مجسم‌سازی ریاضیات:
راهی به‌سوی یک کاوشکدهٔ ریاضی•

ریچارد پله*
ترجمهٔ سیدعلی کتان‌فروش

«بیایید یکدیگر را در بهتر دیدن اشیاء کمک کنیم»
کلودمونه

مقدمه

ریاضیدانان همیشه برای تجسم موجودات و فرایندهای انتزاعی که در همهٔ شعب تحقیقات ریاضی مطرح می‌شوند، از «چشم ذهن»شان استفاده می‌کرده‌اند. اما پیشرفتهای قابل توجه در فن‌آوری کامپیوتری در همین سالهای اخیر باعث شده است این تصاویر مبهم و ذهنی که آنها را در مغزمان «می‌بینیم» به راحتی وجود خارجی پیدا کنند و جای آنها را مجسم‌سازیهای واضح و عینی بگیرد که می‌توان در مورد آنها با دیگران اتفاق‌نظر داشت. این پیوند بین ریاضیات و علوم کامپیوتر، موضوع بحثی است، که در ادامه می‌آید و از آن با عنوان مجسم‌سازی ریاضی یاد خواهم کرد.

این موضوع آنقدر نو و آنچنان در تغییر و تحول است که تشریح جزئیات مراحل پیشرفت و یا وضعیت فعلی آن مشکل می‌نماید. ولی دو مبحث تحقیقاتی مهم را می‌توان نام برد که شهرت و اعتبار مجسم‌سازی کامپیوتری را به عنوان ابزاری جدی در تحقیقات ریاضی تثبیت کرده‌اند. این دو مبحث عبارت‌اند از پشت‌وروسازیِ صریح کره و ساختنِ صریح رویه‌های نشانده شدهٔ مینیمال کامل با گوناهای بالاتر. مستندات خوبی از تاریخچهٔ هر دوی اینها در دست است که بخشی از آنها را بعداً در همین مقاله بازگو خواهم کرد.

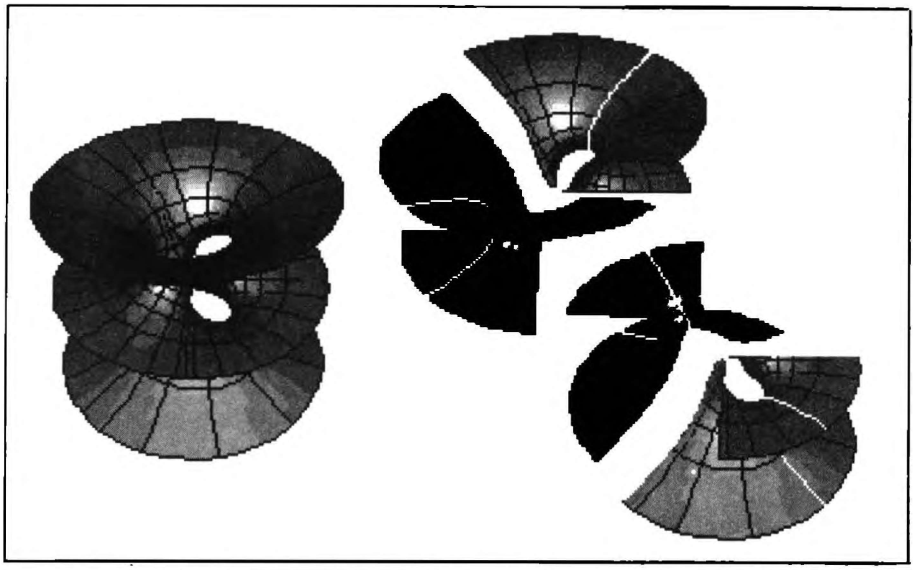
با این حال، دلیل اصلی من برای نوشتن این مقاله شرح و تفصیل موفقیتهای پیشین مجسم‌سازی ریاضی نیست، بلکه بررسی این مسأله است که، «از اینجا به کجا می‌رویم؟». من اکنون بیش از پنج سال است که روی یک برنامهٔ مجسم‌سازی ریاضی کار می‌کنم [۱]. در حین ساخت این برنامه، بینشها و مشاهداتی بدست آورده‌ام که فکر می‌کنم برای خوانندهٔ عادی جالب باشد. سعی می‌کنم بعضی از آنها را در این مقاله تشریح کنم. کار بر روی این برنامه، به‌خصوص مرا واداشت تا به‌طور جدی در بارهٔ امکان کاربردهایی جدید و جالب توجه از مجسم‌سازی ریاضی بیاندیشم. مایلم در اینجا یکی از آنها را به‌طور خاص نام ببرم و امیدوارم در نظر دیگران نیز مانند من، دورنمایی مهیج از مجسم‌سازی ریاضی باشد: ایجاد یک نگارخانهٔ تعاملی[۱] از هنر و مجسم‌سازی ریاضی روی شبکه، که آن‌را «کاوشکدهٔ ریاضی» می‌نامم.

صحبت را با مرور برخی از کاربردهای آشنای تکنیکهای مجسم‌سازی ریاضی شروع می‌کنم. یک کاربرد بدیهی این تکنیکها استفاده از آنها به‌عنوان وسیله و ابزاری آموزشی برای افزایش و تکمیل مدلهای گچی ظریفی از رویه‌های ریاضی است که در بسیاری از مراکز ریاضی در جایگاههای نمایشی جای گرفته‌اند [Fi] و نیز اشکال و نمودارهای ترسیمی در کتابهای درسی، حتی درکتابهای کلاسیک بسیار عالی چون هندسه و تخیل [HC]. مزیت استفاده از تصاویر کامپیوتری برای توسعه و تکمیل این مدلها و سایر شیوه‌های قدیمی نمایش موجودات ریاضی، در این است که کامپیوتر نه تنها امکان تولید سریع چنین تصاویر ثابت و بی‌تحرکی را فراهم می‌کند، بلکه علاوه بر آن، مستقیماً برای تولید تصاویر متحرکی که دوران و یا دگرریختی مدل را نمایش می‌دهند، به‌کار می‌آید. این تصاویر متحرک، می‌توانند منظرهٔ شناخته شدهٔ ریاضیات را از راههایی تازه و بدیع، به صورت زنده و جاندار مجسم سازند.

موضوع مهیج‌تر حتی برای ریاضیدانان محقق، این است که اکنون می‌توان از نرم‌افزارهای مجسم‌سازی ریاضی برای کسب بینش و اطلاعات نو در بارهٔ موجودات پیچیده و خوب شناخته نشدهٔ ریاضی استفاده کرد. برای مثال،

1. interactive gallery

با نسبت دادن نمایش هندسی به یک وجود مجرد ریاضی و سپس با نمایش آن به‌طور بصری، گاه می‌توان وجود یک تقارن جدید را که از طریق بحث نظری کشف نشده، آشکار ساخت. دقیقاً یک چنین تقارن پنهان مانده‌ای که با مجسم‌سازی هویدا شد، نقشی اساسی در اثبات هافمن-میکس برای نشاندنی بودن رویهٔ مینیمال کاستا[1] ایفا کرد [H] (شکل ۱ را ببینید). همین‌طور، نمایشی متحرک از دگرریختی که در آن یک مشخصهٔ بصری در حین تغییر پارامترها ثابت باقی می‌ماند، ممکن است حاکی از وجود یک ناوردای غیربدیهی باشد. دگرریختی بین پیچوار و زنجیره‌وار که بعداً درباره‌شان بحث می‌کنیم، مثالی از این دست است. (شکل ۲ را ببینید).



شکل ۱ تقارنهای رویهٔ کاستا. رویهٔ کاستا (سمت چپ) توسط سه صفحهٔ مختصات بریده شده و به هشت قطعهٔ همنهشت، ناحیه‌های بنیادی گروه تقارنها، تفکیک شده است. صفحهٔ افقی رویهٔ کاستا را در امتداد دو خط مستقیم قطع می‌کند. نیمهٔ بالایی و پایینی کمی از هم جدا شده‌اند تا رویه‌هم‌افتادگی نداشته باشند. صفحات عمودی، صفحات تقارن انعکاسی هستند و خطوط تقارن به‌صورت شکافهایی در دو نیمهٔ بالایی و پایین مشخص شده‌اند. هشت ناحیهٔ بنیادی، هر یک در یک‌هشتم از فضا، می‌توانند به‌صورت یک گراف نمایش داده شوند و بدین‌ترتیب قضیهٔ هافمن-میکس مبنی بر اینکه رویهٔ کاستا نشاندنی است، از این واقعیت، به‌سادگی به‌دست می‌آید.

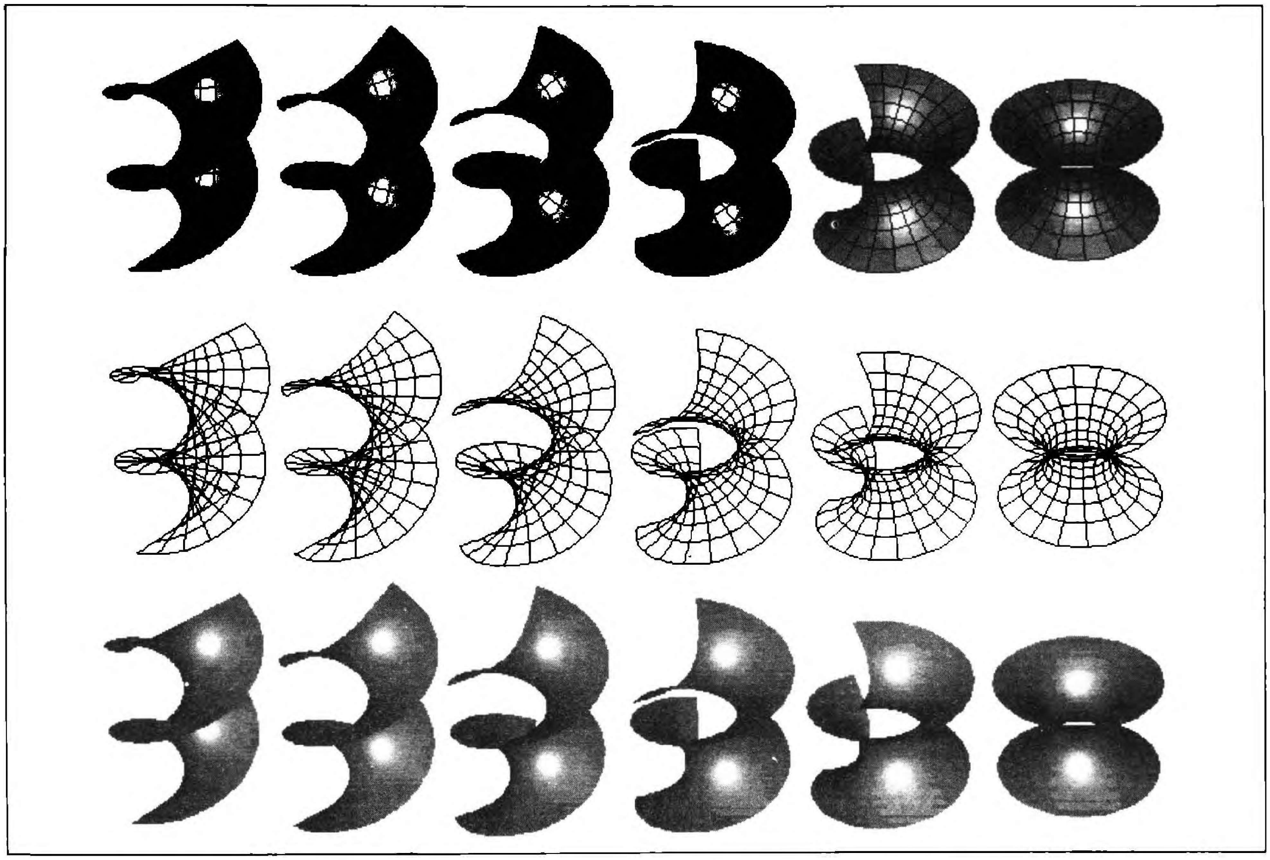
ریاضیدانان کاربردی درمی‌یابند که ماهیت به‌شدت تعاملی تصاویر تولید شده با نرم‌افزارهای اخیر مجسم‌سازی ریاضی، به آنها امکان می‌دهد که با سهولتی که تا پیش از این هرگز ممکن نبود، دست به تجربیات ریاضی بزنند. از آنجا که تعداد بسیار کمی از دستگاههایی [از معادلات] که ایشان روی آنها کار می‌کنند، جوابهای صریح و در فرم بسته می‌پذیرند، توانایی بررسی جوابها به صورت بصری در بسیاری از حوزه‌ها ضرورت یافته است. برای مثال، در مطالعهٔ جریان شاره‌ها در نزدیکی زمان پیدایش تلاطم، توصیف یک میدان سرعت در ناحیهٔ کوچکی از فضای سه‌بعدی، آن هم به‌ازای یک بازهٔ زمانی چندثانیه‌ای می‌تواند تریلیونها عدد در سیستم نقطهٔ شناور تولید کند. روشهایی آماری برای برآورد چنین مقدار بزرگی از داده‌ها وجود دارد؛ با این حال، نمایش عینی میدان سرعت برای آگاهی یافتن از آنچه در جریان است، ضروری است.

