# مهره‌ها، توپها و دیوارها: تحلیل یک بازی ترکیبیاتی *

ریچارد اندرسن، جوئل اسپنسر، شموئل وینوگراد
پیتر شور، لاسلولواش، اواتاردوش *
ترجمهٔ محمدصادق منتخب

## ۱. مقدمه

در این مقاله "بازی" بسیار ساده‌ای را بررسی می‌کنیم که به شرح زیر است. تعدادی مهره [به شکل مهره‌های تخته نرد] در ستونهایی روی هم چیده شده‌اند به طوری که ستونها در یک ردیف قرار دارند. در هر واحد زمان، هر یک از ستونها به دو نیم می‌شود و نصف آن به ستون سمت چپی و نصف دیگر به ستون سمت راستی افزوده می‌گردد. اگر تعداد مهره‌های موجود در ستونی فرد باشد، یکی از مهره‌های ستون ساکن می‌ماند، و بقیه به طوری مساوی تقسیم می‌شوند. اگر تعداد مهره‌ها کم باشد، می‌توان این بازی را به آسانی بر روی یک صفحهٔ کاغذ شبیه‌سازی کرد. این بازی می‌تواند در خلال سخنرانیهای طولانی یا گردهماییهای اعضای دانشکده موجب رفع خستگی شود. می‌توان فرایند اجرای این بازی را به صورت برنامه‌ای برای کامپیوترهای شخصی نیز تدوین کرد و برخی از پدیده‌هایی را که در اینجا شرح می‌دهیم به بهترین وجه و به طور "زنده" بر یک پایانهٔ کامپیوتری ملاحظه کرد.

می‌خواهیم ببینیم که اگر این بازی را فقط با استفاده از یک ستون مهره آغاز کنیم، چه اتفاقی می‌افتد. نمونه‌های کوچک به آسانی با دست قابل بررسی‌اند. به عنوان مثال، به ازای ۵ مهره داریم

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | 5 | | |
| | 2 | 1 | 2 | |
| 1 | 0 | 3 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

پس از سه حرکت، ۵ ستون متوالی یک مهره‌ای به دست می‌آوریم، و بنابراین، حرکت دیگری انجام‌پذیر نیست. مثال بزرگتر زیر نیز به نتیجهٔ مشابهی ختم می‌شود:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | 9 | | | | |
| | | | 4 | 1 | 4 | | | |
| | | 2 | 0 | 5 | 0 | 2 | | |
| | 1 | 0 | 3 | 1 | 3 | 0 | 1 | |
| | 1 | 1 | 1 | 3 | 1 | 1 | 1 | |
| | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 | |
| | 1 | 2 | 0 | 3 | 0 | 2 | 1 | |
| | 2 | 0 | 2 | 1 | 2 | 0 | 2 | |
| 1 | 0 | 2 | 0 | 3 | 0 | 2 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 2 | 1 | 2 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 3 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

با توجه به مثالهایی که با دست قابل بررسی‌اند، طبیعی است حدس بزنیم که، اگر وضعیت آغازی شامل فقط یک ستون متشکّل از $۲n + ۱$ مهره باشد، آنگاه آرایش نهایی مشتمل بر $۲n + ۱$ ستون متوالی یک مهره‌ای خواهد بود. نخستین نتیجه‌گیری ما نشان می‌دهد که این حدس واقعاً صحیح است. مسألهٔ بعدی تعیین تعداد حرکتهای لازم برای نیل به آرایش نهایی است. اگر با $۲n + ۱$ مهره شروع کنیم، می‌توانیم تعداد حرکتهای انجام شده را میان $\alpha n^۲$ و $\beta n^۲$ محدود کنیم. به هنگام بررسی مثالهای بزرگتر، با الگوهای بسیاری مواجه می‌شویم. معلوم می‌شود که میان این الگوها و برخی از معادله‌های دیفرانسیل رابطه‌ی وجود دارد که به تعبیرهای جالب توجهی از مسأله می‌انجامد.

