آن است. این اصول موضوع نه کاری به گزاره‌های بدیهی دارند، نه مبادی اختیاری برای شروع کارند. اینها صرفاً تعاریف انواع ساختارهایی هستند که دیده شده در وضعیتهای ریاضی مختلف ظاهر می‌شوند. اما نقش اصل موضوع را دارند به این معنا که چارچوبی فراهم می‌آورند که در آن بعضی از انواع عملیات یا برخی شیوه‌های استدلال صحیح‌اند و بعضی نیستند. و همین‌که وارد ساختاری با دستگاهی از این اصل موضوعها شدیم ــ مثلاً گروهی که به یک معادله یا یک فضای توپولوژیک وابسته است ــ کلی نتایج اثبات‌شده برای کارهای بعدی در اختیار داریم. من بی‌آنکه بیشتر در این‌باره بحث کنم، اهمیت این نوع اصول موضوع ساختاری را در سازماندهی ریاضیات مسلّم می‌دانم. تازه، باز هم از این نوع اصل موضوعها باید در کار بیاوریم و فکر می‌کنم این نیاز روزمره به اصول موضوع جدید ادامه دارد تا بتوانیم معلوماتمان را به‌صورتی قابل درک، جمع‌وجور کنیم و مبادله کنیم.

حالا، برخلاف اصول موضوع ساختاری ریاضیکاران، وقتی منطقدانی صحبت از اصل موضوع می‌کند، منظورش اولاً قوانین استدلال معتبری است که باید در همهٔ بخشهای ریاضیات قابل اعمال باشد، و ثانیاً اصول موضوعی است برای مفاهیم اولیه مثل عدد، مجموعه و تابع که زیربنای همهٔ مفاهیم ریاضی‌اند. اصول موضوع اخیر را می‌خواهم اصول موضوع بنیادی بنامم. در اینجا وارد این بحث نمی‌شوم که آیا اصلاً ریاضیات نیاز به چنین اصل موضوعهایی دارد یا نه؛ تاریخ تحول ریاضیات جواب این سؤال را می‌دهد. البته این اصل موضوعها با چنان اجزای بنیادی موضوع ما ربط دارند که در کار روزمره [ریاضی] اصلاً لازم نیست حرفشان را بزنیم و خیلی ریاضیدانها ممکن است یک عمر کارشان را بکنند و یک دفعه هم از این اصول حرفی نزنند. اما این به این معنی نیست که در آخر کار برای توجیه عمل نیازی به این اصول نباشد، یا اینکه در هر شرایطی بشود این اصول را نادیده گرفت. در هر حال، من در ادامهٔ بحث، ضرورت اصول موضوع بنیادی را برای ریاضیات مسلم فرض می‌کنم.

من به‌خصوص با دو دستگاه اصل موضوع در دو حد مفهومی کار دارم. اصول موضوع ددکیندــپئانو برای نظریهٔ اعداد، و اصول موضوع تسرملوــفرنکل برای نظریهٔ مجموعه‌ها. فرض می‌کنم با این اصول آشنایی کلی دارید، بنابراین از فرمولبندی دقیق آنها، که به درد بحث ما هم نمی‌خورند، می‌گذرم؛ اما مجبورم در بارهٔ سیر پیدایش و رشد آنها و دلایل قبولشان، چیزهایی بگویم. در هر دو مورد، شروع کار از یک دستگاه «طبیعی» غیرصوری بوده که بعد تبدیل به یک دستگاه صوری به مفهوم دقیق ریاضی شده است.

در اصول موضوع ددکیند [۳] برای اعداد طبیعی $\mathrm{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$، عنصر آغازی ۰ [ددکیند از یک شروع کرد] و عمل تالی $x \to x' (= x + 1)$ پایه‌ای فرض می‌شوند، و اصول موضوع بدیهی عبارت‌اند از اینکه ۰ تالی هیچ عنصری نیست و اینکه تالی یک‌به‌یک است. استقرا به زبان نظریهٔ مجموعه‌ها به این صورت فرمولبندی می‌شود: N کوچکترین مجموعه است که حاوی عنصر ۰ است و تحت عمل تالی بسته است. اینجا مفهوم غیرصوری مجموعهٔ دلخواه از اعداد طبیعی بدیهی فرض می‌شود و به این ترتیب اصول موضوع، جازم و لذا کامل‌اند. ددکیند اصل استقرا را به‌کار گرفت تا نشان بدهد که می‌توان توابع را با بازگشت ساده روی N تعریف کرد. در اینجا تعیین می‌کنیم که تابع چگونه در ۰ تعریف می‌شود و نیز چگونه در عنصر تالی x' تعریف می‌شود برحسب اینکه چگونه در x تعریف شده است؛ از این‌کار به‌ویژه در اثبات جازمیت استفاده می‌شود. توابع یک یا چند متغیر مستقل از N به $\mathbf{N}$ که با تعریفهای صریح و سادهٔ بازگشتی تولید می‌شوند، امروز توابع بازگشتی اولیه نام گرفته‌اند.

پئانو [۲۴] ابتدا تلاش کرد اصول موضوعی در بارهٔ اینکه کدام مجموعه‌ها وجود دارند (به اصول موضوع ددکیند) اضافه کند. گفت هر خاصیتی مجموعه‌ای تعیین می‌کند، و بعد شرطهای بسنداری برای این خاصیتها در نظر گرفت. در اصول موضوع پئانو استقرا معادل این است که بگوییم هر خاصیت اعداد طبیعی که برای صفر برقرار باشد و تحت تالی بسته باشد برای تمام اعداد طبیعی برقرار است.

اگر بپذیریم که مفاهیم مجموعه یا خاصیت نیاز به تحلیل بیشتر ندارند، به نظرم اصول موضوع ددکیندــپئانو به معنای آرمانی این واژه در فرهنگ لغت کاملاً نزدیک شده است. اما از دیدگاه ریاضی همهٔ مفاهیمی که در یک دستگاه اصل موضوعی به‌کار می‌روند و همهٔ فرضهای مربوط به آنها باید طور کامل روشن شوند. برای این منظور، یک زبان صوری برای نظریهٔ اعداد تعیین می‌کنیم و تنها آن خواصی از اصل استقرا را که در این زبان با فرمولهای درست‌ساخت قابل بیان است اختیار می‌کنیم. دستگاه صوری حاصل امر حساب پئانو نام دارد و با PA نشان داده می‌شود. در زبان صوری PA، رابطهٔ پایه‌ای‌اش رابطهٔ برابری، =، است باید نمادهایی برای عملیات + و · و نمادهای ۰ و ′ اضافه کنیم که معادلات تعریفهای بازگشتی آنها اصل موضوع باشد؛ با اینکه + و · در نظریهٔ مجموعه‌ها برحسب این معادلات بنا به نتیجهٔ ددکیند قابل تعریف‌اند، در زبان مرتبهٔ اولی که برای حساب صوری به کار می‌رود تعریف‌شدنی نیستند. اما گودل نشان داد [۱۰] که وقتی ۰، ′، + و · را داشته باشیم، همه توابع بازگشتی اولیه در PA قابل تعریف‌اند.