همین‌طور، دانشمندانی که به ریاضیات نیاز دارند و آن را به‌کار می‌گیرند، لکن کارکردن با نمادها و روابط مجرد ریاضی کاملاً برایشان راحت نیست، بسیاری اوقات خواهند توانست مفاهیم ریاضی را که با آنها سروکار دارند بهتر بفهمند اگر بتوان این مفاهیم را به‌صورت عینی مجسم کرد. و بالاخره، قابل انکار نیست که مجسم‌سازی ریاضی جاذبهٔ زیبایی شناسانهٔ قوی حتی برای مردم عامی دارد؛ فروش چشمگیر کتابهای مصور بسیار بزرگِ رومیزی حاوی اشکال فرکتالی [برخالی] که برای مطالعهٔ تفننی مورد استفاده قرار می‌گیرند، شاهد این مدعاست.

مجسم‌سازی ریاضی ≠ گرافیک کامپیوتری

درس مهمی که من از تجربیات شخصی‌ام آموخته‌ام، این است که برنامه‌نویسی مجسم‌سازی ریاضی را نباید صرفاً حالت خاصی از برنامه‌نویسی گرافیک سه‌بعدی (3D) در نظر گرفت. این دو با آنکه در مفاهیم و الگوریتمها اشتراک دارند ولی اهداف و شیوه‌هایشان کاملاً از یکدیگر متمایز است. درواقع در نمایش فرایندها و موجودات ریاضی، ویژگیهای ذاتی خاصی وجود دارد که اگر به درستی به حساب آورده شود، می‌تواند وظایف برنامه‌نویسی را بسیار ساده‌تر کند و به الگوریتمهایی منجر شود که نسبت به تکنیکهای استاندارد برنامه‌نویسی گرافیک سه‌بعدی کارامدتر باشد. برعکس، اگر این جنبه‌های خاص نادیده انگاشته شود، مثلاً یک رویهٔ ریاضی با تکنیکهای نرم‌افزاری نمایش داده شود که [به‌طورکلی] به‌منظور نمایش مرز اشیاء جامد در دنیای واقعی، طراحی شده‌اند، در پایان کار، بسیاری از ویژگیهای اساسی این رویه که ریاضیدان به مشاهدهٔ آنها علاقه‌مند است، پوشیده و پنهان می‌مانند. طبقه‌بندی روشن و ظریف رویه‌ها از دید ریاضیدانان و تفکیک آنها به رویه‌های پارامتری، ضمنی، جبری، شبه‌کروی، مینیمال، رویه‌های با انحنای میانگین ثابت، رویه‌های ریمانی و ... ، با برداشتی که در گرافیک کامپیوتری از رویه وجود دارد، مغشوش و مبهم می‌شود و شخص سریعاً درمی‌یابد که نه تنها شیوه‌های رایج گرافیک کامپیوتری برای خلق و نمایش همهٔ انواع گوناگون رویه ناکافی و نامناسب هستند بلکه روشی که با هدف بهینه‌کردن نمایش یک نوع خاص از رویه‌های ریاضی طراحی شده است، ممکن است برای دیگر انواع رویه مناسب نباشد. یک نتیجهٔ این بحث آن است که خط‌مشی خوب این نیست که مجسم‌سازی ریاضی براساس تعداد کم و مشخصی از روالهای گرافیکی سطح بالای از پیش تعیین شده، پایه‌ریزی شود و توقع داشته باشیم که بتوان آنها را برای همهٔ اقسام موجودات ریاضی به کار برد. البته برای شروع کار به تعدادی روال گرافیکی سطح پایین و قدیمی نیاز است، اما

1. Costa



شکل۲ دگریختی پیچوار و زنجیره‌وار. در اینجا (به‌کمک سه روش تصویرسازی)، شش پرده از دگریختی خانوادهٔ وابسته‌ای که رویه‌های مینیمال پیچوار و زنجیره‌وار را به‌هم مربوط می‌کند، نشان داده شده است. تصویرسازی وصله‌ای (بالا) و سیمی (وسط) ویژگی ایزومتریک دگردیسی را به نمایش می‌گذارد، حال آنکه تصویرسازی سرامیکی آن‌را پنهان می‌سازد. توجه کنید که چگونه خاصیت خودبه‌خودیِ پنهان‌سازی خطوط در الگوریتم نقاش باعث می‌شود که نمونهٔ وصله‌ای از حیث بصری برتر از نمونهٔ سیمی باشد.

به‌جای در پیش گرفتن رهیافت قالبی، یعنی کوشش برای قراردادن هر یک از موجودات ریاضی در قالب یکی از شیوه‌های معدود سطح بالای نمایش، بهتر است برای هر نوع وضعیت خاص ریاضی از روالهای سطح پایین برای طراحی الگوریتمهای بهینهٔ نمایش استفاده شود. این کار، تلاش بیشتری را از برنامه‌نویس می‌طلبد. لکن به‌دست آوردن نتایج برتر این تلاش اضافی را توجیه‌پذیر می‌کند. دومین نتیجه این است که یک یا چند ریاضیدان باید نقشی محوری و پیش‌برنده در طراحی و ایجاد هر پروژهٔ جدی نرم‌افزار مجسم‌سازی ریاضی ایفا کنند. من خود را در هندسهٔ دیفرانسیل به‌نسبت مطلع می‌دانم و برای برنامه‌نویسی مقدماتی بخشهای زیادی از برنامه‌ام که به خمها و رویه‌ها مربوط می‌شد، هم به‌عنوان برنامه‌نویس و هم به‌عنوان مشاور ریاضی ایفای نقش کردم. اما در هنگام برنامه‌نویسیِ ساخت و نمایش رویه‌های مینیمال و شبه‌کروی دریافتم که برای انجام یک کار حرفه‌ای، قطعاً ضروری است که با متخصصان (هرمان کارچر[1] و چوایان ترنگ[2]) همکاری نزدیک داشته باشم.

در آنچه در ادامه می‌آید، همچون فوق، اغلب با مراجعه به مجسم‌سازی موجودات هندسی مثل خمها، رویه‌ها و چندوجهیها، برخی نکات را توضیح خواهم داد. چنین مثالهایی را بیشتر به این دلیل انتخاب می‌کنم که آنها از جنبهٔ شهودیِ نیرومندی برخوردارند و بنابراین به توضیح کمتری نیاز دارند. اما درک این واقعیت مهم است که تقریباً همهٔ این نکات را می‌توان در ارتباط با نمایش نگاشتهای هندسی، جوابهای معادلات دیفرانسیل معمولی و جزئی و یا مجسم‌سازی مربوط به تقریباً هر ردهٔ دیگری از موجودات ریاضی مطرح کرد.

دنیای گرافیک چندشیئی در برابر دنیای گرافیک تک‌شیئی. من در بالا ادعا کردم که مجسم‌سازی ریاضی دارای ویژگیهایی است که آن‌را از گرافیک معمول کامپیوتری جدا می‌سازد و به برخی تکنیکها و الگوریتمهای خاص نیاز دارد. در این بخش و بخش بعدی دو مثال ساده خواهم آورد که این نکته را نشان می‌دهد.

اگر یک نمایش تصویریِ نوعی که توسط یک برنامهٔ گرافیک سه‌بعدی تولید شده است مورد بررسی قرار گیرد، مثلاً، پیش‌درآمد برنامهٔ اخبار شب تلویزیون، تعداد زیادی اشیاء متفاوت در حال حرکت به طرق متفاوت دیده می‌شوند. یک گوی کروی که کرهٔ زمین را نشان می‌دهد، حول یک محور

1. Hermann Karcher   2. Chuu-Lian Terng

عمودی می‌چرخد، در حالی که یک آرم در همان زمان که حول یک محور افقی می‌گردد، به سمت مرکز دید نزدیک می‌شود و . . . . این نمونه‌ای است از آنچه من از آن با عنوان دنیای گرافیک چندشیئی یاد می‌کنم. روش طبیعی برای متحرک‌سازی تصاویر در چنین دنیایی، خلق هر یک از اشیاء سه‌بعدی در یک موقعیت و با یک جهت «مبنایی» و سپس انتساب یک «ماتریس به‌هنگام‌سازی» 4×4 به این شیئ است. برای هر پرده از نمایش متحرک، این ماتریس مقادیر مورد نیاز را برای انتقال و دوران شیئ از وضعیت اولیه‌اش [مبنایی‌اش] به وضعیت مطلوب در این پرده، در بر دارد. برای ایجاد یک پرده از یک چنین نمایش متحرک، لازم است که هر نقطه از شیئ واقع در این دنیای چندشیئی به‌وسیلهٔ ماتریس تبدیل متناظرش تغییر وضعیت داده شود. برای یک نمایش متحرک بی‌درنگ[1] از صحنه‌ای با هر میزان پیچیدگی به‌وسیلهٔ این روش، به کامپیوتری بسیار قوی، معمولاً همراه با سخت‌افزار گرافیکی ویژه، نیاز است.