اگر تعداد مهره‌های ستون $i$ ام در لحظهٔ $t$ را به صورت $a_{i,t}$ نشان دهیم، می‌توانیم این "بازی" را به صورتی ریاضی تعریف کنیم. شرطهای آغازی به

وسیلهٔ مقدار $a_{i,0}$ داده می‌شوند. توجه ما عمدتاً معطوف به حالتی است که در آن، $a_{0,0} = m$ و به ازای هر $i \neq 0$، $a_{i,0} = 0$. در این صورت، به ازای $t \geq 1$، مقدار $a_{i,t}$ از دستور

$$a_{i,t} = \left[\frac{a_{i-1,t-1}}{2}\right] + \left[\frac{a_{i+1,t-1}}{2}\right] + (a_{i,t-1} \bmod 2)$$

به دست می‌آید. مادامی که ستونی متشکّل از حداقل ۲ مهره موجود باشد، حرکتهایی می‌توان انجام داد. آرایش نهایی، وضعیّتی است که در آن، هر یک از ستونها حداکثر دارای یک مهره باشند.

برای مطالعهٔ مسألهٔ حرکت مهره، بازی به ظاهر کلیّتری را مورد بررسی قرار می‌دهیم. در این بازی نیز با ستونهایی از مهره‌ها سر و کار داریم که در یک ردیف چیده شده‌اند ولی در اینجا منظور از یک حرکت، انتخاب ستونی با حداقل دو مهره و انتقال یکی از مهره‌ها به راست و دیگری به چپ است. چه بسا در یک زمان بیش از یک حرکت امکان‌پذیر باشد. به این ترتیب، دنباله‌ای از حرکتها در بازی جدید به وجود می‌آید که نتیجهٔ آن با نتیجهٔ فقط یک حرکت در بازی قبلی یکسان است، و بنابراین، بازی قبلی را می‌توان به وسیلهٔ بازی جدید شبیه‌سازی کرد. مع‌الوصف، ممکن است وضعیّت نهایی در بازی جدید به ترتیب انجام شدن حرکتها بستگی داشته باشد. نشان خواهیم داد که ترتیب گرچه اهمیتی ندارد، کمک خواهد کرد تا با استفاده از بازی جدید به مطالعهٔ بازی قبلی بپردازیم.

## ۲. وضعیّت نهایی

بحثمان را با اثبات چند ویژگی سادهٔ دنبالهٔ حرکتها و آرایش نهایی آغاز می‌کنیم. به ویژه، باید نشان دهیم که بازی بالاخره به وضعیّتی می‌رسد که دیگر حرکتی نمی‌توان انجام داد.

در بقیهٔ این بخش فرض می‌کنیم که آرایش اولیه متشکّل از $2n + 1$ مهره واقع در مبدأ باشد.

**لم ۱.** ممکن نیست دو ستون تهی متوالی داشته باشیم که ستونهایی ناتهی، در طرفین آنها باشند.

اثبات. فرض کنید ستونهای $x$ و $x + 1$ تهی بوده مهره‌هایی در طرفهای راست و چپ آنها وجود داشته باشند. هر دوی $x$ و $x + 1$ باید زمانی ناتهی بوده باشند. فرض کنید $x + 1$ دیرتر از $x$ تهی شده باشد. در این صورت، لازم می‌آید که مهره‌هایی از $x + 1$ برداشته شده و یکی از آنها در $x$ گذاشته شده باشد. نتیجه می‌شود که $x$ بعد از تهی‌شدن $x + 1$ هنوز ناتهی بوده است، که متناقض با فرض است.

■

**لم ۲.** فقط ستونهایی می‌توانند مهره دریافت کنند که شمارهٔ آنها بین $-4n$ و $4n$ باشد.

اثبات. چون حداکثر یک فاصلهٔ خالی میان دو ستون ناتهی متوالی وجود دارد، این $2n + 1$ مهره می‌توانند در دامنه‌ای با حداکثر $4n + 1$ ستون پخش شوند. همین که نخستین حرکت صورت بگیرد، همواره مهره‌هایی در هر دو طرف ستون شمارهٔ ۰ موجود خواهند بود، و بنابراین، دامنه بایستی در داخل $[-4n, 4n]$ باشد.