برخلاف اصول موضوع ددکیندــپئانو که منشأ شهودی واضحی دارند، اصول موضوع تسرملو از یک نیاز ناشی شدند، نیاز به مبنایی برای کار انقلابی کانتور در زمینهٔ نظریهٔ مجموعه‌ها که به نظر خیلیها اشکال داشت. به‌خصوص اینکه، کانتور از اصل خوش‌ترتیبی (WO) استفادهٔ اساسی کرده بود. مطابق این اصل هر مجموعه‌ای را می‌توان خوش‌ترتیب کرد. کانتور با این اصل احکام مختلفی را در حساب کاردینالی ثابت کرد، به‌خصوص اینکه برای کاردینالهای نامتناهی κ و μ داریم

$$\kappa + \mu = \kappa \cdot \mu = \max(\kappa, \mu) \text{ ، که } \kappa < 2^{\kappa}$$

به‌علاوه، کانتور با استفاده از WO نشان داد که کاردینالهای نامتناهی

می‌توان با استفاده از اعداد ترتیبی α به‌عنوان اندیس، مرتب کرد:

$$\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \cdots < \aleph_\alpha < \aleph_{\alpha+1} < \cdots < \aleph_\lambda < \cdots$$

که در آن هر $\aleph_{\alpha+1}$ کوچکترین کاردینالِ بزرگتر از $\aleph_\alpha$ است، و برای λهای حدی $\aleph_\lambda$، حد همهٔ $\aleph_\alpha$هایی است که $\alpha < \lambda$. این درجه‌بندی، همراه با این واقعیت که $2^{\aleph_0} > \aleph_0$، بلافاصله ما را به حدسی می‌رساند که معروف به فرضیهٔ پیوستار (CH) است:

$$2^{\aleph_0} = \aleph_1 \qquad \text{(CH)}$$

زیرا $2^{\aleph_0}$ عدد کاردینال پیوستار $\mathbb{R}$ است. توسیع این حدس به همهٔ αها را فرضیهٔ تعمیم‌یافتهٔ پیوستار (GCH) می‌نامیم:

$$2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1} \qquad \text{(GCH)}$$

توجیه اصل خوش‌ترتیبی دغدغه‌ای برای کانتور بود. ابتدا ادعا کرد این یک «قانون تفکر» است، بعد سعی کرد آن را بر مبنای اصل واضحتری ثابت کند اما چیز رضایت‌بخشی پیدا نشد. چنین اصلی را اول بار در سال ۱۹۰۴ تسرملو به صورت اصل موضوع انتخاب (AC) مطرح کرد [۳۱]. تسرملو ثابت کرد AC مستلزم WO است؛ درواقع اینها هم‌ارزند، اما بحث تسرملو این بود که WO به همان شکل AC بدیهی نیست. به دنبال انتشار این اثر نه تنها پذیرش AC بلکه صحت برهان استلزام هم زیر سؤال رفت. برای رفع ایرادهایی که به برهان استلزام گرفته می‌شد، تسرملو در [۳۲] اصول موضوعی مطرح کرد که روشن می‌کرد دقیقاً کدام اصول از مجموعه‌ها را در استدلالش به‌کار گرفته است. این اصول موضوع عبارت‌اند از: هم‌مصداقی، مجموعهٔ تهی، زوجهای نامرتب، مجموعهٔ توانی، بینهایت و تفکیک. اصل موضوع تفکیک می‌گوید برای هر خاصیت معین اشیاء ($(P(x)$)، و هر مجموعهٔ مفروض a مجموعه‌ای هم مانند b وجود دارد به‌طوری که $b = \{x : x \in a \& P(x)\}$. این اصل به‌خاطر ابهامی که در تعیین خاصیت معین داشت مورد اعتراض قرار گرفت. چیزی نگذشت که وایل، اسکولم و فرنکل هر یک جداگانه پیشنهادهای دقیقی مطرح کردند که خاصیتها را محدودتر کنند. همهٔ این پیشنهادها در اصل به این ختم می‌شد که خاصیتهای معین را فقط آن خاصیتهایی به‌شمار آوریم که در زبان صوری نظریهٔ مجموعه‌ها با نمادهای پایه‌ای $=$ و $\in$ بیان می‌شوند. اصلاح دیگر به خاطر این بود که مطابق اصول تسرملو نمی‌شد وجود $\aleph_\alpha$ را برای αی نامتناهی اثبات کرد؛ فرنکل اصل موضوع جایگذاری را به این اصول اضافه کرد. اصول موضوع تسرملو فرنکل به عنوان یک دستگاه صوری را با ZF نشان می‌دهیم، و اگر AC را به آن اضافه کنیم ZFC خوانده می‌شود. اینجا نکتهٔ کوچک قابل توجه این است که طبق اصول تسرملو وجود «عنصر اولیه»[1] ممکن بود، یعنی وجود اشیایی (غیر از مجموعهٔ تهی) که هیچ عنصری نداشته باشند. در ZF از این اشیا صرف‌نظر شده چون برای مبانی نظریهٔ مجموعه‌ها ضروری نیستند.

بعد از این اصلاحات، آنچه بی‌پاسخ ماند این بود که اصول موضوع تسرملو-فرنکل دقیقاً اصل موضوع چه چیزی هستند. اگر اینها را اصل موضوع به معنای آرمانی فرهنگ لغت بگیریم باید برای مفهومی که پیش از وضع این اصول در ذهن خود داریم بدیهی باشند. مفهوم مجموعهٔ دلخواه — بدون هیچ قیدی روی آن — که در اولین وهله می‌توانست نامزدی برای پاسخ این مسأله باشد قابل قبول نیست، چون ظاهراً یک مشخصهٔ بدیهی این مفهوم این است که برای هر خاصیت $P(x)$ مجموعهٔ تمام xهایی که در P صدق کنند وجود دارد. اما می‌دانیم که این به تناقضهایی کشید که ساده‌ترینشان را راسل با خاصیت: $\neg(x \in x)$ بیان کرد ($\neg$ علامت نقض است). و دقیقاً همین نوع تناقض است که اصل موضوع تفکیک تسرملو جلویش را می‌گیرد، چون خاصیت P را فقط بر اعضای یک مجموعهٔ «از قبل موجود» [مفروض] a اعمال می‌کند. این مفهوم تناقض‌دار از مجموعه، و نه کاریتر از آن، چه توجیهی دارد؟ جوابی که اول بار تسرملو در سال ۱۹۳۰ داد [۳۳] برحسب، چیزی بود که سلسله مراتب تجمعی مجموعه‌ها نام گرفت. در این تصویر، مجموعه‌ها از پایین به بالا طبقه‌طبقه بنا می‌شوند. شروع از پایینترین مرحله با عناصر اولیه است. چون امروزه از آنها صرف‌نظر کرده‌ایم، از مجموعهٔ تهی شروع می‌کنیم که معمولاً با ۰ نشان داده می‌شود. در هر مرحله، تمام مجموعه‌هایی را که در طبقهٔ قبلی به‌دست آمده‌اند در یک تک‌مجموعهٔ a جمع می‌کنیم. در مرحلهٔ بعدی همهٔ اعضای مجموعهٔ توانی a، $\mathcal{P}(a)$، یعنی مجموعهٔ همهٔ زیرمجموعه‌های a به هم ملحق می‌شوند. سرانجام، این فرایند به صورت ترامتناهی تکرار می‌شود. اما برای درک این مدل توجه به مفاهیم زیر در نظریهٔ مجموعه‌ها لازم است: مرحله‌ها با اعداد ترتیبی مشخص می‌شوند. مجموعهٔ (یا عالم جزئیِ) اشیایی که در مرحلهٔ α به‌دست آمده‌اند با V_α مشخص می‌شود.

$$V_0 = 0$$

$$V_{\alpha+1} = V_\alpha \cup \mathcal{P}(V_\alpha)$$

$$V_\lambda = \text{اجتماع } \{V_\alpha : \alpha < \lambda\}$$

برای عددهای ترتیبی حدی λ

امروزه دست‌اندرکاران نظریهٔ مجموعه‌ها ادعا می‌کنند که اصول موضوع ZFC برای عالم V از مجموعه‌های شامل همهٔ اشیای یک V_α، بدیهی‌اند. اما درک شهودی این با شهودی که منجر به قبول اصول موضوع ددکیند-پئانو شد، زمین تا آسمان فرق می‌کند. گذشته از چیزهای دیگر، آنچه اینجا محرز فرض می‌شود مفهوم عینی زیرمجموعهٔ دلخواه از یک مجموعه مفروض است. این تصور افلاطونی از ریاضیات است که در مورد نظریهٔ مجموعه‌ها به‌کارگرفته شود و از لحاظ فلسفی محل جدل است؛ در این‌باره بعداً بیشتر صحبت خواهیم کرد.