از طرف دیگر، اگر یک مجسم‌سازی ریاضی نوعی مورد بررسی قرار گیرد، ملاحظه می‌شود که متشکل از یک شیئ تنها (مثل خم، رویه، چندوجهی و . . .) است که معمولاً در مرکز صفحه قرار گرفته است و تحرک دورانی تقریباً همیشه حول مرکز صفحه صورت می‌گیرد. از یک چنین ترکیب گرافیکی با عنوان دنیای گرافیکی تک‌شیئی یاد می‌کنیم. حال البته می‌توان با نادیده گرفتن این واقعیت که $n = 1$، با یک چنین ترکیبی دقیقاً مثل یک حالت خاص دنیای n شیئی رفتار کرد. اما ۱ عدد صحیحی به مراتب خاص‌تر است و درواقع به‌جای به‌کارگیری ماتریس دوران M برای هر یک از نقاط شکل‌دهندهٔ شیئ، یک راه کارامدتر برای دوران دادن دنیای تک‌شیئی حول یک محور وجود دارد؛ بدین‌ترتیب که وارون ماتریس M برای تعیین موقعیت دوربین تصویربرداری و سه برداری که جهتهای [اصلی] را برای آن تعریف می‌کنند، به‌کار برده می‌شود. از حیث بصری این عمل همان اثر قبلی را خواهد داشت، اما در حالت کلی، به میزان قابل توجهی کارامدتر خواهد بود و می‌تواند امکان نمایش متحرک دورانی بی‌درنگ را بر روی کامپیوترهای سادهٔ رومیزی، بدون نیاز به سخت‌افزار گرافیکی خاص فراهم کند.

ترسیم روی پرده در برابر ترسیم پشت پرده. یک تکنیک استاندارد تصویرسازی برای نمایش یک رویه بر روی صفحهٔ نمایش کامپیوتر، «الگوریتم نقاش» است. رویه به‌صورت مجموعه‌ای از «خرده وجوه» (چندضلعیهای رنگ شده، اغلب مثلث یا مستطیل) نمایانده می‌شود. این خرده وجوه برحسب فاصله‌شان تا دوربین تصویربرداری، مرتب می‌شوند و بعد، از عقب تصویر تا جلوی آن [از دورترین خرده وجه تا نزدیکترین خرده وجه به دوربین] بر روی صفحه نمایش «نقاشی» می‌شوند. این روش، این مزیت آشکار را دارد که خرده وجههایی که پشت سر دیگر خرده وجهها قرار دارند، خودبه‌خود پنهان می‌شوند.

متخصصان گرافیک کامپیوتری تقریباً همیشه الگوریتم نقاش را با تکنیک دیگری به نام «میانگیری دوگانهٔ حافظه[2]» یا «ترسیم پشت پرده[3]» توأم می‌کنند، و آن به این ترتیب است، که ابتدا کل رویه را در جایی موسوم به «میانگیر پشت پرده» ترسیم می‌کنند. این مکان بخشی از حافظهٔ کامپیوتر است که درست همانند حافظهٔ صفحهٔ نمایش است. فقط هنگامی‌که رویه کامل گردد، این میانگیر به حافظهٔ صفحهٔ نمایش برگردان می‌شود. نتیجه آن است که رویهٔ تکمیل شده ناگهان روی صفحه نمایش ظاهر می‌شود. علت استفاده از میانگیری دوگانه این است که در اکثر مواقع، گمان نمی‌رود که کاربر بخواهد نمای نازیبای یک رویهٔ ناقص رنگ‌آمیزی شده را ببیند.

اما در موارد خاصی، به‌کار بردن ترسیم پشت پرده برای نمایش یک رویهٔ ریاضی، یک جرم برنامه‌نویسی است که تا حد جنایت پیش می‌رود! بیشتر رویه‌های جالب توجه، بسیار پیچیده‌اند و غالباً غوطه‌ور شده‌اند نه نشانده شده. از هر موضعی که به آنها نگریسته شود، چندین «لایه» [از روی هم گذر کرده] وجود خواهد داشت که باعث می‌شود جزئیات مهم لایه‌های دورتر توسط لایه‌های نزدیکتر از نظر پوشیده شوند. تماشای رویه همچنان که به‌تدریج توسط الگوریتم نقاش ساخته می‌شود، می‌تواند تجربهٔ فوق‌العاده روشنگری باشد، آن‌گونه که برای هندسه‌دان همان نقشی را ایفا کند که کالبد شکافی برای کالبدشناس ایفا می‌کند.

با این حال، گهگاه پیامهایی از سر حسن‌نیت از اشخاص غیرریاضیدانِ آشنا به گرافیک سه‌بعدی کامپیوتر، از طریق پست الکترونیک دریافت می‌کنم که به‌طور اتفاقی برنامه‌ام را مشاهده کرده‌اند. مضمون این پیام همیشه یکسان است: برنامه‌ات خیلی خوب است، ولی جداً باید یک کتاب مقدماتی در مورد گرافیک کامپیوتری به‌دست آوری و تکنیک میانگیری دوگانه را بیاموزی تا از دست این رویه‌های نیمه‌کاره رسم شده، خلاص شوی! (معمولاً پاسخ می‌دهم که من هم از این تکنیک استفاده می‌کنم، بدین‌ترتیب که پس از آنکه رویه کاملاً به‌صورتِ روی پرده ترسیم می‌شود، حافظهٔ تصویری RAM را در یک میانگیر پشت پرده که از آن برای به‌هنگام‌سازی صفحهٔ نمایش استفاده می‌کنم، کپی می‌کنم. [البته] گمان می‌کنم که این طریقهٔ قهقرایی برای انجام کارها ایشان را متقاعد کرده است که وضع من [در گرافیک کامپیوتری] خراب است، چون مکاتبات ایشان معمولاً در همین جا قطع می‌شود.)

فرایندها

مجسم‌سازی فرایندها همان‌قدر مهم است که مجسم‌سازی اشیاء. وقتی ساخت برنامه‌ام را شروع کردم، احساس می‌کردم که وظیفهٔ اصلی هر برنامهٔ مجسم‌سازی، نمایش اشیاء گوناگون ریاضی است. اما با گذشت زمان متوجه شدم که این تنها یک بخش از داستان است و شاید امر بسیار مهمتر، نمایش فرایندهای ریاضی باشد. می‌دانم که ارائهٔ یک تعریف ریاضی دقیق برای مقصودی که من از «فرایند» در اینجا دارم، مشکل است؛ تعریفی که تمام موارد مهمی را که ممکن است پیش آید، شامل شود. ولی به بیان نادقیق، منظورم از فرایند، نمایش متحرکی است که در آن خانواده‌ای از موجودات ریاضیِ مرتبط با هم و یا شیئ حاصل از فرایندی که به‌طور طبیعی به شیئ دیگری مربوط است، نشان داده می‌شوند. شاید بهترین کار، توضیح موضوع با چند مثال باشد.

دگرریختی. دگرریختی یکی از مهمترین فرایندهاست، پس ابتدا به تشریح آن می‌پردازم. بیشتر موجودات ریاضی در خانواده‌هایی طبیعی واقع می‌شوند که برحسب پارامترهای معینی توصیف می‌شوند ــ که اگر ابتدا مجموعهٔ

1. real-time animation
2. double-buffering
3. offscreen drawing

پارامترها به گروه مناسبی از خودریختیها تقسیم شود، آنها را پیمانه[1] نیز می‌خوانند. برای مثال، هر بیضی را می‌توان با پنج پارامتر ــ ضرایب معادلهٔ ضمنی بیضی ــ توصیف کرد و اگر [این مجموعه را] به [خودریختیهای] حرکات صلب صفحه، تقسیم کنیم، می‌توان آن را با دو پیمانه یعنی طول نیم‌قطرهایش توصیف کرد. یک هدف اولیه در هر نظریهٔ ریاضی دربارهٔ نوع جدیدی از موجودات، معمولاً ارائهٔ یک «قضیهٔ رده‌بندی» یا به بیان نه چندان دقیق، یافتن فضای پیمانه‌ای است. گام بعدی، بررسی موشکافانهٔ این فضای پیمانه‌ای است برای پی بردن به اینکه خواص گوناگون این موجود چگونه به پیمانه‌ها وابسته هستند و اینکه کدام مقادیر پیمانه سبب پیدایش موجوداتی با خواص ویژه و قابل توجه می‌شوند. برای مثال، هنگامی‌که دو نیم‌قطر بیضی برابر باشد، بیضی یک دایره است و یک گروه پیوسته از تقارنها دارد، در حالی‌که بیضی در حالت کلی، تنها یک گروه متناهی از تقارنها دارد.

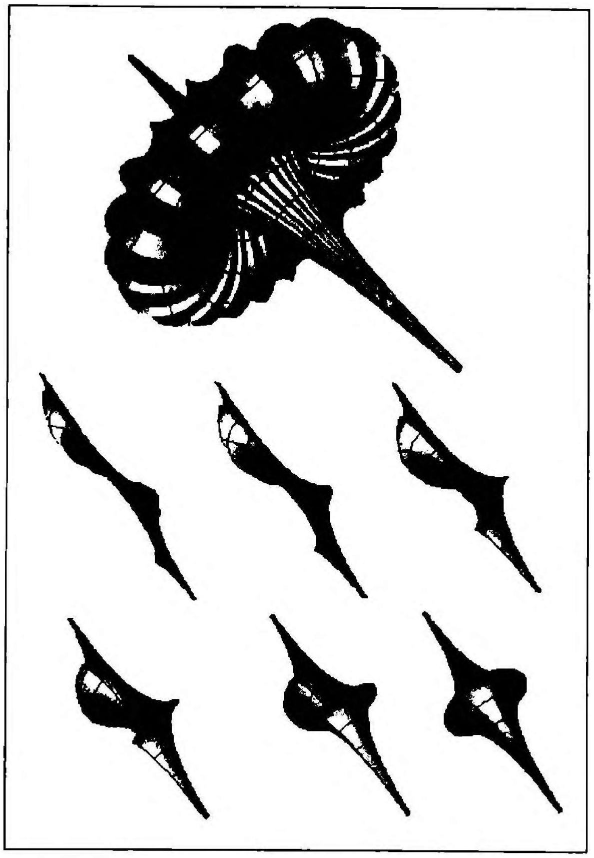
اگر بتوانیم روش خوبی برای نمایش گرافیکی یک شیء طرح کنیم که از جمله، شامل وابستگی آن شیء به پیمانه باشد، آنگاه می‌توانیم در امتداد خمی در فضای پیمانه‌ای حرکت کنیم و پرده‌هایی را که حاوی نمایش گرافیکی این شیء در نقاط مختلف این خم‌اند ترسیم کنیم. حال اگر این پرده‌ها را به‌سرعت و پشت سرهم نمایش دهیم، فیلمی از چگونگی تغییر شیء، متناظر با تغییر پیمانه‌ها در امتداد خم، به‌دست می‌آوریم. این چیزی است که آن‌را دگرریختی می‌نامم. این کار به‌وضوح می‌تواند ابزاری قوی در بررسی فضای پیمانه‌ای باشد. بسیاری اوقات، حتی وقتی‌که فضای پیمانه‌ای نامتناهیْ بعد است، خمهای ویژه‌ای وجود دارند که دگرریختیهای جالبی به‌دست می‌دهند.