■

اکنون که نشان داده‌ایم دامنه محدود است، نشان می‌دهیم که تعداد حرکتها نیز محدود می‌باشد.

**لم ۳.** تعداد حرکتها محدود به $32n^3 + 16n^2$ است.

اثبات. فرض کنید که به ازای هر $i$، تعداد مهره‌های موجود در ستون $i$ام مساوی $a_i$ باشد، و $\sum_i a_i i^2$، یعنی، مجموع مربّعهای فاصله‌ها از مبدأ را در نظر بگیرید. حداکثر مقدار این مجموع وقتی است که همهٔ مهره‌ها در $-4n$ و $4n$ باشند، و در این صورت، این مجموع مساوی $32n^3 + 16n^2$ است. با هر حرکت، این مجموع دقیقاً به اندازهٔ ۲ افزایش می‌یابد. با هر انتقال از ستون $i$، عنصرهایی به ستونهای $i - 1$ و $i + 1$ افزوده و دو عنصر از ستون $i$ کاسته می‌شود. تغییر حاصل از این انتقال در مجموع، مساوی $(i+1)^2 + (i-1)^2 - 2i^2 = 2$ است. بنابراین، تعداد حرکتها نمی‌تواند بیشتر از $16n^3 + 8n^2$ باشد، چه در غیر این صورت، مجموع از حداکثر مقدار خود تجاوز خواهد کرد.

■

**قضیهٔ ۱.** وضعیّت نهایی مستقل از ترتیب انجام شدن حرکتهاست.

اثبات. کلید اثبات این است که اگر انجام دادن دو حرکت همزمان ممکن باشد، آنگاه ترتیب انجام دادن آنها اهمیتی ندارد. فرض کنید که هر دو موضع $x$ و $y$ دارای حداقل دو مهره باشند. اگر فاصلهٔ میان $x$ و $y$ بیش از یک باشد واضح است که انجام شدن حرکتها به ترتیب $xy$ یا $yx$ منجر به نتیجهٔ یکسانی خواهد شد. تنها حالتی که امکان تداخل میان حرکتها وجود دارد، وقتی است که فاصلهٔ میان آنها یک باشد، یعنی $x = y + 1$ یا $x = y - 1$. مع‌الوصف، ترتیب حرکتها به هر صورت که باشد، یعنی $xy$ یا $yx$، موجب کاسته شدن از $x$ و $y$ به اندازهٔ یک و افزوده شدن به ستونهای واقع در طرفین به اندازهٔ یک می‌شود.

$$\_\quad \underset{x}{\_}\quad \underset{y}{\_}\quad \_\quad \xRightarrow{x}\quad +1\quad \underset{x}{-2}\quad \underset{y}{+1}\quad \_$$

$$\xRightarrow{y}\quad +1\quad \underset{x}{-1}\quad \underset{y}{-1}\quad +1$$

$$\_\quad \underset{x}{\_}\quad \underset{y}{\_}\quad \_\quad \xRightarrow{y}\quad \_\quad \underset{x}{+1}\quad \underset{y}{-2}\quad +1$$

$$\xRightarrow{x}\quad +1\quad \underset{x}{-1}\quad \underset{y}{-1}\quad +1$$

اکنون نشان می‌دهیم که از ویژگی تعویض‌پذیری حرکتها، یکتابودن آرایش نهایی نتیجه می‌شود. آرایش $B$ را تالی آرایش $A$ می‌گوییم اگر دنباله‌ای از حرکتها وجود داشته باشد به طوری که آرایش $A$ را به آرایش $B$ تبدیل کند. آرایشی را که دیگر نتوان حرکتی در آن صورت داد، یک آرایش نهایی می‌گوییم. فرض کنید که حداقل دو آرایش نهایی وجود داشته باشد. همچنین فرض کنید $A$ آرایشی است که در میان تالیهایش دو آرایش نهایی وجود دارند ولی هر تالی