حالا برگردیم به سرچشمه‌های برنامهٔ گودل برای یافتن اصول موضوع جدید در مقاله‌ای که به سال ۱۹۳۱ در بارهٔ ناتمامیت برای دستگاههای صوری حساب نوشت [۱۰]. می‌خواهم به اختصار این نتایج را یادآوری کنم ولی برای بیان آنها به مفاهیمی نیاز داریم که کمی تخصصی‌اند. ساده‌ترین گزاره‌ها در نظریهٔ اعداد به صورت عمومی محض $(\forall x)f(x) = 0$ و به صورت وجودی محض $(\exists x)f(x) = 0$اند که در اینجا f یک تابع بازگشتی اولیه است. این گزاره‌ها تحت عمل نفی، صورتهای دوگان‌اند یعنی $\neg(\forall x)f(x) = 0$ معادل است با $(\exists x)g(x) = 0$ که در آن $g(x)$ صفر است اگر $f(x) \neq 0$ و یک است، اگر $f(x) = 0$. دستگاه صوری S که زبان آن شامل PA است برای ردهٔ K از گزاره‌ها صحیح است اگر بتوانیم بگوییم هرگاه $S \vdash \phi$

1. urelement

است برای ردهٔ K از گزاره‌ها صحیح است اگر بتوانیم بگوییم هرگاه $S \vdash \phi$ (S نتیجه می‌دهد ϕ) و $\phi \in K$، آنگاه ϕ در اعداد طبیعی صادق است. به‌سادگی می‌توان نشان داد که اگر S سازگار باشد و شامل PA (یا حتی پارهٔ ضعیف‌تری از آن) باشد برای گزاره‌های عمومی (محض) صحیح است اما (همان‌طور که گودل نشان داد) برای گزاره‌های وجودی الزاماً این‌طور نیست. S را ۱ـسازگار می‌گوییم تنها در صورتی‌که برای گزاره‌های وجودی صحیح باشد. توجه داشته باشید که ۱ـسازگاری، سازگاری را نتیجه می‌دهد. (خود گودل از مفهومی کمی قویتر به نام ωـسازگاری استفاده کرد.)

دستگاه S از لحاظ صوری کامل است اگر برای هر فرمول بستهٔ ϕ، یا $S \vdash \phi$ یا $S \vdash \neg\phi$. هیلبرت دو حدس اصلی در بارهٔ PA داشت: اینکه سازگاری PA به‌صورت متناهی‌وار[1] اثبات‌پذیر است و اینکه PA از لحاظ صوری کامل است. هر دو حدس با قضایای ناتمامیت سال ۱۹۳۱ گودل نفی شد [۱۰]. به‌علاوه این قضایا بر دستگاههای صوری Sای که (به طرز کارایی عرضه شده باشند و) PA را به‌صورت بسیار کلیتری بسط بدهند قابل اعمال هستند. گودل به هر چنین دستگاهی یک گزارهٔ عمومی محض θ_S نسبت داد، که خود این گزاره، از طریق عدد گودلِ خودش، نشان می‌داد که در S اثبات‌پذیر نیست. قضیهٔ اول ناتمامیت گودل دو بخش دارد. بخش اول به ما می‌گوید اگر S سازگار باشد آنگاه θ_S واقعاً در S اثبات‌پذیر نیست، پس بنا به ساخت خودش صادق است. بخش دوم می‌گوید اگر S، ۱ـسازگار باشد آنگاه $\neg\theta_S$ هم در S اثبات‌پذیر نیست. چون در غیر این صورت، $\neg\theta_S$، که معادل یک گزارهٔ وجودی است، اگر در S اثبات‌پذیر باشد، باید صادق باشد، و این خلاف بخش اول است. قضیهٔ دوم ناتمامیت گودل به ما می‌گوید که گزارهٔ نظریهٔ اعدادیِ $\mathrm{Con}(S)$ که مبین سازگاری S است، اگر S سازگار باشد در S اثبات‌پذیر نیست. این امر از صورتبندی برهان بخش اول قضیهٔ اول حاصل می‌شود. به این دلیل اگر S دستگاهی باشد که در آن همهٔ استدلالهای متناهی‌وار قابل صورتبندی باشند، آنگاه برنامهٔ کلی سازگاری متناهی‌وار هیلبرت برای S انجام‌پذیر نیست. حالا عموماً پذیرفته‌اند که تمام استدلال متناهی‌وار، اگر نه در دستگاههای بسیار ضعیفتر، ولی در PA قابل صورتبندی است، و اینجاست که برنامهٔ سازگاری متناهی‌وار هیلبرت محدودیتهایش را دارد.

نه تنها نتایج گودل، بلکه توضیح خود او در مورد علت اعتبار آنها هم تکان‌دهنده بود. این توضیح در پانوشتی آمده که ظاهراً به‌عنوان بعدالتحریر در مقالهٔ [۱۰] گنجانده شده است، چون شماره‌اش ۴۸a است. اما بیانگر اعتقادی اساسی است که بعدها در سراسر زندگی گودل تکرار شد، و همین اعتقاد است که ما را به اصل سؤال این مقاله می‌رساند. قراینی وجود دارد که به نظر او چنین دیدگاهی برای مکتب هیلبرت غیرقابل قبول بوده، و او از هرگونه اظهار نظری از این قبیل پرهیز داشته است. در پانوشت آمده:

> ... دلیل واقعی ناتمامیت ذاتیِ همهٔ دستگاههای صوری ریاضیات این است که تشکیل انواع هر چه بالاتر را می‌توان به صورت ترامتناهی ادامه داد ... [چون] گزاره‌های تصمیم‌ناپذیری که اینجا ساخته می‌شوند، با اضافه‌شدن انواع بالاتر مناسب، تصمیم‌پذیر می‌شوند [۱۰، صفحهٔ ۱۹۱].

1. finitarily

اما، ارتباط ناتمامیت و نظریهٔ مجموعه‌ها اینجا توضیح داده نمی‌شود؛ دلیل ناگفته‌اش این است که سازگاری دستگاه S در دستگاهی قابل اثبات است که دامنهٔ متغیرهای مجموعه‌هایش، زیرمجموعه‌های دلخواه عالم مقال S است، که به‌وسیلهٔ آنها می‌توان یک تعریف صدق برای زبان S عرضه کرد. تا اواسط دههٔ ۱۹۴۰ چیزی مثل پانوشت ۴۸a از گودل شنیده نشد. در این موقع گودل در مؤسسهٔ مطالعات پیشرفتهٔ پرینستن جای محکمی داشت، هیلبرت هم مرده بود و رفته بود پی کارش.

در این فاصله، گودل در [۱۱] دومین حکم انقلابیش را ثابت کرده بود: اگر ZF سازگار باشد با اضافه کردن AC و GCH سازگار می‌ماند. روش گودل برای اثبات این ادعا ایجاد یک سلسله مراتب تجمعی جدید به‌عنوان مدلی از نظریهٔ مجموعه‌ها بود که از لحاظ صوری داخل نظریهٔ مجموعه‌ها تعریف می‌شود، به این صورت که در هر مرحله مجموعه‌های ارائه شده منحصر می‌شود به همهٔ زیرمجموعه‌هایی از مرحلهٔ قبلی که در زبان نظریهٔ مجموعه‌ها برای آن مرحله تعریف‌پذیر باشند. مجموعه‌های ساخته‌شده به این طریق، در مرحلهٔ α با L_α نشان داده می‌شوند و تعریفشان دقیقاً مثل مجموعه‌های V_α است، بجز اینکه در مراحل تالی فرض می‌کنیم

$$L_{\alpha+1} = L_\alpha \cup Def(L_\alpha)$$

که $Def(a)$ برای هر مجموعهٔ a مجموعهٔ تمام زیرمجموعه‌های تعریف‌پذیر b از مجموعهٔ a است. گودل مجموعه‌ای را ساختپذیر خواند که متعلق به یک L_α باشد؛ آنگاه L برای گردایهٔ همهٔ مجموعه‌های ساختپذیر به‌کار می‌رود. اصل موضوع ساختپذیری می‌گوید همهٔ مجموعه‌ها ساختپذیرند، و به‌صورت $V = L$ نشان داده می‌شود. از این «اصل موضوع» به‌عنوان واسطهٔ مناسبی در برهان سازگاری نسبی گودل به‌صورت زیر استفاده می‌شود:

۱. اگر ZF سازگار باشد آنگاه $\mathrm{ZF} + V = L$ سازگار است.

۲. $\mathrm{ZF} + V = L \vdash \mathrm{AC\&GCH}$.