برای مثال، رویه‌های مینیمال در خانواده‌هایی یک‌پارامتری (موسوم به خانواده‌های وابسته) قرار می‌گیرند که در هر یک از این خانواده‌ها، همهٔ اعضا ایزومتریک هستند، گرچه معمولاً همنهشت نیستند. با استفاده از پارامتر خانوادهٔ وابسته به‌عنوان یک پارامتر دگرریختی، یک نمایش متحرک بسیار زیبا پدید می‌آید که آن‌را اصولاً می‌توان برروی صفحات فلزی مدلسازی کرد. پیچوار و زنجیره‌وار به یک خانوادهٔ وابسته متعلق‌اند و کتابهای هندسهٔ دیفرانسیل غالباً چندین پرده از یک دگرریختی بین آنها را نشان می‌دهند. (شکل ۲ را ببینید.)

همین‌طور، فضای پیمانه‌ای برای رویه‌های شبه‌کروی را می‌توان با فضای جوابهای معادلهٔ دیفرانسیل جزئی سینوسی گوردون یکی گرفت. فضای دوم، شامل خانواده‌های nپارامتری معینی است (جوابهای nـسولیتون ناب)، که متناظر با رویه‌های بسیار جالب توجهی هستند. ۱ـسولیتونها متناظرند با خانوادهٔ معروف دینی[2] که شبه‌کره را شامل می‌شود. تمایل چو‌ـلیان ترنگ[3] به اینکه ببینیم چه خواصی از رویه‌های متناظر با خانوادهٔ ۲ـسولیتونها حین دگرریختی درون این فضا، تغییر می‌کنند، انگیزهٔ اولیهٔ من برای شروع به‌کار روی برنامه‌ام بود. (شکل ۳ را ببینید.)

فرایند دگرریختی آنچنان ابزار قوی و آشکارکننده‌ای است که هر گاه رده‌ای جدید از موجودات ریاضی را به مجموعهٔ برنامه‌ام اضافه می‌کنم، مدت زمان زیادی را صرف فکرکردن و انجام آزمایشهای مبتکرانه برای بهره‌گیری از دگرریختیهای کاملاً مناسب برای آن رده می‌کنم. برای مثال فهمیدم که در نمایش نگاشتهای همدیس، دگرریختی بین یک نگاشت مفروض و نگاشت

1. modulus 2. Dini 3. Chuu Lian Terng



شکل۳ رویه‌های شبه‌کروی. جوابهای معادلهٔ سینوسی گوردون (SGE)، $u_{tt}-u_{xx}=\sin(u)$ در تناظر یک‌به‌یک با رویه‌هایی در R^3 هستند که مدلهایی از هندسهٔ هذلولوی لوباچفسکی‌اند. SGE یک معادلهٔ سولیتونی است و در بالا رویهٔ متناظر با یک جواب زمان‌ـمتناوب با عدد سولیتون ۲، موسوم به [رویهٔ] Breather دیده می‌شود. در پایین، شش پرده از دگرریختی میان خانوادهٔ دینی از رویه‌ها دیده می‌شود که با خانوادهٔ یک‌پارامتری SGEهای ۱ـسولیتون در تناظرند.

همانی در امتداد یک مسیر به‌دقت انتخاب شده راه بسیار مناسبی برای آشکارکردن ساختار نگاشت است. و بالاخره اینکه، دگرریختی روشی بدیهی برای نمایش‌دادن انشعابهای جوابهای معادلات دیفرانسیل عادی و نیز مشاهدهٔ لحظهٔ آغازین آشوب در هنگام تغییر پارامتری اساسی است. نمونهٔ بارزی از موضوع اخیر، معادلهٔ معروف لورنتس است که یکی از انگیزه‌ها را برای کارهای اولیه در مبحث آشوب فراهم کرد. درواقع لورنتس از تکنیکهای اولیهٔ کامپیوتری که در آن زمان در دسترس داشت، برای تغییردادن عدد رنولدز و مشاهدهٔ اینکه چگونه یک نقطهٔ ثابت جاذب به «جاذب لورنتس» تبدیل می‌شود، استفاده کرد.

فرایندهای دیگر. در اینجا به سرعت به چند «فرایند» دیگر اشاره می‌کنم تا حوزهٔ این مفهوم روشنتر شود.

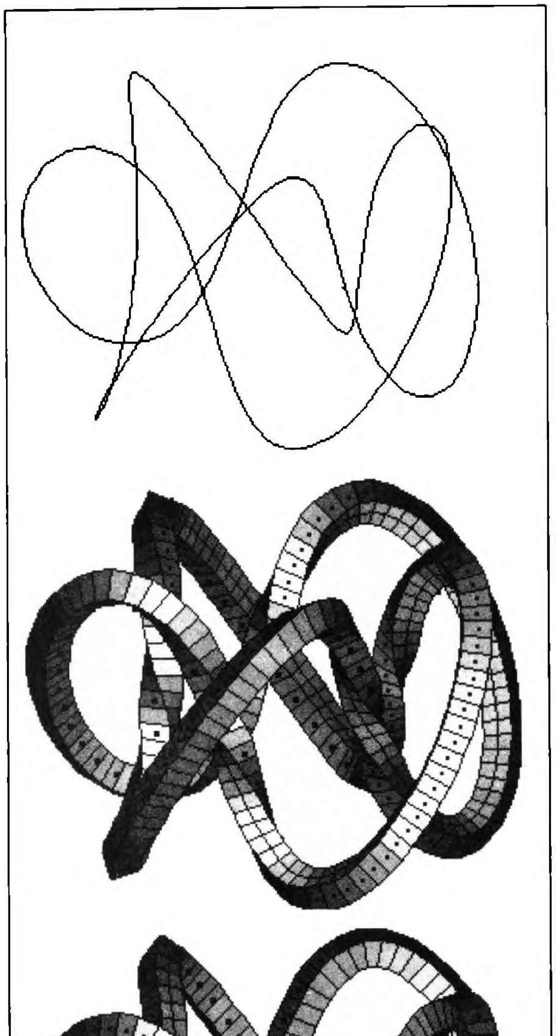
اگر یک خم مسطح داده شده باشد، نمایش متحرکی که در آن «دایره‌های بوسان» به‌ازای نقطه‌ای در حال حرکت در امتداد خم ترسیم می‌شوند، اطلاعاتی به‌دست می‌دهد؛ در این حال، مرکز انحنای خم در حین اجرای

نمایش، گستردهٔ خم را ترسیم می‌کنند. در حقیقت تعداد زیادی از چنین فرایندهای کلاسیک وجود دارد که خمهای دیگری را به یک خم مفروض ارتباط می‌دهند (مثل خمهای پدالی [پادکی]، استروفوییدها، برون‌چرخزادها، خمهای موازی و . . .)، که بیشترشان به‌کمک یک کامپیوتر با سادگی بیشتری فهمیده و تصویر می‌شوند.

برای خم فضایی، یک فرایند جالب، ساختن «لوله»ای غلافی است که خم را دربرگیرد. این کار نیاز به انتخاب یک کنج برای کلاف قائم بر خم دارد. معمولاً «کنج فرنه» انتخاب می‌شود و لوله برای آشکارکردن این کنج مهم (ولی معمولاً غیرقابل رؤیت) به‌کار می‌رود. به دلایل زیبایی‌شناسی، ابتدا به‌نظر می‌رسد که باید لوله‌ای با مقطع عرضی گردْ انتخاب گردد. اما برای اینکه کنج به‌طور واضح دیده شود، مقطع عرضی لوله باید مربع شکل باشد. ریاضیدانان اگر این نحوهٔ نمایش را ببینند، تقریباً همیشه آن را ترجیح خواهند داد. بیشتر اشخاص معمولاً از دیدن اینکه کنج فرنه در جاهایی که انحنای منحنی کوچک است، این‌قدر سریع می‌پیچد، خیلی متعجب می‌شوند. تعویض دستگاه فرنه با یک کنج متوازی برای کلاف قائم بر خم نیز می‌تواند جالب باشد. در این حالت هیچ پیچشی وجود ندارد و کنج، حقیقتاً متوازی به‌نظر می‌رسد. اما حالا هولونومی[1] به‌وضوح قابل رؤیت می‌شود: با دورزدن در امتداد یک خم بسته، کنج معمولاً به مقدار اولیه‌اش [در شروع حرکت] باز نمی‌گردد. (شکل ۴ را ببینید).

برای رویه، فرایندهای با اهمیت عبارت‌اند از ساختن مجموعه‌های کانونی آن و رویه‌های موازی.

برای چندوجهی، دو فرایند جالب توجه عبارت‌اند از ستاره‌بندی[2] و دیگری برش گوشه‌های چندوجهی (این فرایند همان است که یک بیست‌وجهی را به یک «توپ دندانه‌دار»[3] تبدیل می‌کند). در اینجا اجرای یک دگرریختی را بین صورتهای برش زده شده و برش نخورده، آموزنده می‌دانم.



شکل۴ لوله‌هایی غلافی حول یک گره چنبره‌ای. یک نما از گره ۲، ۵ـ‌چنبره‌ای و دو لولهٔ دربرگیرندهٔ آن با مقطع عرضی مربعی. لولهٔ بالایی از کنج فرنه برای کلاف قائم استفاده می‌کند، و دیگری از کنج متوازی. توجه کنید که چگونه این لوله‌ها طبیعت سه‌بعدی گره را به نمایش می‌گذارند. می‌توان دید که کنج فرنه بسیار سریع در درون چنبره می‌پیچد و چشم هولونومی نابدیهیِ کنج متوازی را کشف می‌کند؛ آن‌طور که دیده می‌شود لوله در انتهای سمت راست و پایین گره بر خودش منطبق نمی‌شود.

ریاضیات در برابر هنر

نباید بین مجسم‌سازی ریاضی و هنر ریاضی خلط مبحث شود. منظور من از هنر ریاضی، کارهای هنرمندان خوش‌ذوق گرافیست و مجسمه‌سازی است که موضوع اصلی کارشان از دنیای ریاضیات نشأت می‌گیرد. همه کس ترسیمات ریاضی زیبا و مجذوب‌کنندهٔ اِشِر [Sc]، گرافیست معروف هلندی نیمهٔ اول قرن حاضر را دیده‌اند. در زمانی متأخرتر نیز هنرمند و ریاضیدان روسی، آناتولی فومنکو، موزهٔ هنری ریاضی ما را با تصاویری تماشایی از مناظر فراواقع‌گرایانه، غنا بخشید، تصاویری برخاسته از اعماق تخیلات هوشمندانهٔ او که مفاهیم پیچیدهٔ ریاضی را مصور می‌کنند و روشن می‌سازند [Fo]. در حال حاضر، نسلی جدید از هنرمندان از دنیای افلاطونی ریاضیات الهام می‌گیرند. پیشتازان این جمع مجسمه‌سازانی چون هلامان فرگوسن[4]، چارلز پری[5] و برنت کالینز[6] هستند. تمام آنها از نرم‌افزارهای مجسم‌سازی ریاضی برای خلق اشیائی که شالودهٔ مجسمه‌هایشان را تشکیل می‌دهند استفاده می‌کنند ولی همچون اِشِر، بعد از این کار، دید هنرمندانهٔ خویش را برروی این مادهٔ ریاضیِ پرداخت نشده که مبنای کارشان است، متجلی می‌کنند.