سرهٔ A فقط یک آرایش نهایی در میان تالیهایش دارد. تصور کنید $A'$ و $A''$ تالیهای بلافصلی از $A$ باشند که تالیهای نهایی متفاوتی داشته باشند. نتیجه می‌شود که $A'$ و $A''$ نمی‌توانند دارای تالی مشترکی باشند. فرض کنید $A'$ در نتیجهٔ حرکت $x$ از $A$ و $A''$ در نتیجهٔ حرکت $y$ به دست آمده باشند. آرایش $B$ را که در نتیجهٔ حرکتهای $xy$ (یا حرکتهای هم‌ارز $yx$) از $A$ به دست آمده است، در نظر بگیرید. چون $B$ تالی هردوی $A'$ و $A''$ است، به تناقض می‌رسیم.
■

با در اختیار داشتن قضیهٔ فوق، می‌توانیم وجود وضعیت نهایی را برای یک ورودی مفروض ثابت کنیم. اگر با $2n+1$ مهره در مبدأ آغاز کنیم، آرایش نهایی عبارت از $2n+1$ ستون متوالی با اندازهٔ یک است که موضعهای از $-n$ تا $n$ را اشغال کرده باشند. برای اثبات این امر می‌توانیم به دنبالهٔ ویژه‌ای از حرکتها که به آسانی قابل بررسی است، متوسل شویم.

**قضیهٔ ۲.** اگر با ستونی به اندازهٔ $2n+1$ در موضع صفر آغاز کنیم آنگاه وضعیت نهایی متشکل از ستونهایی با اندازهٔ ۱ در موضعهای از $-n$ تا $n$ خواهد بود.

اثبات. دنباله‌ای از حرکتها را که منجر به آرایشهای میانی زیر می‌شوند، در نظر می‌گیریم:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 2n+1 & & & \\ & & 1 & 2n-1 & 1 & & \\ & 1 & 1 & 2n-3 & 1 & 1 & \\ 1 & 1 & 1 & 2n-5 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

فرض کنید به وضعیتی رسیده باشیم که ۳ را در موضع ۰ و $j$ تا ۱ را در هر طرف ۳ داشته باشیم. در هر مرحله، همهٔ حرکتهای مجاز را به طور همزمان انجام می‌دهیم. الگو عبارت است از

$$\begin{array}{ccccccccccc} & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & \\ & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & \\ & 1 & 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 2 & 1 & 1 & \\ & 1 & 2 & 0 & 2 & 1 & 2 & 0 & 2 & 1 & \\ & 2 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 & 2 & 0 & 2 & \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 2 & 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

در این آرایش، ناحیه‌ای از یکهای متوالی و ناحیه‌ای از ۲ها و ۰ها به طور متناوب وجود دارد. ۲ها و ۰ها با حرکت خود به سمت انتهای فهرست موجب افزایش طول آن می‌شوند، و سپس با بازگشت خود دنباله‌ای از یکهای متوالی برجای می‌گذارند.

اکنون می‌توانیم با ثابت گرفتن مهره‌های ستون صفر بجز سه تا از آنها، آرایشی متشکل از $2n+1-2j$ در موضع ۰ و $j$ تا یک در هر طرف آن را به آرایشی متشکل از $2n+1-2(j+1)$ در موضع صفر و $j+1$ تا یک در هر طرف آن تبدیل کنیم. با تکرار این فرایند، می‌توانیم از $2n+1$ در موضع صفر به $2n+1$ یک متوالی برسیم.
■