از جاگذاری صوری $V = L$ در ۱ و ۲ که بگذریم، این گزاره را به چه معنا می‌توانیم یک اصل موضوع قابل قبول برای نظریهٔ مجموعه‌ها بدانیم؟ گودل در زمان ارائهٔ برهانش (حدود ۱۹۳۸) اظهار داشت این اصل موضوع نوعی مکمل طبیعی برای اصول موضوع نظریهٔ مجموعه‌هاست، چون دقیقاً مشخص می‌کند از کدام مجموعه‌ها داریم صحبت می‌کنیم ـــ کاری که ZF نمی‌کند. اما در دههٔ بعد، گودل با دیدگاهی به‌شدت افلاطونی در مورد اینکه نظریهٔ مجموعه‌ها باید در بارهٔ چه چیزی باشد، صریحاً اصل موضوع بودن $V = L$ را رد می‌کرد. این موضع اولین بار در مقاله‌ای در باب منطق ریاضی راسل در سال ۱۹۴۴ عنوان شد، اما در مقالهٔ سال ۱۹۴۷ گودل بود که با صراحت و با اشارهٔ به‌خصوص به مسائل حل‌نشدهٔ نظریهٔ مجموعه‌ها مطرح شد. این مقاله با عنوان «مسأله پیوستار کانتور چیست؟» [۱۲] شامل نکات زیر بود:

> ۱. نظریهٔ مجموعه‌ها در بارهٔ عالمی چون V از اشیایی است که مستقل از افکار و تعبیرات بشر وجود دارند. این عالم تشکیل می‌شود از نتیجهٔ تکرار ترامتناهی عمل مجموعهٔ توانیِ پ، یعنی عمل تشکیل مجموعهٔ زیرمجموعه‌های دلخواهِ هر مجموعهٔ مفروض. (بنابراین، هیچ دلیلی ندارد که قبول کنیم $V = L$، که می‌گوید همهٔ مجموعه‌ها با تعریفهای متوالی به‌دست می‌آیند.)

۲. گزاره‌های نظریهٔ مجموعه‌ها ارزش صدق معینی (در V) دارند. به‌ویژه، همهٔ اصول موضوع ZFC در V صادق‌اند.

۳. بنابراین CH نیز ارزش صدق معینی دارد. مطابق بحث گودل در [۱۲]، CH احتمالاً کاذب است.

۴. بنابراین CH باید مستقل از ZFC باشد. (درواقع پال کوهن بالاخره در سال ۱۹۶۳ این را ثابت کرد [۲].)

۵. و به این ترتیب برای تعیین وضعیت $\aleph_\alpha$ از $2^{\aleph_0}$ در درجه‌بندی الف‌ها، [بی‌تردید] نیاز به افزودن اصول موضوع جدیدی به ZFC داریم.

۶. این اصول موضوع جدید را می‌شود با توسیع مستقیم همان استدلالهای غیرصوری که منجر به پذیرش ZFC شد، فرمولبندی کرد و پذیرفت. به عبارت دقیقتر: ساده‌ترین اینها [اصول موضوع جدید] ... بیانکنندهٔ وجود اعداد [قویاً] دست‌نیافتنی بزرگتر از $\aleph_0$ است. [این] اصل موضوع، به بیان ساده، چیزی جز این نیست که کلیهٔ مجموعه‌هایی که فقط با استفاده از فرایندهای ساخت مجموعه‌ها، مذکور در اصول موضوع دیگر، به‌دست می‌آیند، خودشان دوباره یک مجموعه تشکیل می‌دهند (و، بنابراین مبنای جدیدی برای کاربرد دوبارهٔ این فرایندها می‌شوند.) اصول موضوع دیگر بینهایت را پ. مالو فرمولبندی کرده است ... این اصول به‌وضوح نشان می‌دهند که نه تنها دستگاه اصل موضوعی نظریهٔ مجموعه‌ها به‌صورتی که امروز می‌شناسیم، ناتمام است، بلکه می‌توان این دستگاه را بدون هیچ‌گونه دلبخواهی بودنی با اصول موضوع جدیدی که تنها ادامهٔ طبیعی اصول موضوع فعلی‌اند، تقویت کرد. [۱۲، صفحهٔ ۵۲۰].

یک کاردینال ناشمارا (قویاً) دست‌نیافتنی است اگر تحت به توان رساندن و حدود کاردینالهای کوچکتر بسته باشد. در نتیجه اگر κ دست‌نیافتنی باشد آنگاه V_κ مدلی از اصول موضوع ZFC است. پس اگر فرض کنیم که کاردینالی دست‌نیافتنی وجود دارد، آنگاه یک نتیجهٔ منطقی عبارت است از سازگاری ZFC، Con(ZFC)، و بنابراین، طبق قضیهٔ دوم ناتمامیت گودل این نتیجه در ZFC اثبات‌پذیر نیست (اگر ZFC سازگار باشد). به همین ترتیب اگر فرض کنیم تعداد معینی کاردینال دست‌نیافتنی وجود دارد، نمی‌توانیم وجود کاردینالهای دست‌نیافتنی بزرگتر را اثبات کنیم. اصول موضوع مالو ابتدا وجود دست‌نیافتنی‌های به دلخواه بزرگ را بیان می‌کند و آنگاه وجود نقطه‌های ثابتِ دست‌نیافتنی به دلخواه بزرگِ شمارش دست‌نیافتنی‌ها را، و ... که به صورت ترامتناهی تکرار می‌شوند. یک راه غیرصوری برای توجیه وجود آنها، و درواقع به طور کلی برای توجیه وجود کاردینالهای نامتناهی، با ارجاع به «امر مطلق کانتور» است: عالم همهٔ مجموعه‌ها فراتر از دسترسی با هر شرط بستاری روی مجموعه‌هاست؛ بلکه، هر چنین شرطی همیشه به یک مجموعه می‌انجامد. به عبارت روشنتر، هر خاصیت بستاری P که عالم همهٔ مجموعه‌ها یعنی V در آن صدق کند، κای به دلخواه بزرگی وجود خواهد داشت که به‌ازای آن V_κ در P صدق کند: روایت صوری این مطالب که ازریل لوی [۲۰] و پاول برنایس [۱] ارائه کردند در نظریهٔ مجموعه‌ها «اصول بازتاب» نام دارد. اینها پشتوانهٔ ادعای گودل برای نیاز به اصول موضوع جدیدند، اصول موضوعی از نوع مالو، «بدون دلبخواهی بودن» و به صورت «ادامهٔ طبیعی» آن اصول موضوعی که از قبل پذیرفته‌ایم. اما ادامهٔ صحبت او چنین است [از نقل قول قبلی]

[اینجا هم] مثل مسألهٔ پیوستار، زیاد امیدی نیست که مشکل را با آن اصول موضوع بینهایت، که بر مبنای قواعدی که امروز می‌شناسیم ساخته می‌شوند، بشود حل کرد ... [همان.]

دلیلش این است که اصول موضوع مالو با $V = L$ سازگارند، و چون GCH در L صادق است و گودل معتقد بود CH کاذب است، کذب آن از این طریق قابل اثبات نبود. گودل ادامه می‌دهد،

علی‌رغم این ... احتمالاً [اصول موضوع] دیگری وجود دارند که مبتنی بر اصولی‌اند که تاکنون آنها را نشناخته‌ایم ... اصول موضوعی که درک عمیقتر مفاهیم زیربنایی ریاضیات و منطق ما را به تشخیص آنها، آن‌طور که این مفاهیم مستلزمشان هستند، قادر می‌کند. [همان.]