یکی از تمایزهایی که بین یک محصول گرافیکی مجسم‌سازی ریاضی و یک قطعهٔ اثر هنر ریاضی به‌نظر می‌آید، تفاوت آشکار در مدت و دشواری

1. holonomy 2. stellation 3. buckyball
4. Helaman Ferguson 5. Charles Perry 6. Brent Collins

تولید آنهاست. اولی معمولاً به‌طور کاملاً خودکار و اغلب ظرف تنها چند ثانیه از وقت کامپیوتر تولید می‌شود، حال آنکه دومی غالباً روزها و یا حتی هفته‌ها کار دستی ماهرانهٔ شخص هنرمند را لازم دارد و شاید پیش از آن، مدت زمانی بس طولانیتر صرف اندیشیدن در بارهٔ طرح و نقشهٔ آن شود. اما این طریقهٔ نگریستن به موضوعات، حقیقت عمیقتری را بد جلوه می‌دهد. کار جدی برای طرح و خلق یک اثر گرافیکی مجسم‌سازی ریاضی واقعاً وقتی محقق می‌شود که الگوریتمها، پیاده‌سازی و برنامه‌نویسی شوند. این عمل برای موجودات پیچیده ممکن است بخشی طولانی و صعب‌العبور از مسیر تحقیق باشد. در اصل، خلاقیت در مجسم‌سازی ریاضی از آنِ برنامه‌نویس است، نه کامپیوتر.

تفاوت واقعی بین این دو، در اهداف غایی آنهاست. در خلق آثار هنر ریاضی، ریاضیات یک نقطهٔ شروع است، ولی مسیر را هنر هدایت می‌کند. «مجوز هنری»، این آزادی را به هنرمند می‌بخشد که از وفاداری کامل به ریاضیات چشم بپوشد و از دیگر اصول زیبایی‌شناسی به منظور تأکید بر وجوهی از واقعیت که هنرمند سعی در نشان‌دادن آنها به ما دارد، استفاده کند.

اما در مجسم‌سازی ریاضی، اصل کنترل‌کننده همیشه باید این باشد که کیفیات و خواص اصولی موجوداتی که مجسم می‌شوند به آشکارترین وجه ممکن نشان داده شوند. در برابر وسوسهٔ «خوشگل‌کاری» در مجسم‌سازی باید مقاومت شود، به‌خصوص اگر اطلاعات ریاضی در آن میان از دست بروند. یک نمونهٔ این قاعده بیشتر ذکر شد، یعنی، به‌کارگیری مربع به‌جای دایره به‌عنوان مقطع عرضی لولهٔ غلافی حول خمهای فضایی به منظور مجسم ساختن کنج کلاف قائم.

در اینجا مثالی دیگر، این بار از نظریهٔ رویه‌ها، می‌آوریم. بررسی تعداد زیادی از مجسم‌سازیهای رویه که توسط کامپیوتر انجام شده‌اند، نشان می‌دهد که تقریباً همهٔ آنها در یکی از سه نوعی که از آنها به‌عنوان رویهٔ با قالب سیمی، رویهٔ وصله‌ای و رویهٔ سرامیکی یاد خواهم کرد، قرار می‌گیرند. عبارت «رویهٔ با قالب سیمی» بی‌نیاز از توضیح است. در تصویرسازی وصله‌ای، اسکلت قالب سیمی [آن‌گونه که در تصویرسازی رویهٔ سیمی هست]، باز هم نمایش داده می‌شود ولی علاوه بر آن داخل هر یک از وصله‌های مستطیل شکل با رنگ خاصی پر می‌شود. این رنگ، مشابه اثر بازتابش نور چندین منبع نور از سطح سفیدرنگ رویه است که آن منابع در مکانهای متفاوت و به رنگهای متفاوت هستند. اگر این مکانها و رنگها با دقت انتخاب شوند، تصویرسازی وصله‌ای، جلوهٔ سه‌بعدی واقع‌نمایانه‌ای از رویه ارائه می‌کند. در تصویرسازی سرامیکیِ رویه، قالب سیمی حذف می‌شود و فقط وصله‌های رنگ شده نمایش داده می‌شوند. اگر وصله‌ها به‌قدر کافی کوچک باشند، به‌نظر می‌رسد رنگ سطح رویه به همواری تغییر می‌کند. در این حالت، نتیجهٔ تصویرسازی باز هم واقع‌نمایانه است.

اکنون، شخص غیرریاضیدان ممکن است احساس کند که قالب سیمی، بی‌ربط است و نمونهٔ سرامیکی زیباتر به چشم می‌آید. اما زیبایی به نظر بیننده بستگی دارد. در چشم هندسه‌دان، نمونهٔ سیمی [۲] و یا وصله‌ای غالباً زیباتر به‌نظر می‌رسد چون، حاوی اطلاعات ریاضی بیشتری است که با حذف شبکهٔ سیمی از بین می‌روند. درواقع، اگر شبکه‌بندی سیمی با دقت انتخاب شده باشد، شبکه‌ای متعامد خواهد بود که می‌تواند ساختار همدیس یا حتی متریک ریمانی القاءشده از غوطه‌وریِ رویه در R^3 را نمایش دهد. با مشاهدهٔ مرحله به مرحلهٔ سه نمونه از دگرریختی بین پیچوار و زنجیره‌وار که به‌ترتیب به‌صورت سیمی، وصله‌ای و سرامیکی تصویرسازی شده‌اند، این موضوع به طرز نمایانی آشکار می‌گردد. حقیقت مهمی که بناست با این اشکال نشان داده شود، یعنی، ایزومتریک بودن یک دگرریختی در خانواده‌ای وابسته، در دو نمونهٔ اول به‌خوبی به چشم می‌آید اما در تصویرسازی سرامیکی کاملاً از دید مخفی شده است (شکل ۲). منظور این نیست که تصویرسازی وصله‌ای ضرورتاً همیشه بهتر از حالت سرامیکی است بلکه این است که هنگام استفاده از نرم‌افزار برای مجسم‌سازی ریاضی، هدف آرمانی باید این باشد که با تنظیم دقیق تمام گزینه‌های موجود، آن دسته از ویژگیهای ریاضی که در موردی خاص باید مورد توجه قرار گیرند، به بهترین صورت نمایش داده شوند، و نباید اجازه داد تا مفاهیم زیبایی‌شناسی، ملاحظات ریاضی را تحت‌الشعاع قرار دهند.

کاوشکدهٔ ریاضیات

بر کسی پوشیده نیست که مقدار غیرقابل باوری از اطلاعات روی شبکهٔ جهانی وب هنوز سازماندهی ضعیفی دارند و به‌راحتی در یک طبقه‌بندی برحسب ربط و کیفیت قرار نمی‌گیرند. تلاش برای جداکردن قطعه‌های پربها از این تودهٔ درهم و برهم ممکن است کاری بی‌ثمر باشد. با به‌کارگیری هر کدام از برنامه‌های جستجوی شبکهٔ وب برای تهیهٔ فهرستی از پایگاههای وب که شامل ارجاعات به تقریباً هر مبحث قابل تصور باشد، شبکه‌هایی از آدرسهای اینترنتی (یعنی URLها)، که احتمالاً با موضوع مورد جستجو در ارتباط‌اند، به‌دست می‌آید. ولی وارسی دقیق در میان آنها برای یافتن معدودی که اهمیت جدی دارند، معمولاً کاری سخت و وقت‌گیر است.

طی سال گذشته، به‌طور پیگیر، اینترنت را برای یافتن منابعی برای مجسم‌سازی ریاضی جستجو می‌کردم [۳]، هم برای تدارک نوشتن این مقاله و هم برای استفاده در پروژه دیگری که مشغول به آن هستم. شگفت‌آور و خوشحال‌کننده آن بود که، می‌دیدم چه مطالب زیادی در این زمینه می‌توان یافت و این مجموعه از مطالب با چه سرعتی در حال رشد است. البته کیفیت آنها یکدست نیست؛ برخی آماتوری هستند و سرسری تهیه شده‌اند. اما مقدار زیادی کارِ با کیفیت حرفه‌ای نیز وجود دارد. همان‌طور که به‌تدریج این مطالب را برای اهداف فوری خود مرتب می‌کردم، به این فکر افتادم که می‌توان با سازماندهی دقیقِ بهترین مجسم‌سازیها و نمایشهای متحرکِ موجودات و فرایندهای ریاضی، منبعی مفید فراهم کرد و با فهرست‌بندی و مستندسازی آنها یک موزهٔ ریاضیِ آماده به کار روی شبکه تشکیل داد که من از آن به‌عنوان کاوشکدهٔ ریاضی یاد می‌کنم. اجازه دهید آنچه را در فکر دارم با جزئیات بیشتری تشریح کنم.

کاوشکدهٔ ریاضی به «شاخه‌ها»یی تقسیم می‌شود. در آنجا شاخه‌ای برای رویه‌ها، شاخه‌ای برای چندوجهیها، شاخه‌ای برای فرکتالها، شاخه‌ای برای کاشیکاریها، شاخه‌ای برای معادلات دیفرانسیل عادی و ... وجود دارد. شاخه‌ای نیز به یک مدرسهٔ موزه‌ای اختصاص داده می‌شود. در این شاخه، بسته‌های نرم‌افزاری برای مجسم‌سازیها و نیز مستندات و خودآموزهایی که

نحوهٔ به‌کارگیری این نرم‌افزارها را تشریح می‌کنند وجود دارد. هر شاخه به نگارخانه‌هایی تقسیم می‌شود. برای مثال، شاخهٔ رویه‌ها، نگارخانه‌ای برای رویه‌های شبه‌کروی، نگارخانه‌ای برای رویه‌های مینیمال و امثال آنها، دارد. برخی نگارخانه‌ها نیز به غرفه‌هایی تقسیم می‌شوند.

درآنجا یک، فهرست راهنمای اصلی وجود خواهد داشت که فهرست تمام «موجودی» کاوشکده به‌صورت خلاصه در آن می‌آید. هر شاخه و نگارخانه، فهرست راهنمای مفصلتر مربوط به خود را دارد که همراه با پیش‌پرده‌های کوتاه از همهٔ موجودات نگارخانه است. البته این فهرستهای راهنما به زبان html[1] نوشته می‌شوند و یک موجود یا یک نمایش متحرک، با کلیک کردن روی نام آن بر صفحهٔ نمایش کامپیوتر ظاهر می‌شود.

هر محصول مجسم‌سازی با یک عنوان کوتاه همراه است، که دربردارندهٔ شناسه، نام فرد خلق‌کننده و سایر مشخصه‌های کتابنامه‌ای آن است. به‌علاوه، این عنوان شامل یک رشتهٔ ارتباطی به مستندات ریاضی شیئی که مجسم‌سازی شده است، می‌باشد. این مستندات شامل اطلاعاتی در بارهٔ شخص ابداع‌کننده، خواص ویژه، قضایای ریاضی مرتبط با آن ، روابطش با دیگر اشیاء، راههای جالب برای دگرریختی آن و ... می‌باشد. همین‌طور، هر شاخه و نگارخانه مستنداتی دارد که چشم‌اندازی کلی و سریع از حوزهٔ ریاضی مربوطه و ارجاعاتی به یک یا چند مقالهٔ تخصصی که موضوع را به تفصیل بررسی کرده‌اند، در اختیار قرار می‌دهد.