هم‌اکنون حالتی را بررسی کردیم که در آن، با تعدادی فرد از مهره‌ها آغاز می‌کنیم. توجه کنید که در این دنباله از حرکتها، یکی از مهره‌ها در ستون صفر هرگز حرکت نمی‌کند. بنابراین، فقط با ندیده گرفتن مهره‌ای که همیشه در موضع صفر واقع است، می‌توانیم حالت زوج را نیز در نظر بگیریم. اگر کار را با $2n$ مهره آغاز کنیم، در پایان کار $n$ مهرهٔ متوالی در موضعهای $-n$ الی $-1$ داریم، موضع ۰ تهی خواهد بود، و $n$ مهرهٔ متوالی دیگر در موضعهای ۱ الی $n$ خواهیم داشت.

## ۳. مدت زمان اجرا

اکنون که می‌دانیم آرایش نهایی چیست، به بازی اولیه که در آن همهٔ حرکتها به طور همزمان انجام می‌پذیرند، باز می‌گردیم. می‌خواهیم ببینیم که برای رسیدن به آرایش نهایی به چه مقدار زمان نیازمندیم. نخست با دو استدلال ساده ثابت می‌کنیم که اگر با $2n+1$ مهره در موضع ۰ آغاز کنیم، آنگاه تعداد مرحله‌های مورد نیاز برای نیل به آرایش نهایی ناکمتر از $n^2/3$ و نابیشتر از $n^2$ است.

**لم ۴.** اگر آرایش اولیه متشکل از $2n+1$ مهره در موضع صفر باشد، آنگاه تعداد مرحله‌های لازم برای نیل به آرایش نهایی حداقل مساوی $n^2/3$ است.

اثبات. مانند لم ۳، مجموع $\sum_i a_i i^2$ را در نظر می‌گیریم. مقدار این مجموع در پایان کار درست مساوی $n(n+1)(2n+1)/3$ است. هر زوج از عنصرها که حرکت داده شوند، مجموع به اندازهٔ ۲ افزایش می‌یابد. بنابراین، بر اثر یک حرکت، مجموع می‌تواند حداکثر به اندازهٔ $2n+1$ افزایش یابد. پس، تعداد حرکتها حداقل مساوی $n(n+1)/3$ است.
■

اکنون کران بالایی ارائه می‌دهیم که نشان می‌دهد که می‌توان با حداکثر $n^2$ مرحله به آرایش نهایی رسید. برای اثبات وجود چنین کرانی، به اندکی اطلاعات بیشتر دربارهٔ تعداد مهره‌های ستونها نیازمندیم. نخست توجه می‌کنیم که در هر مرحلهٔ زمانی زوج، حرکتها فقط از ستونهای با شماره‌های زوج صورت می‌گیرند، و در هر مرحلهٔ زمانی فرد، حرکتها فقط از ستونهایی با شماره‌های فرد انجام می‌پذیرند. ستونهایی را، که از آنها حرکتهایی رخ می‌دهد، فعال می‌نامیم. نمونه‌ای از یک آرایش میانی یک بازی چیزی شبیه

$$1\ 0\ 2\ 1\ 3\ 0\ 6\ 1\ 7\ 0\ 9\ 0\ 7\ 1\ 6\ 0\ 3\ 1\ 2\ 0\ 1$$

است. تعداد مهره‌های هر ستون برحسب فاصله از مبدأ، کاهش می‌یابد. شرطی رسمی که تعداد مهره‌های هر ستون در آن صدق می‌کند عبارت است از

**قضیهٔ ۱.** اگر زمان زوج باشد دنباله‌های $a_0, a_2, a_4, \cdots$ و $a_0, a_{-2}, a_{-4}, \cdots$ غیر صعودی‌اند. اگر زمان فرد باشد دنباله‌های $a_1, a_3, a_5, \cdots$ و $a_{-1}, a_{-3}, a_{-5}, \cdots$ غیر صعودی‌اند.

اثبات این قضیه را به بعد موکول می‌کنیم. یک نتیجهٔ بلاواسطهٔ این قضیه این است که پیش از نیل به آرایش نهایی، تعداد مهره‌های ستون صفر را

نمی‌توان در یک مرحلهٔ زمانی زوج به فقط یک مهره تقابل داد.