در واقع مثالی از نوع بزرگتر کاردینال را مدتی قبل از آن، در سال ۱۹۳۰، استانیسلاو اولام پیشنهاد کرده بود. اولام کاردینال شمارای κ را اندازه‌پذیر خواند اگر یک اندازهٔ دوارزشی κ-جمعی روی $P(\kappa)$ وجود داشته باشد. قدر این پیشنهاد تا سال ۱۹۶۱ ناشناخته ماند. در آن زمان دینا اسکات در [۲۵] ثابت کرد که وجود کاردینالهای اندازه‌پذیر (MC) ایجاب می‌کند که $V \neq L$، بنابراین MC از آن پس راه نجاتی برای حل‌وفصل CH شد. چند سال بعد آلفرد تارسکی همراه شاگردانش ویلیام هانف و اچ. جروم کیسلر در [۱۶] و [۱۹] ثابت کردند که اگر κ یک کاردینال اندازه‌پذیر باشد، بسیار بزرگ، است، چون V_κ در اصول موضوع نوع مالو و دیگر اصول موضوع قدرتمند بینهایت صدق می‌کند. این امر منجر به مفهوم کاردینال قویاً فشرده شد که وجود آن، وجود کاردینالهای اندازه‌پذیر را ایجاب می‌کند. اما بعد تارسکی و گودل هر دو در فرض وجود چنین کاردینالهای عظیمی مردد شدند. تارسکی می‌گوید:

اعتقاد به وجود کاردینالهای دست‌نیافتنی ... (و حتی کاردینالهای به دلخواه بزرگی از این دست) ظاهراً نتیجهٔ طبیعی دریافتهای شهودی اساسی است، که مبنای نظریهٔ «طبیعی» مجموعه‌ها را تشکیل می‌دهد، و دلالت دارد بر آنچه که «امر مطلق کانتور» می‌توان نامید. برعکس، در حال حاضر هیچ دلیل شهودی محکمی نمی‌بینیم که ما را در مورد وجود کاردینالها[ی قویاً فشرده] متقاعد کند، یا لااقل این را کاملاً موجه کند که فرضهای حاکی از وجود چنین کاردینالهایی با اصول موضوع آشنای نظریهٔ مجموعه‌ها سازگار است [۲۷، صفحهٔ ۱۳۴].

گودل در تجدیدنظری که سال ۱۹۶۴ بر مقالهٔ سال ۱۹۴۷ خود داشت [۱۳]، این دیدگاه تارسکی را کاملاً تأیید می‌کند، ولی بعد اضافه می‌کند:

اما [اصول موضوع جدید] با استدلال قویتر شباهت تقویت می‌شوند ... ([۱۳]، صفحهٔ ۲۶۴، پانوشت ۲۰]، تأکید از من است)

به علاوه گودل در سال ۱۹۴۷ استدلال نوع دیگری مطرح کرده بود که می‌توانست منجر به قبول بعضی گزاره‌ها به‌عنوان اصل موضوع جدید بشود، حتی اگر این گزاره‌ها متکی به همان نوع شواهدی نباشند که منجر به قبول ZFC در وهلهٔ اول شد. یعنی:

[سرانجام، باید به دنبال اصول موضوعی باشیم که] آن‌قدر نتایج منطقی قابل اثبات به‌بار بیاورند ... که صرف‌نظر از ضرورت ذاتی‌شان

مجبور به فرض وجود آنها باشیم، همان کاری که با یک نظریهٔ فیزیکی جاافتاده می‌کنیم. ([۱۲، ص ۵۲۱]، تأکید از من است)

اصول موضوع بالاتر بینهایت، یا به اصطلاح «کاردینالهای بزرگ» در نظریهٔ مجموعه‌ها از دههٔ ۱۹۶۰ به بعد موضوع پژوهشهای عمیقی شده است و کاردینالهای جدید بسیاری با خواص ویژهٔ نظریهٔ مجموعه‌ای در این مطالعات به‌دست آمده‌اند[۱]. در کتاب اخیر اکی کاناموری، بینهایتِ بالاتر [۱۷، ص ۴۷۱] و مقالهٔ توضیحی قبلی کاناموری و مناخیم مگی‌دور [۱۸]، شبکهٔ پیچیده‌ای از روابط به استناد جدولها درج شده است. بین کاردینالهای بزرگِ «کوچک» و کاردینالهای بزرگِ «بزرگ»، بسته به اینکه، با یک معیار منطقی، ضعیفتر یا قویتر از کاردینالهای اندازه‌پذیر باشند، تفاوت نه چندان دقیقی قائل شده‌اند. آن عده از دست‌اندرکاران نظریه مجموعه‌ها که در این تحول دست دارند سعی کرده‌اند توجیهاتی برای تأیید هر دو نوع این کاردینالها پیدا کنند. پنه‌لوپ مدی، فیلسوف، در دو مقالهٔ جالب با عنوان «ایمان به اصول موضوع»، استدلالهای مختلف برای این اصول موضوع و انواع دیگر اصلهای موضوع قوی را تحلیل کرده و شواهد موجود برای آنها را خلاصه کرده است [۲۱]. در حالت کلی، استدلالها یا مبتنی بر دلایل درونی‌اند یا دلایل بیرونی. قواعد بازتابی که قبلاً گفتیم نمونه‌هایی از دلایل درونی‌اند اما این دلایل ما را از کاردینالهای بزرگ «کوچک» جلوتر نمی‌برند. از دلایل بیرونی برای بالاتر رفتن، این است که فرض کاردینالهای بزرگِ «بزرگ» ـــ چنان‌که در پژوهشهای خیره‌کنندهٔ سالووی، مارتین، فورمن، مگی‌دور، شلاه، استیل، وودین و دیگران آمده است ـــ در گسترش خواص «استاندارد» بورل و زیرمجموعه‌های تحلیلی پیوستار، مثل اندازه‌پذیری لبگ، خاصیت بئر، خاصیت زیرمجموعهٔ تام، معین‌بودن بازیهای نامتناهی وابسته، و غیره، به رده‌های بسیار بزرگتر، نتیجه‌بخش بوده است.

اما علی‌رغم همهٔ این پیشرفتها، نکتهٔ تکان‌دهنده این است که برخلاف امیدهای گودل، با وجود اضافه شدن این اصول موضوع، فرضیهٔ پیوستار همچنان بلاتکلیف مانده است، چون معلوم شده است که مستقل از همهٔ اصول موضوع «به‌زور حق به جانب» بینهایت، ازجمله MC، است که تا به حال در نظر گرفته‌ایم (به فرض سازگاربودن آنها)[۲]. حالا ممکن است نه تنها به برنامهٔ گودل بلکه به خودِ پیش‌فرضهایش هم شک کنیم. آیا CH آن‌طور که گودل و بسیاری نظریه‌مجموعه‌دانهای اخیر اعتقاد دارند یک مسألهٔ معین است؟ اصلاً خودِ پیوستار یک موجود ریاضی معین است؟ اگر پیوستار فقط وجود افلاطونی دارد، چطور می‌توانیم به خاصیتهایش دست پیدا کنیم؟ به همین منوال، ممکن است مدعی باشیم که پیوستار در فضا و/یا در زمان وجودِ فیزیکی دارد. اما آن‌وقت می‌شود پرسید آیا ساختار ریاضی دستگاه اعداد حقیقی را می‌توان با ساختار فیزیکی یکی گرفت، یا اینکه ساختار ریاضی صرفاً یک مدل ریاضی آرمانی از ساختار فیزیکی است، همان‌طور که قوانین فیزیکی فرمولبندی‌شده به زبان ریاضی، مدلهای بسیار آرمانی از نمودهای واقعیت فیزیکی‌اند. (هرمان وایل در رسالهٔ سال ۱۹۱۸اش با عنوان پیوستار[1] دقیقاً چنین سؤالهایی را مطرح کرد [۲۹].) اما حتی اگر نوعی وجود مستقل، انتزاعی یا فیزیکی، هم برای پیوستار قائل شویم، برای فرمولبندی CH باید به زیرمجموعه‌های دلخواهی از پیوستار و نگاشتهای ممکن بین آنها رجوع کنیم، و آن‌وقت سروکارمان با اشیایی یک پله انتزاعی‌تر است که ماهیت وجودشان حتی بیشتر از خود پیوستار مسأله‌ساز است. دیگر داریم گرفتار بحر عمیق تفکر فلسفی می‌شویم. عجالتاً کمی کنار بکشیم.