تاریخچه

دو مسأله در ریاضیات به پیشبرد مجسم‌سازی ریاضی کمک کرده‌اند: مسألهٔ پشت، و روکردن کرهٔ دوبعدی و مسألهٔ ساختن رویه‌های مینیمالِ کاملِ نشانده شدهٔ جدید، به‌خصوص نمونه‌هایی با گونای بالا. در مورد پشت، و رو کردن، هدفْ روشن ساختن چنان فرایند پیچیده‌ای بود که تنها تعداد بسیار اندکی از اشخاص و حتی متخصصان می‌توانستند آن‌را با تمام جزئیاتش، در ذهن مجسم کنند. در مورد رویه‌های مینیمال، مجسم‌سازی عملاً به ترسیم مسیر اثباتهای دقیق ریاضی کمک کرد.

پشت و رو کردن کره. فرض کنید $f : S^n \to R^{n+1}$ یک نگاشت هموار از کرهٔ nبعدی به‌توی فضای اقلیدسی $(n+1)$بعدی است. به یاد آوریم که f یک، غوطه‌ورسازی است اگر به‌طور موضعی یک نشانندهٔ ناتکین باشد یا به‌طور معادل (براساس قضیهٔ تابع ضمنی)، اگر در هر نقطهٔ p ازکره، دیفرانسیل Df_p، یک به یک باشد. در این وضعیت، می‌توانیم یک خودنگاشت G_f روی S^n (موسوم به نگاشت گاوسی f) را به طریق زیر به f نسبت دهیم. فضای مماس (جهتدار) بر S^n در p، توسط Df_p به‌روی یک زیرفضای nبعدی جهتدار از R^{n+1}، مثل V، نگاشته می‌شود. در این حال $G_f(p)$، یکی از دو بردار یکهٔ قائم بر V است که جهت V را به جهت استاندارد R^{n+1} توسعه می‌دهد. درجهٔ G_f را عدد چرخشِ f می‌نامیم.

هموتوپیِ f_t از $f = f_0$، یک هموتوپی منتظم است اگر هر مرحلهٔ آن یک غوطه‌ورسازی باشد و به‌علاوه $f_t(x)$ توأماً نسبت به t و x هموار باشد. در این وضعیت، Df_t یک هموتوپی است و به‌سادگی دیده می‌شود که یک هموتوپی، G_{f_t}، از نگاشت گاوسی القاء می‌کند به‌نحوی که

1. hypertext markup language

عددهای چرخش f_0 و f_1 برابرند. با محاسبهٔ ساده‌ای می‌توان نشان داد که عدد چرخش نگاشت همانی ۱ و عددچرخش نگاشت متقاطر $(-1)^n$ است.

هر پشت‌وروسازیِ کرهٔ nبعدی طبق تعریف عبارت است، از یک هموتوپی منتظم بین نگاشت همانی و نگاشت متقاطر. با این هموتوپی درواقع کرهٔ nبعدی پشت و رو می‌شود، بدون آنکه در حین این فرایند، کره تا بخورد. طبق آنچه هم‌اکنون دیدیم، هیچ‌گونه پشت‌وروسازی برای دایره (یا هر کره‌ای با بعد فرد) نمی‌تواند وجود داشته باشد. ولی در مورد کرهٔ ۲بعدی چطور؟ عدد چرخش، مانع این کار نیست، اما آیا می‌توانیم واقعاً آن‌را پشت و رو کنیم؟ برای بیشتر متخصصان توپولوژی دیفرانسیل در اواسط دههٔ ۱۹۵۰ این‌گونه به‌نظر می‌رسید که جواب باید منفی باشد. به این دلیل وقتی استیون اِسمیل در رسالهٔ دکترایش [Sm] قضیه‌ای کلی ثابت کرد که طبق یکی از نتایج آن، هر دو غوطه‌ورسازی کرهٔ دوبعدی در R^3 به‌طور منتظم هموتوپیک هستند، باعث شگفت‌زدگی زیاد و حتی قدری ناباوری شد. اثبات اسمیل اصولاً ساختنی بود اما آنچنان پیچیده بود که عملاً روشی کارا برای به‌دست آوردن یک پشت‌وروسازی صریح فراهم نمی‌کرد. اولین پشت‌وروسازی صریح، ظاهراً توسط آرنولد شاپیرو در ۱۹۶۱ کشف شد. شاپیرو هرگز آن را منتشر نکرد اما آنتونی فیلیپس آن‌را در مقاله‌ای (همراه با تصاویر) در مجلهٔ ساینتیفیک آمریکن [Ph] در سال ۱۹۶۶ توصیف کرد که برای اولین بار مسألهٔ پشت‌وروسازی کره را در معرض توجه عموم قرار داد.

تمام پشت‌وروسازیهای صریحی که مطرح شده‌اند، آنچنان پیچیده‌اند که بیشتر اشخاص تنها با بارها تماشای یک مجسم‌سازی متحرک قادرند چگونگی عملکرد آنها را دریابند. اولین پشت‌وروسازی نسبتاً ساده، توسط برنار مورن[1] در سال ۱۹۶۷ کشف شد. تعدادی از مراحل پشت‌وروسازی مورن به‌صورت مدلهایی از توری سیمی توسط چارلز پیو[2] به تصویر درآمد. نلسن ماکس [MC] با اندازه‌گیری دقیق دستی، مکان گرههای این مدل مشبکه‌ای را به اطلاعات رقمی برای کامپیوتر تبدیل کرد. سپس با استفاده از یک کامپیوتر برای درونیابی گرههای سه‌بعدی به‌دست آمده، یک نمایش متحرک دگرریختی را به صورت یک فیلم (پشت و روکردن یک کره) تولید کرد و با اقامهٔ این استدلال قطعی که «دیدن باورکردن است»، همهٔ شکاکان باقیمانده را متقاعد کرد که کرهٔ ۲بعدی را به‌راستی می‌توان پشت و رو کرد. ماکس در دو فیلم دیگر (هموتوپی منتظم در صفحه، قسمت اول و دوم)، از تکنیکهای مجسم‌سازی برای تشریح صورت و اثبات قضیهٔ مشهور به ویتنی-گراوشتاین[3] استفاده کرد، که حاکی است از اینکه برابربودن عددهای چرخش دو غوطه‌ورسازی هموار دایره در صفحه برای وجود هموتوپی منتظم بین آنها نه تنها لازم بلکه کافی نیز هست.

بعد ازاولین مجسم‌سازی کامپیوتریِ پشت و روکردن کره، مجسم‌سازیهای بسیارِ دیگری مطرح شده‌اند. یکی از آنها را ویلیام ترستن معرفی کرد و به شکل فیلم زیبایی به نام پشت و رو کردن، ساخته شد [L]. این فیلم به‌همراه یک بروشور بسیار خواندنی به نام ابعاد حرکت که سیلویو لِوی آن‌را نوشته است، در دسترس است. این بروشورگزارش مستندی از ساخت، فیلم و ریاضیات مربوط به آن و همین‌طور جزئیات بیشتری در بارهٔ تاریخچهٔ

1. Bernard Morin 2. Charles Pugh 3. Whitney-Graustein

پشت‌وروسازی کره تا سال ۱۹۹۵ است. یکی از پشت‌وروسازیهای جدید و بسیار جالب که از نرم‌افزار Surface Evolver نوشتهٔ براکی استفاده می‌کند در [Sc] و [FSKB] توصیف شده است.

ساختن رویه‌های مینیمال نشانده شده. نظریهٔ رویه‌های مینیمال، آمیزه‌ای جذاب از نظریهٔ توابع مختلط، معادلات دیفرانسیل جزئی و هندسهٔ دیفرانسیل است و طی قریب به یک قرن، تلاش خلاقانهٔ نسلهای متوالی از ریاضیدانان صرف آن شده است. فعالیتهای اخیر، بر مطالعهٔ رویه‌های مینیمال کامل نشانده شده با «توپولوژی متناهی» (یعنی، رویه‌های همدیس با یک رویهٔ ریمانی فشرده با تعداد متناهی نقطهٔ حذف شده) متمرکز شده است. تا دو دههٔ پیش، تنها نمونه‌های شناخته شده از چنین رویه‌هایی، صفحه، زنجیره‌وار و پیچوار بودند که همه‌شان برای مونیه[1]، هندسه‌دانِ هم‌عصر با انقلاب آمریکا، شناخته شده بودند. این واقعیت که در مدت زمانی این چنین طولانی، نمونه‌های بیشتری از این‌گونه رویه‌ها کشف نشده بودند، به این حدس [به ظاهر] بدیهی منجر شده که حقیقتاً هیچ رویهٔ دیگری از این نوع وجود ندارد. در حدود ۳۰ سال پیش رابرت آسرمن[2] بررسی ردهٔ نسبتاً محدودتری از رویه‌های مینیمال کامل را آغاز کرد، یعنی رویه‌هایی که انحنای کل (انتگرال انحنای گاوسی)شان متناهی است. با بررسیهای آسرمن عاقبت قیود بسیار محکمی برای هر نمونهٔ جدید ممکن از چنین رویه‌های نشانده‌شده‌ای ارائه شد. دههٔ دیگری گذشت تا سلسو کاستا[3] در رساله‌اش مثالی از یک غوطه‌وری مینیمال با انحنای متناهی از چنبرهٔ مربعیِ سه‌سوراخه کشف کرد. این رویه تمام قیود شناخته‌شده [لازم] برای نشانده‌شدن را برآورده می‌کرد. ولی معادلات چنان پیچیده بودند که به نظر رسید هیچ راه‌حلی برای فراهم کردن جزئیات تحلیلی مورد نیاز برای اثبات دقیق این قضیه که رویهٔ کاستا هیچ تقاطعی با خود ندارد، وجود ندارد.

دیوید هافمن در یک مکالمهٔ تلفنی با آسرمن، مطالبی در بارهٔ رویهٔ کاستا شنید و به سرعت تصمیم گرفت از تکنیکهای گرافیک کامپیوتری برای مجسم‌ساختن رویهٔ کاستا استفاده کند، تا همین اندازه که تعیین کند آیا لااقل به نظر می‌رسد رویه نشانده شده هست یا نه؛ و اگر چنین بود آنگاه برخی سرنخهای بصری نیز ممکن است دیده شود که امکان دارد به اثباتِ دقیقِ نشاندنی‌بودن این رویه کمک کند. هافمن ایده‌هایش را با ویلیام میکس در میان گذاشت. او نیز از امکان به‌کارگیری روشهای کامپیوتری به طریقی این چنین بدیع به هیجان آمده بود. آنها به‌همراه جیمز هافمن، متخصصی در برنامه‌نویسی گرافیک کامپیوتری، مشغول کار شدند و توانستند این برنامه را به‌مدت چندین هفته اجرا کنند. در این حین آنها متناوباً یا به تصاویر تولید شده توسط کامپیوتر خیره می‌شدند و یا به جستجوی اثباتهای دقیقی برای حدسهای شگفتی‌آوری که این تصاویر به ذهن متبادر می‌کرد، می‌پرداختند. (شکل ۱ را ببینید.) مقالهٔ خوب دیوید هافمن [H] که این پروژه را توصیف می‌کند، مطالبی فوق‌العاده خواندنی است. نمی‌توانم کاری بهتر از این انجام دهم که بخش کوچکی از روایت او را از این داستان نقل کنم:

> . . . توانستیم تصاویری از رویه را خلق کنیم. آنها ناقص بودند . . . با این حال، جیم هافمن و من توانستیم بعد از یک شب طولانی خیره شدن به نماهای تصویر قائمی از رویه از دیدگاههای مختلف، بفهمیم که رویه هیچ تقاطعی با خود ندارد. خیلی هم متقارن بود. معلوم شد این تقارن کلیدی برای اثبات نشاندنی‌بودن رویه است. در مدت یک هفته، مسیر اثبات نشاندنی‌بودن رویه به‌دست آمد. در آن مدت، از گرافیک کامپیوتری به‌عنوان راهنمایی برای «تحقیق در صحت» حدسهای معینی در بارهٔ هندسهٔ این رویه، استفاده می‌کردیم. می‌توانستیم بین معادلات و تصاویر رفت‌وآمد کنیم. تصاویر به‌عنوان راهنمای تحلیل، بی‌نهایت مفید بودند.

مقاله با این عبارات پایان می‌یابد:

> وظیفهٔ مدلهای خلق شده توسط کامپیوتر — برخلاف مدلهای گچی — به مصورسازی فرآورده‌های نهایی فهم ریاضی محدود نمی‌شود. آنها می‌توانند بخشی از فرایندِ کارِ ریاضی باشند.

نرم‌افزارهای مجسم‌سازی ریاضی

برنامهٔ من، 3D-Filmstrip، یک ابزار مجسم‌سازی ریاضی برای کامپیوترهای مکینتاش است که به زبان Object Pascal نوشته شده است. هدف عمده‌ای که راهنمای من در ساخت این برنامه بود، در دسترس قراردادن گسترهٔ متنوعی از مجسم‌سازیهای ریاضی جالب توجه، از بسیاری از حوزه‌های ریاضیات، به‌وسیلهٔ رابطی[1] بوده است که حتی برای کاربران جدید و غیر برنامه‌نویسان نیز به‌سادگی قابل استفاده باشد. تنها کافی است شیئی از یک منوی پایین‌رونده[2] انتخاب شود (یا با واردکردن تعدادی فرمول جبری، یک «شیءِ کاربر» توصیف گردد)، آنگاه بلافاصله یک نمای پیش‌فرض از آن شیء مشاهده می‌شود. چندین منو برای تنظیم دلخواه نما به طرق گوناگون وجود دارد. منویی نیز برای نمایش متحرک، وجود دارد. برای توضیحات کاملتر، شامل مستندات جامع در قالب فرامتنی (HTML)، صفحهٔ خانگی برنامهٔ 3D-Filmstrip را روی شبکهٔ وب [۴] مشاهده کنید {3dfs}. این صفحه همچنین شامل یک رشتهٔ ارتباطی به نگارخانه‌ای از مجسم‌سازیها و نمایشهای متحرک در قالب QuickTime است که به‌وسیلهٔ این برنامه ساخته شده‌اند. کاربران مکینتاش می‌توانند یک کپی از برنامه‌ام را برای استفادهٔ شخصی‌شان، با انتقال آن از طریق یک رشتهٔ ارتباطی واقع در صفحهٔ خانگی برنامه و یا به‌وسیلهٔ یک ایستگاه‌کاری ftp با اتصال به `ftp://rsp.math.brandeis.edu/pub/` دریافت کنند.

من به‌عنوان تولیدکنندهٔ یک بستهٔ نرم‌افزاری خاص برای مجسم‌سازی ریاضی، فکر می‌کنم شایسته نیست که در مقاله‌ای چون این، به بررسی دیگر نرم‌افزارهای «رقیب» بپردازم، بنابراین، به ارائهٔ فهرستی از برخی از آنها که شناخته‌شده‌تر از دیگران هستند، همراه با توصیف مختصری از هر یک، بسنده می‌کنم.

تعدادی بستهٔ نرم‌افزاری تجاری با قابلیتهایی برای مجسم‌سازی ریاضی وجود دارد که شاید شناخته‌شده‌ترین آنها عبارت‌اند از «سه M»: متلب[3] {MLb}، میپل[4] {Mpl} و متمتیکا[5] {Wri}. مجوزهای

1. J. Meusnier 2. Osserman 3. Celsoe Costa

1. interface 2. pull-down menu 3. Matlab 4. Maple 5. Mathematica

نرم‌افزارهای آماده به کار مجسم‌سازی ریاضی

{3dfs} 3D-Filmstrip Home Page, http://rsp.math.brandeis.edu/public_html
{Evol} Ken Brakke's Surface Evolver Home Page, http://www.susqu.edu/facstaff/b/brakke/evolver/evolver.html
{Geom} Geomview Home Page, http://www.geom.umn.edu/software/download/geomview.html
{Grp} Grape Home Page, http://www-sfb288.math.tu-berlin.de/~konrad/grape/grape.html
{Oor} Oorange Home Page, http://www-sfb288.math.tu-berlin.de/oorange
{Snap} SnapPea Home Page, http://www.geom.umn.edu/software/download/snappea.html
{Sup} Superficies FTP Site, ftp://topologia.geomet.uv.es/pub/montesin/Superficies_Folder/
{Surf} Surf Home Page, http://www.mathematik.uni-mainz.de/AlgebraischeGeometrie/surf/surf.shtml
{MLb} Mathworks (Matlab) Home Page, http://www.mathworks.com/products/matlab/
{Mpl} Maple Home Page, http://www.maplesoft.on.ca/
{Wri} Wolfram Research (Mathematica) Home Page, http://www.wri.com/

استاندارد این برنامه‌ها گرانقیمت است ولی نسخه‌های دانشجویی کم‌بهای آنها نیز در دسترس است و بسیاری از دانشگاهها مجوز درون سازمانی آنها را دارند. اینها در وهلهٔ اول برای مجسم‌سازی ریاضی تهیه نشده‌اند. مِی‌پل و متمتیکا برنامه‌هایی برای محاسبات نمادی هستند و مَتلب، برنامه‌ای برای آنالیز عددی است. اما هر سه زمینه‌های بسیار خوب گرافیکی برای نمایش نتایج محاسباتشان دارند که آنها را به محیطی [پایگاهی] بسیار عالی برای مجسم‌سازی ریاضی تبدیل می‌کنند. یک مشکل جزئی این برنامه‌ها این است که هر یک از آنها زبان برنامه‌نویسی مربوط به خود را دارد که کاربر برای انجام‌دادن هر کاری که پیش‌پاافتاده نباشد باید آن‌را بیاموزد. اما این زبانهای برنامه‌نویسی، زبانهای تفسیری بسیار سطح بالا هستند و یادگیری و به‌کارگیری آنها به‌طور قابل ملاحظه‌ای ساده‌تر از زبانهای ترجمه‌ای استاندارد است. یک امتیاز مهم اینها آن است که نسخه‌های مناسبی از هر یک از این برنامه‌ها برای مکینتاش، وینتل[1] و نگارشهای گوناگون یونیکس[2]، موجود است، و نرم‌افزار تولیدشده برای هر یک از این محیطها به سهولت قابل انتقال به دیگر سیستمهاست.

برنامهٔ Geomview {Geom}، به خودی خود یک برنامهٔ مجسم‌سازی ریاضی نیست. بلکه، آنچنان‌که نامش تداعی می‌کند، یک برنامهٔ نمایش‌دهنده است. برای استفاده از آن، کاربر باید یک شیء دوبعدی یا سه‌بعدی را در یک قالب از پیش تعیین‌شده، یا با نوشتن برنامه‌ای برای انجام چنین کاری و یا با استفاده از برخی برنامه‌های دیگر (مثل Surface Evolver؛ ادامهٔ مطلب را ببینید.) که یک رابط توکار برای Geomview دارند، ایجاد کند. Grape {Grp} و Oorange {Oor} مشابه Geomview هستند اما آنها امکانات به‌مراتب مجتمع‌تری برای خلق مضامین ریاضی که بناست

1. Wintel 2. UNIX

نمایش داده شوند، فراهم می‌کنند. برنامه‌نویسان شایستهٔ C که به کار روی یک ایستگاه کاری یونیکس عادت دارند احتمالاً درمی‌یابند که به‌کارگیری یکی از این برنامه‌ها، ساده‌ترین رهیافت است برای اینکه خودشان به تنهایی مجسم‌سازیهای ریاضی استادانه‌ای انجام دهند. اما کاربران مکینتاش یا وینتل و آنهایی که تجربهٔ برنامه‌نویسی با یک زبان برنامه‌نویسی ترجمه‌ای را ندارند، احتمالاً با یکی از نرم‌افزارهای تجاری که در بالا ذکرشان رفت، راحت‌تر کار خواهند کرد.

باید همچنین از برخی برنامه‌های مجسم‌سازی ریاضی یاد کنم که برای اهداف خاص نوشته شده‌اند. برنامه‌های زیادی برای نمایش جوابهای معادلات دیفرانسیل عادی و تحلیل آنها به‌ازای ویژگیهای گوناگونی که در مباحث دستگاههای دینامیکی مطرح می‌شوند (مثل مدارهای بسته، دورهای حدی و . . .) وجود دارد. به‌راستی، استفاده از چنین برنامه‌هایی به‌سرعت به‌صورت یک جزء ضروری در آموزش این موضوع درمی‌آید. برخی از این برنامه‌ها مستقل هستند، در حالی که برخی دیگر به‌منظور آنکه همراه با مَتلب، مِی‌پل یا متمتیکا به‌کار روند نوشته شده‌اند.

مجسم‌سازی خمها و رویه‌هایی که به‌صورت ضمنی تعریف شده‌اند به مسائل جالب زیادی، هم برای ریاضیدان و هم برای برنامه‌نویس، منجر می‌شود. ضرورت حل عددی معادلات مربوطه، مشکلی بزرگ است. ساختن الگوریتمهایی کارامد و قابل اعتماد برای یافتن تمام جوابها، وقتی‌که هیچ قیدی روی تکنیکی‌های مجاز وجود ندارد، مسأله‌ای کاملاً حل شده نیست. همین وضعیت حتی برای موارد خاص و پراهمیتی نیز که مورد توجه متخصصان هندسهٔ جبری است وجود دارد، یعنی در مواردی که موجودات مورد بررسی به‌عنوان جوابهای معادلاتِ چندجمله‌ای تعریف شده‌اند. مشکل دیگر این است که رویه‌هایی که به‌طور ضمنی تعریف شده‌اند، فاقد یک شبکه‌بندی طبیعی [براساس پارامتر] هستند و بنابراین باید از تکنیکهای ویژه‌ای (مثل روش موسوم به «پویش شعاعی[1]» برای تصویرکردن آنها استفاده کرد. به‌واسطهٔ همین مشکلات (و به‌واسطهٔ اهمیت هندسه جبری)، چندان عجیب نخواهد بود اگر تعدادی برنامهٔ ویژه ساخته‌شده برای نمایش رویه‌های ضمنی وجود داشته باشد. برای کامپیوترهای مکینتاش برنامهٔ آنجل مونته‌سینوس آمیلیبیا[2] با نام Superficies {Sup} وجود دارد. این برنامه از آن نوع رابط شهودی برای کاربر برخوردار است که از یک برنامهٔ مکینتاش انتظار می‌رود. این برنامه علاوه بر نمایش رویه‌ای که معادلهٔ ضمنی آن از طریق کاربر تأمین می‌شود، خمهای ژئودزیک، خطوط مجانبی و خطوط انحنا را برروی رویه ترسیم می‌کند. در عالم یونیکس، برنامه‌ای با نام Surf، {Surf}، وجود دارد که توسط استیون اندراس[3] نوشته شده است. (اندراس متن برنامه‌اش را تحت مجوز GNU قابل دسترس ساخته است).