در حالی که برنامهٔ گودل برای پیداکردن اصول موضوع جدیدی که تکلیف CH را روشن کند عملی نشده است، در بارهٔ سرچشمه‌های برنامهٔ او در قضایای ناتمامیت برای نظریهٔ اعداد چه می‌توان گفت؟ همان‌طور که دیدیم گودل یک عمر معتقد بود ما به اصول موضوع جدید هر چه قویتری در نظریهٔ مجموعه‌ها نیاز داریم تا مسائل حل‌نشدهٔ حساب، حتی ساده‌ترین و کلیترین نوعشان را ـــ که او مسائل نوع گلدباخ می‌نامید ـــ حل‌وفصل کنیم. واقعاً هم حدس گلدباخ را می‌شود به این صورت نوشت. اما قضیهٔ ناتمامیت به خودی خود هیچ گواهی بر این نیست که مسائل حل‌نشدهٔ حساب ـــ یا معادل آن، مسائل ترکیبیاتی متناهی ـــ که اهمیت ریاضی دارند ـــ نیاز به چنین اصول موضوع جدیدی داشته باشند. بر اهمیت ریاضی تأکید می‌کنم چون مثالهای خودِ گودل از گزاره‌های تصمیم‌ناپذیر برای هر S سازگار شامل PA دو نوع بودند: یکی θ_S که با ساخت قطری برپا می‌شود تا ناتمامیت را ثابت کند، و طبق همان قضیه‌ای که برای اثباتش به‌کار می‌رود، صادق است، و دیگری، $\mathrm{Con}(S)$ که قطعاً اهمیت ریاضی دارد، اما نه به معنای معمولی کلمه. در اواسط دههٔ ۱۹۷۰، منطقدانان تلاشی برای اصلاح این وضعیت شروع کردند. آنها گزاره‌هایی ترکیبیاتی متناهی، با اهمیت ریاضی آشکار ارائه کردند که مستقل از چنین Sهایی بودند. اولین نمونه را جف پاریس و لئو هرینگتون ارائه کردند. آنها در [۲۳] نشان دادند که یک صورت اصلاح‌شده (PH) از قضیهٔ رمزی متناهی در بارهٔ وجود مجموعه‌های همگن برای بعضی انواع افرازها در PA قابل اثبات نیست. PH به‌عنوان یک نتیجهٔ سادهٔ قضیهٔ نامتناهی رمزی، صادق شناخته می‌شود؛ استقلال آن منوط به نشان‌دادن این است که PH، $\mathrm{Con}(\mathrm{PA})$ را نتیجه می‌دهد؛ درواقع PH معادل است با $\mathrm{Con}(\mathrm{PA})-1$. چند سال بعد، هاروی فریدمن، کن مک‌آلون، و استیون سیمپسن، با ارتقا به یک دستگاه بالاتر، یک نوع ترکیبیاتی متناهی (FGP) از قضیهٔ گالوین‌ـپریکری[2] (GP) ارائه کردند که مستقل از دستگاه تحلیل معمولی ففرمن‌ـشوته بود (در اینجا آن را FS می‌نامیم)[۳]. اتفاقاً خود GP صورت بسیار قویتر قضیهٔ رمزی نامتناهی است و FGP شباهتهای معینی با PH دارد. باز هم ثابت می‌شود که این‌گونهٔ متناهی‌وار FGP به‌عنوان یک نتیجهٔ سادهٔ GP صادق

---

۱. این مبحث چنان گسترش یافته است که برای نامیدن مفاهیم مختلف کاردینالهای بزرگ با کمبود اصطلاح مواجه شده‌اند. نمونه‌های آن (تقریباً به ترتیب افزایش قدرت) عبارت‌اند از: «دست‌نیافتنی»، «مالو»، «فشردهٔ ضعیف»، «وصف‌ناشدنی»، «ظریف»، «بیان‌نشدنی»، «رمزی»، «اندازه‌پذیر»، «قوی»، «وودین»، «اَبرقوی»، «قویاً فشرده»، «اَبرفشرده»، «تقریباً عظیم»، «عظیم» و «اَبرعظیم».

۲. مقایسه کنید با مارتین [۲۲]؛ وضعیتی که در آنجا در سال ۱۹۷۶ گزارش می‌شود تا امروز تغییری نکرده است.

1. *Das Kontinuum* 2. Galvin-Prikry

۳. فریدمن، مک‌آلون و سیمپسن با یک دستگاه ATR_0 کارکردند که نشان داده شده است از لحاظ نظریهٔ برهان، هم‌ارز با دستگاه FS از آنالیز نشعابی تا عدد ترتیبی Γ_0 است. فریدمن بعداً گونه‌ای متناهی از قضیهٔ کروسکال (KT) پیدا کرد که مستقل از ATR_0 بود. قضیهٔ نامتناهی‌وار KT، که محور اساسی ترکیبیات نظریهٔ گرافی است، خوش‌شبه‌ترتیبی رابطهٔ قابلیت نشاندن بین درختهای متناهی را بیان می‌کند. کار فریدمن در این باره در [۲۶] گزارش شده است.

است، در حالی‌که استقلال آن مبتنی بر نشان‌دادن این است که از FGP می‌توان $\mathrm{Con(FS)}$ را نتیجه گرفت؛ درواقع FGP معادل ۱ـسازگاری آنالیز معمولی است. نتایج دیگری از این دست، برای دستگاههای آنالیز باز هم قویتر توسط این پژوهشگران و دیگران به‌دست آمده‌اند[۱]. در حالی‌که در هر مورد نشان داده می‌شود گزارهٔ ϕ مستقل از S معادل با ۱ـسازگاری آن است، اقامهٔ دلیل برای صدق ϕ از طریق استدلال معمولی ریاضی است.

چند سالی فریدمن سعی داشت با ارائهٔ گزاره‌های ϕی ترکیبیاتی متناهی واضح از نظر ریاضی، که اثبات آنها مستلزم وجود چندین اصل موضوع مالو یا حتی اصل موضوعهای قویتر بینهایت بود، از این جلوتر برود، و مصادیقی هم برای این پیدا کرد ([۷] حاوی جدیدترین کار در این زمینه است). از لحاظ فراریاضیات این نوع نتیجه همان خصوصیت کار قبلی را دارد؛ یعنی، برای بعضی دستگاههای بسیار قوی S در نظریهٔ مجموعه‌ها، ϕ هم‌ارز با ۱ـسازگاری S است. اما نتیجهٔ حاصل به روشنی نتیجهٔ کار قبلی نیست چون صدق ϕ حالا یک نتیجهٔ حاصل از استدلال معمولی ریاضی نیست، بلکه اساساً بستگی به قبول $\mathrm{Con}(S)$ـ۱ دارد. اینکه ادعا کنیم به این دلیل ما نیاز به اصول موضوعی در بارهٔ کاردینالهای بزرگ برای اثبات صدق ϕ داریم، نوعی مصادره به مطلوب است، چون تنها دلیل ما برای قبول این صدق در اعتقاد به ۱ـسازگاری آن اصول موضوع نهفته است. هر قدر هم به نظر ما موجه باشد، شاید با ساختن تصویری از مدلهای چنین اصول موضوعی، باز هم دلیل نمی‌شود خودِ آن اصول موضوع را به‌عنوان اصلهای درجهٔ اول ریاضی قبول کنیم. بالاخره باید به این واقعیت توجه داشت که تا به حال، هیچ مسألهٔ فرمولبندی‌شدهٔ حل‌نشده‌ای در نظریهٔ اعداد یا ترکیبیات متناهی، مثل حدس گلدباخ یا فرض ریمان یا حدس عددهای اول دوقلو، یا مسألهٔ $\mathrm{P} = \mathrm{NP}$، دیده نشده که مستقل از انواع دستگاههای صوری مورد بحث ما، یا حتی مستقل از PA باشد. اگر چنین چیزی به صورتی که در مثالهای بالا آوردیم (PH، FGP و غیره) اثبات شود، آنگاه صدق آنها هم در همان حال اثبات می‌شود. به نظر من احتمالاً همان‌طور که در مورد «قضیهٔ آخرفرما» نشان داده شد، سرانجام اثبات صدق اینها ــ اگر شدنی باشد ــ از طریق استدلالهای معمولی ریاضیاتی بدون هیچ گذاری به فراریاضیات انجام خواهد گرفت، و تنها بعد از آن است که ممکن است ببینیم دقیقاً کدام قواعد اصل موضوعی اساسی برای اثبات آنها لازم است.

اگر از حوزهٔ حساب و ترکیبیات متناهی فراتر برویم، چه دلیلی دارد که برای ریاضیات روزمره محتاج اصول موضوع جدیدی باشیم؟ بدون شک، درست است که نشان داده‌اند قسمتهای مختلف نظریهٔ توصیفی مجموعه‌ها نیاز به اصول موضوع بینهایتِ [مراتب] بالاتر دارند و در بعضی موارد بسیار فراتر از حوزهٔ مقادیر کاردینالهای بزرگ «کوچک». اما این هم نوعی مصادره به مطلوب است، چون باور ما به صدق این نتایج جدید اساساً بستگی به

۱. دستگاههای مورد بحث وگزاره‌های مستقل مربوط به آنها توضیح پیچیده‌تری می‌طلبند که از حوصلهٔ این مقاله خارج است، اما اقلاً یک نتیجه در ارتباط با یادداشت قبلی به نشان‌دادنش می‌ارزد. فریدمن یک گونهٔ بسط‌یافتهٔ EKT از KT پیدا کرد که مستقل از اصل تصریح $\prod_1^1$ غیرحملی در آنالیز بود ([۲۶] را ببینید). بعداً معلوم شد EKT رابطهٔ نزدیک ریاضی و فراریاضی با قضیهٔ ماینورگراف رابرتسن و سیمور دارد، که در [۹] نشان داده شده است.

این دارد که کم‌وبیش درستی یا سازگاری این گزاره‌های «بالاتر» را باور داشته باشیم. به‌علاوه، فکر می‌کنم بشود گفت که این نوع نتایج در حاشیهٔ ریاضیات معمولی ما قرار می‌گیرد یعنی در حاشیهٔ مسائلی که ریاضیدان به طور روزمره با آنها سروکار دارد[۱]. آنچه در حاشیه نیست به سادگی در ZFC صورتبندی می‌شود، و درواقع با دستگاههای بسیار ضعیفتر نیز این کار ممکن است، همان‌طور که بسیاری از مطالعات موردی سالهای اخیر نشان داده است.

حالا اختصاصاً آن بخش از ریاضیات را که کاربرد علمیش اجتناب‌ناپذیر است، در نظر بگیریم. می‌دانیم که این قسمت از ریاضیات، ازجمله، شامل بخش وسیعی از آنالیز است. اگر معتقد به دیدگاه افلاطونی نباشید یکی از استدلالها برای قبول هر نظریه‌ای در مورد مجموعه‌ها را ویلارد ون اورمان کواین و هیلری پاتنم ارائه کرده‌اند: یک نظریهٔ مجموعه‌ها برای مبانی آنالیز لازم است، و ریاضیات حاصل با کاربرد اساسی و موفقیت‌آمیز آن در یک نظریهٔ فیزیکی جاافتاده، تأیید می‌شود. اما این استدلال با یک سری تحقیقات موردی متزلزل شد. شروع این‌کار از رسالهٔ معروف هرمان وایل با عنوان پیوستار [۲۹] در سال ۱۹۱۸ بود که در آن وایل علی‌الاصول نشان داد که چگونه می‌توان کل آنالیز توابع تکه‌ای‌ـپیوستهٔ قرن نوزدهم را در یک دستگاه S تحویلپذیر به PA، صورتبندی کرد؛ از اواسط دههٔ ۱۹۷۰ این کار با بررسیهای افرادی از جمله گایسی تاکیوتی[۲]، هاروی فریدمن، استیون سیمپسن و من، برای گسترش این بحث به بخشهای اساسی آنالیز قرن بیستم از جمله بخش اعظم آنالیز تابعی و نظریهٔ اندازه، دنبال شده است. در نتیجهٔ این مطالعات، من به این حدس رسیده‌ام که تقریباً همهٔ ریاضیات قابل کاربرد در علم را می‌توان در دستگاههای تحویلپذیر به PA صورتبندی کرد، یا همان‌طور که در [۴] شعار داده‌ام «ازکم خیلی کارها برمی‌آید». در مقابل، در مواردی در رهیافتهایی به مبانی نظریهٔ میدان کوانتومی فهمیده‌ام که ظاهراً باید از منابع PA فراتر برویم، اما نظریه‌های فیزیکی محتاج این منابع اضافی، بیشتر گمانه‌زنی‌اند. در هر حال، ریاضیات لازم در این موارد را می‌توان در زیردستگاههای نسبتاً ضعیف آنالیز غیرحملی، به انجام رساند، حتی اگر PA کفایت نکند. اصلاً منظورم این نیست که عمل روزمرهٔ ریاضی باید منحصر به کار در چنین دستگاههای فرعی باشد. ارزش ابزاری مفاهیم گسترده‌تر و «بالاتر» نظریه مجموعه‌ها غیرقابل انکار است، اما اینجا اصل مطلب این است که ببینیم: چه چیزی، اساساً برای چه چیزی ضروری است؟

وقت جمع‌بندی است، امیدوارم قدری خوراک فکری به شما داده باشم که کمک کند خودتان در بارهٔ سؤالاتی نظیر اینکه «آیا فرضیهٔ پیوستار معین است؟» نتیجه‌گیری کنید، و اینکه اگر چنین باشد، با فرض ناکافی بودن اصول موضوع فعلی، چه چیزی باید این مسائل را رفع ورجوع کند. اول مقاله قول داده بودم نظر خودم را در بارهٔ این چیزها مطرح کنم. تا حالا، حتماً حدس زده‌اید چه می‌خواهم بگویم، اما بگذارید با صدای بلند نظرم را اعلام کنم: به اعتقاد من فرضیهٔ پیوستار یک مسألهٔ ذاتاً مبهم است، که هیچ اصل موضوع

۱. یک دیدگاه مخالف، و شرح زیبایی از نیاز به اصول موضوع جدید در این باره در وودین [۳۰] آمده است.

2. Gaisi Takeuti

جدیدی هم به صورت قانع‌کننده‌ای دوای دردش نیست[۱]. بعد هم، فکر می‌کنم فلسفهٔ افلاطونی ریاضیات که فعلاً ادعای توجیه نظریهٔ مجموعه‌ها و به طور کلی، ریاضیات را دارد، به هیچ‌وجه رضایت‌بخش نیست و به نظر من باید فلسفهٔ دیگری مبتنی بر دریافتهای بین‌الاذهانی بشر پیدا کرد که عالم عینی ریاضیات را توصیف کند. سرانجام اینکه، من هیچ دلیلی نمی‌بینم که برای حل مسائل حل‌نشدهٔ ترکیبیاتی متناهی و حساب، عملاً نیازی به اصول موضوع جدید داشته باشیم. حل مسألهٔ فرما نمونه‌ای است که نشان می‌دهد ما فقط باید با این اصول موضوع پایه‌ای که داریم بیشتر کار کنیم. اما برای منطقدانان از لحاظ نظری بسیار جالب است که ببینند اگر از قبل اصول معینی را پذیرفته باشیم چه اصول موضوع جدیدی باید پذیرفته شود، مثلاً گودل فکر می‌کرد اگر اصول موضوع تسرملو فرنکل را پذیرفتیم، اصول موضوع کاردینالهای دست‌نیافتنی و مالو را باید بپذیریم. راستش را بخواهید من بیشتر از سی سال است که دارم از راههای مختلف روی این موضوع کار می‌کنم؛ طی سال گذشته به این نتیجه رسیدم که آنچه در سر دارم رضایت‌بخش‌ترین فرمولبندی کلی این موضوع است به صورت چیزی که من اسمش را می‌گذارم «گشودن یک دستگاه صوری شماتیک» [**۵**]. و این در اصل برمی‌گردد به مبدأ «طبیعی» فرمولبندی شماتیک اصولی نظیر استقرا در نظریهٔ اعداد و تفکیک، در نظریهٔ مجموعه‌ها، وقتی در مفهوم ماقبل نظریه‌ای خاصیت دلخواه «معین» به‌کار می‌روند. این با کاربرد روزمرهٔ ما بیشتر تطبیق دارد، که چنین اصولی را، بدون قید و شرط روی اینکه در چه زبان به‌خصوصی فرمولبندی شده‌اند، به صورت نامحدود به کار می‌بریم. اما می‌توانیم به صورتی روشمند آنچه را که در یک موضوع مفروض، معنی‌دار می‌یابیم غنیتر کنیم، به این صورت که همان اصول را با نوعی روش پسخورد دوباره به کار بگیریم. مثل وقتی که اصل استقرا را به کار می‌گیریم تا ثابت کنیم که یک تابع یا محمول از اعداد طبیعی که به طور ضمنی با معادلات بازگشتی تعریف می‌شود، تمام است و بنابراین می‌تواند به زبان ما اضافه شود. در کاری که مشترکاً با توماس اشترام انجام می‌دهیم، تاکنون نتایجی قطعی برای سیستمهای خاص با به کارگیری فرایند «گشودن» حاصل شده است [**۶**]. ما در این کار با گروهی از مسائل تازه و جالب روبه‌رو هستیم که باید به نوبت با آنها دست و پنجه نرم کنیم. اما این داستان دیگری است برای وقتی دیگر.