دو برنامهٔ قابل ذکر دیگر با اهداف خاص عبارت‌اند از SnapPea، {Snap}، نوشتهٔ جف ویکس[4] برای تولید و بررسی هندسه‌های هذلولوی سه‌بعدی و برنامهٔ Surface Evolver، {Evol}، نوشتهٔ کِن براکی[5]، برای بررسی تحول رویه‌ها تحت شاره‌های گوناگون مینیمم‌سازندهٔ «انرژی».

1. ray-tracing 2. Angel Montesinos Amilibia 3. Endrass
4. Jeff Weeks 5. Ken Brakke

چرا نرم‌افزار مجسم‌سازی ریاضی بنویسیم؟

در این مورد باید اعتراف کنم که یکی از اهدافم، تشویق دیگران به مشارکت در ساخت کاوشکدهٔ ریاضی است. تولید نرم‌افزار و مضامین مجسم‌سازی ریاضی، عرصه‌ای نسبتاً جدید و در حال رشد است و زمینه‌های بسیاری برای عرضهٔ مقالات بکر و پرمعنی دارد. من عمدتاً به این خاطر روی مجسم‌سازی ریاضی کار می‌کنم که از مبارزه برای «زنده‌کردن» مفاهیم مجرد ریاضی، با پیاده‌سازیشان در قالب نرم‌افزارها، لذت می‌برم. اما بیش از آن، این‌کار را شکل جدیدی از نشر [ریاضیات] می‌دانم. بخشی از مسؤولیت (و لذت) زندگی دانشگاهی، دادن نوعی صورت ماندگار به ایده‌هایی است که سخت در بارهٔ آنها اندیشیده‌ایم؛ و منظور ما از نشر به هر حال همین است.

معمول چنین بوده است که ریاضیدانان این مسؤولیت را با نوشتن کتابها و مقالات تحقیقی به انجام می‌رسانده‌اند و بی‌شک به این شیوهٔ ابتدایی نشر ریاضیات ادامه خواهند داد. برنامه، جایگزینی برای قضیه نیست و استادیاری که نگران کافی بودن مقالاتش برای احراز شرایط استخدام رسمی در دانشگاه است احتمالاً پیش از درگیر کردن خود در یک پروژهٔ نرم‌افزاری وقت‌گیر، باید دوچندان تأمل کند. با وجود این، از آنجا که ریاضیات روزبه‌روز پیچیده‌تر می‌شود، داشتن ابزارهای مناسب برای تکمیل و تجهیز ادراک شهودیمان و برای انتقال ایده‌های شهودیمان به دیگران، مرتباً بااهمیت‌تر می‌شود.

تا پیش از رواج سیستمهای گرافیکی جدید که برای مدلسازیهای هندسیِ جالب توجه، به قدر کافی قدرتمند هستند، تنها تعداد اندکی از مراکز وجود داشتند که استطاعت تهیهٔ مجموعهٔ گران‌قیمت سخت‌افزار و نرم‌افزار مورد نیاز برای چنین سیستمهایی را داشتند. به‌علاوه این سیستمها به ملحقات و گردانندهای سخت‌افزاری ویژه‌ای نیاز داشتند، به‌طوری که نمی‌شد آن برنامه‌ها را حتی به‌کندی برروی ایستگاههای کاری استانداردی از نوع PC یا Mac، که در همهٔ مؤسسات دانشگاهی فراگیر شده بودند، اجرا کرد. اما ابرکامپیوترهای یک دههٔ پیش نیز چندان قویتر از آخرین نسل PCها و Macهای امروزی نبودند و بسیاری از برنامه‌های آبرومند مجسم‌سازی ریاضی را اکنون می‌توان برای این دستگاههای جدید نوشت. اکنون به‌وضوح زمان آن فرا رسیده است که الگوریتمهای مدلسازی هندسی نیرومندی که در سالهای اخیر تهیه شده‌اند به‌طور گسترده‌تر در دسترس تمام جامعهٔ ریاضی قرار گیرند. این کار ساده‌ای نیست. مسأله تنها این نیست که الگوریتمها به یک زبان برنامه‌نویسی برگردانده شوند، بلکه موضوع، ایجاد برنامه‌هایی است با رابط خوب برای کاربر، آن‌طور که شخص دیگری بجز خود برنامه‌نویس نیز بتواند با آن کار کند. امیدوارم که برنامهٔ **3D-Filmstrip** نمونهٔ آغازینی از این نوع برنامه‌های مجسم‌سازی ریاضی باشد، برنامه‌ای که دیگران را به خلق برنامه‌های هر چه بهتری برای جان‌بخشیدن به تصورات ریاضیمان برانگیزاند.

یادداشتها

۱. این برنامه 3D-Filmstrip نام دارد. اما من در این مقاله، برای سادگی، از آن با عنوان «برنامهٔ من» یاد می‌کنم. بعداً در این مقاله توضیح خواهم داد که چگونه کپی آن را برای استفادهٔ شخصیتان به‌دست آورید.

۲. مسلماً تصویرسازی به‌صورت شبکهٔ سیمی، تصور سه‌بعدی بودن را از بین می‌برد. [به علت عدم وجود خرده‌وجه‌هایی که «سایه‌روشنها» را نشان دهند]. اما این نقیصه با استفاده از روشهای گوناگون تصویر نمایی استریو می‌تواند برطرف شود. نام 3D-Filmstrip را به این دلیل برای برنامه‌ام انتخاب کردم که بر تصویرسازی موجودات سه‌بعدی به‌صورت استریو و استفاده از روش آناگلیف تأکید شود. (منظور از آناگلیف استفاده از عینکهای قرمز/سبز است که باعث سه‌بعدی نمایی تصویر می‌شوند)

۳. من نگارخانه‌ای از مجسم‌سازیها و نمایشهای متحرک سه‌بعدی ساخته‌ام و روی وب قرار داده‌ام. فهرست راهنمای اصلی در آدرس

`http://rsp.math.brandeis.edu/3D-Filmstrip-html/Galleries/Catalogs/Maincatalog.html`

قرار دارد و این کاتالوگ همچنین شامل رشته‌های ارتباط‌دهنده به تعداد زیادی از بهترین نمونه‌های مجسم‌سازی ریاضی است که بر روی وب می‌شناسم.

۴. مراجع داخل آکولاد به آدرسهای منابع جهانی (URLها) اشاره دارند که مشخصاتشان در فهرست مراجع آمده است.

مراجع

مقاله‌ها

[Ab] J. ABOUAF, Variations of perfection: The Séquin-Collins sculpture generator, *IEEE Computer Graphics and Applications* **18** (1998).

[CHH] M. CALLAHAN, D. HOFFMAN, and J. HOFFMAN, Computer graphics tools for the study of minimal surfaces, *Comm. ACM* **31** (1988), 641-661.

[FSKB] G. FRANCIS, J. SULLIVAN, R. KUSNER, K. BRAKKE, C. HARTMAN, and G. CHAPPELL, The minimax sphere eversion, *Visualization and Mathematics* (Berlin-Dahlem, 1995), Springer, 1997, pp. 3-20.

[HMF] A. HANSON, T. MUNZNER, and G. FRANCIS, Interactive methods for visualizable geometry, *IEEE Computer* **27** (1994), 78-83; `http://graphics.stanford.edu/papers/visgeom/`.

[H] D. HOFFMAN, Computer-aided discovery of new embedded minimal surfaces, *Mathematical Intelligencer* **9** (1987).

[HWK] D. HOFFMAN, F. WEI, and H. KARCHER, The genus one helicoid and the minimal surfaces that led to its discovery, *Global Analysis in Modern Mathematics* (K. Uhlenbeck, ed.), Publish or Perish Press, Houston, TX, 1993, pp. 119-170.

[MC] N. MAX and W. CLIFFORD, Computer animation of the sphere eversion, *ACM J. of Comput. Graphics* **9** (1975), 32-39; films available from International Film Bureau, 332 S. Michigan Ave., Chicago, IL 60604.

[Ph] A. PHILLIPS, Turning a surface inside out, *Scientific American* (May 1966), 112-120.

[PLM] M. PHILLIPS, S. LEVY, and T. MUNZNER, Geomview: An interactive geometry viewer, *Notices* **40** (October 1993).

[PP] U. PINKALL and K. POLTHIER, Computing discrete minimal surfaces and their conjugates, *Experimental Mathematics* **2** (1993).

[Sc] Sphere does elegant gymnastics in new video, *Science* **281** (July 31, 1998), 634.

[Sm] S. SMALE, A classification of immersions of the twosphere, *Trans. Amer. Math. Soc.* **90** (1958), 281-290.

کتابها

[B] T. F. BANCHOFF, *Beyond the Third Dimension*, Scientific American Library, New York, 1990.

[DHKW] U. DIERKES, S. HILDEBRANDT, A. KÜSTER, and O. WOHLRAB, *Minimal Surfaces*, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1992, two volumes.

[EG] D. EPSTEIN and C. GUNN, *Supplement to Not Knot*, Jones and Bartlett, 1991.

[Fe] C. FERGUSON, *Helaman Ferguson: Mathematics in Stone and Bronze*, Meridian Creative Group, 1994.

[Fi] G. FISCHER, *Mathematical Models*, Vols. *I and II*, Vieweg, Braunschweig and Wiesbaden, 1986.

[Fo] A. FOMENKO, *Mathematical Impressions*, American Mathematical Society, Providence, RI, 1990.

[Fr] G. K. FRANCIS, *A Topological Picturebook*, Springer-Verlag, New York, 1987.

[G] A. GRAY, *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces*, CRC Press, Boca Raton, FL, 1993.

[HC] D. HILBERT and S. COHN-VOSSEN, *Geometry and the Imagination*, Chelsea, New York, 1952. Translation of *Anshauliche Geometrie* (1932).

[L] S. LEVY, *Making Waves*, A. K. Peters, 1995.

[Sc] D. SCHATTSCHNEIDER, *Visions of Symmetry*, Freeman, San Francisco, CA, 1990.

[W] J. WEEKS, *The Shape of Space*, Marcel Dekker, New York, 1985.

* * * * * *

• Richard S. Palais, "The visualization of mathematics: towards a mathematical exploratorium", *Notices Amer. Math. Soc.*, (6) **46** (1999) 647-658.

چون برخی از شکلهای این مقاله اگر به‌صورت رنگی یا تصویر متحرک نمایش داده شوند، روشنتر و تأثیرگذارتر خواهند بود، مؤلف یک نسخهٔ وبی [اینترنتی] از این مقاله به‌همراه آدرسهای ارتباط با این گونه تصاویر با کیفیت تهیه کرده است. این مقاله از طریق آدرس زیر قابل دسترس است

http://rsp.math.brandeis.edu/VisualizationOfMath.html.

* ریچارد پَله، استاد بازنشستهٔ دانشگاه برندایس، آمریکا

palais@math.brandeis.edu.