مراجع

1. P. Bernays, Zur Frage der Unendlichkeitsschemata in der axiomatischen Mengenlehre, in (Y. Bar-Hillel, et al., eds.) *Essays on the Foundations of Mathematics*, Magnes Press, Jerusalem, 1961, pp. 3-49. (English translation in (G. H. Müller, ed.) *Sets and Classes*, North-Holland, Amsterdam, 1976, pp. 121-172.)

2. P. J. Cohen, The independence of the Continuum Hypothesis. I. *Proc. Nat. Acad. Sci., U.S.A.* 50 (1963) 1143-1148, and II. *ibid.* 51 (1964) 105-110.

۱. CH فقط برجسته‌ترین نمونه در میان نمونه‌های بسیاری از احکام نظریهٔ مجموعه‌هاست که من فکر می‌کنم ذاتاً مبهم‌اند. البته می‌توان با اطمینان در داخل خود نظریهٔ مجموعه‌ها (یعنی در ZFC) در مورد این گزاره‌ها طوری بحث کرد که گویی معنی معینی دارند.

3. R. Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen?*, F. Vieweg, Braunschweig, 1888. (English translation, in *Essays on the Theory of Numbers*, Dover, New York, 1963, pp. 29-115.)

4. S. Feferman, Why a little bit goes a long way: Logical foundations of scientifically applicable mathematics, *PSA* 1992, *Vol. II* (1993), pp. 442-455.

5. S. Feferman, Gödel's program for new axioms: Why, where, how and what?, in (P. Hájek, ed.) *Gödel '96', Lecture Notes in Logic* 6 (1996), pp. 3-22.

6. S. Feferman and T. Strahm, The unfolding of non-finitist arithmetic (to appear).

7. H. Friedman, Finite functions and the necessary use of large cardinals, *Ann. of Math.* (2) (to appear).

8. H. Friedman, K. McAloon, and S. G. Simpson, A finite combinatorial principle which is equivalent to the 1-consistency of predicative analysis, in (G. Metakides, ed.) *Patras Logic Symposion*, North-Holland, Amsterdam, 1982, pp. 197-230.

9. H. Friedman, N. Robertson, and P. D. Seymour, The metamathematics of the graph minor theorem, in (S. G. Simpson, ed.) *Logic and Combinatorics*, Contemporary Mathematics 65, Amer. Math. Soc., Providence, 1987, pp. 229-261.

10. K. Gödel, Über formal unentscheidbare Sätze der *Principia Mathematica* und verwandter Systeme I, *Monatsh. Math. Physik* 38 (1931), 173-198. (Reprinted with English translation in [14, pp. 144-195].)

11. K. Gödel, The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum hypothesis, *Proc. Nat. Acad. Sci., U.S.A.* 24 (1938), 556-557. (Reprinted in [**15**, pp. 26-27].)

12. K. Gödel, What is Cantor's continuum problem?, *Amer. Math. Monthly* 54 (1947), 515-525; errata 55, 151. (Reprinted in [**15**, pp. 176-187].)

ترجمهٔ فارسی با عنوان «مسألهٔ پیوستار کانتور چیست؟»، *نشر ریاضی*، سال ۲، شمارهٔ ۱، صص ۴۶_۵۴.

13. K. Gödel, What is Cantor's continuum problem? (Revised and expanded version of [12], in (P. Benacerraf and H. Putnam, eds.) *Philosophy of Mathematics: Selected Readings*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1964, 258-273; reprinted in [15, pp. 254-270].)

14. K. Göded, *Collected Works, Vol. I. Publications* 1929-1936 (S. Feferman, et al., eds.), Oxford University Press, New York, 1986.

15. K. Göded, *Collected Works, Vol. II. Publications* 1938-1974 (S. Feferman, et al., eds.), Oxford University Press, New York, 1990.

16. W. Hanf, Incompactness in languages with infinitely long expressions, *Fund. Math.* 53 (1964), 309-324.

17. A. Kanamori, *The Higher Infinite*, Springer-Verlag, Berlin, 1994.

18. A. Kanamori and M. Magidor, The evolution of large cardinal axioms in set theory, in (G. H. Müller and D. S. Scott, eds.) *Higher Set Theory*, Lecture Notes in Mathematics 669 (1978), 99-275.

19. H. J. Keisler and A. Tarski, From accessible to inaccessible cardinals, *Fund. Math.* 53 (1964), 225-308; errata 57 (1965), 119.

20. A. Levy, Axiom schemata of strong infinity in axiomatic set theory, *Pacific J. Math.* 10 (1960), 223-238.

21. P. Maddy, Believing the axioms, I, *J. Symbolic Logic* 53 (1988), 481-511, and II, *ibid.*, 736-764.

22. D. A. Martin, Hilbert's first problem: The Continuum Hypothesis, in (F. Browder, ed.) *Mathematical Developments Arising from Hilbert Problems,* Proc. Symposia Pure Math. 28, Amer. Math. Soc., Providence, 1976, pp. 81-92.

23. J. Paris and L. Harrington, A mathematical incompleteness in Peano arithmetic, in (J. Barwise, ed.) *Handbook of Mathematical Logic*, North-Holland, Amsterdam, 1977, pp. 1133-1142.

24. G. Peano, *Arithmetices Principia, Nova Methodo Exposita*, Bocca, Turin (1889). (Reprinted in *Opeara Scelte, Vol.* 2, Edizioni Cremonese, Rome, 1958, pp. 20-55. and in English translation in [28, pp. 83-97].)

25. D. S. Scott, Measurable cardinals and constructible sets, *Polish Acad. Sci. Math.* 9 (1961), 521-524.

26. S. G. Simpson, Nonprovability of certain combinatorial properties of finite trees, in (L. A. Harrington et al., eds.) *Harvey Friedman's Research on the Foundations of Mathematics*, North-Holland, Amsterdam, 1985, pp. 87-117.

27. A. Tarski, Some problems and results relevant to the foundations of set theory, in (E. Nagel, et al., eds.) *Logic, Methodology and Philosophy of Science. Proceedings of the* 1960 *International Congress*, Stanford University Press, Stanford, 1962, pp. 125-135.

28. J. van Heijenoort, *From Frege to Gödel. A Source Book in Mathematical Logic*, 1879-1931, Harvard University Press, Cambridge, 1967.

29. H. Weyl, *Das Kontinuum. Kritische Untersuchungen über die Grundlagen der Analysis*, Veit, Leipzig, 1918. (English translation: *The Continuum. A critical examination of the foundations of analysis*, University Press of America, Latham, 1987.)

30. H. Woodin, Large cardinal axioms and independence: The continuum problem revisited, *Math. Intelligencer* 16 (1994), 31-35.

ترجمهٔ فارسی با عنوان «اصول موضوع عددهای اصلی بزرگ، و استقلال ...» در نشر ریاضی، سال ۶، شمارهٔ ۱ و ۲، صص ۲۱_۲۵.

31. E. Zermelo, Beweis, dass jede Menge wohlgeordnet werden kann, *Math. Ann.* 59 (1904), 514-516. (English translation in [28, pp. 139-141].)

32. E. Zermelo, Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre, I, *Math. Ann.* 65 (1908), 261-281. (English translation in [28, pp. 199-215].)

33. E. Zermelo, Über Grenzzahlen und Mengenbereiche: Neue Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre, *Fund. Math.* 16 (1930), 29-47.

******

• Solomon Feferman, "Does mathematics need new axioms?", *Amer. Math. Monthly*, (2) **106** (1999) 99-111.

* سالومون ففرمن، استاد ریاضیات و فلسفه در دانشگاه استنفرد، آمریکا
sf@csli.stanford.edu