**لم ۵.** اگر آرایش اولیه متشکل از $2n + 1$ مهره در موضع صفر باشد، آنگاه با $n^2 + n$ حرکت می‌توان به آرایش نهایی دست یافت.

اثبات. مجموع $\sum_i a_i \mid i \mid$ را در نظر می‌گیریم. مقدار نهایی این مجموع درست $n^2 + n$ است. تنها حرکتهایی که این مجموع را افزایش می‌دهند، آنهایی هستند که از موضع $0$ صورت می‌گیرند. در هر مرحلهٔ زمانی زوج، حداقل دو مهره از ستون صفر بیرون آورده می‌شوند، و بنابراین، مجموع حداقل به اندازهٔ ۲ افزایش می‌یابد. بنابراین، این مجموع بایستی تا زمان $n^2 + n$ از $n^2 + n$ فراتر رود. ∎

**لم ۶.** تعداد مهره‌ها در ستونهای فعال نسبت به فاصله از مبدأ نزولی است.

اثبات. لم را فقط در مورد ستونهایی که شمارهٔ نامنفی دارند ثابت می‌کنیم، زیرا در مورد طرف دیگر مبدأ، آن را می‌توان بنا به تقارن نتیجه گرفت. اثبات به استقراست. نشان می‌دهیم که اگر حکم به ازای زمان مفروضی برقرار باشد، در واحد زمانی بعدی نیز برقرار است. کلید این اثبات، اتخاذ فرضی مناسبی برای استقراست، که در واقع، قویتر از نتیجه‌ای است که در این لم مد نظر ماست. نشان می‌دهیم که به ازای $i \geq 0$، اگر $i$ و $i + 2$ در زمان $t$ فعال باشند، آنگاه $a_{i,t} \geq a_{i+2,t}$، و اگر $a_{i,t} = a_{i+2,t}$، آنگاه $a_{i+1,t}$ از نظر زوجیت [زوج بودن یا نبودن] با $a_{i,t}$ و $a_{i+2,t}$ همخوان است. بنابراین، ۸، ۰، ۸ و ۹، ۱، ۹ دنباله‌هایی قابل قبول‌اند، ولی ۸، ۱، ۸ و ۹، ۰، ۹ قابل قبول نیستند. (توجه کنید که چون $a_{0,t}$ همیشه فرد است، لزومی ندارد که $a_{0,t}$ با $a_{-1,t}$ و $a_{1,t}$ از نظر زوجیت همخوانی داشته باشد.)

حکم در زمان $0$ که تنها ستون ناتهی ستون $0$ است، به وضوح برقرار است. فرض کنید حکم در زمان $t - 1$ برقرار باشد، نشان می‌دهیم که در زمان $t$ نیز برقرار است. به برهان خلف متوسل می‌شویم؛ بنابراین فرض کنید که $i$ و $i + 2$ ستونهایی فعال در زمان $t$ باشند، ولی $a_{i,t} < a_{i+2,t}$. چون $a_{i-1,t-1} \geq a_{i+3,t-1}$، تعداد مهره‌هایی که $i$ از $i + 1$ دریافت کرده است حداقل مساوی با تعدادی است که $i + 2$ از $i + 3$ دریافت نموده است. ستونهای $i$ و $i + 2$ نیز تعداد یکسانی مهره از $i + 1$ دریافت کرده‌اند. بنابراین، $a_{i,t} < a_{i+2,t}$ وقتی می‌تواند برقرار باشد که $a_{i,t-1} = 0$ و $a_{i+2,t-1} = 1$. برای اینکه $i$ همان تعداد مهره از $i - 1$ دریافت کند که $i + 2$ از $i + 3$ می‌کند، باید یکی از این دو حالت برقرار بوده باشد: یا $a_{i-1,t-1} = a_{i+3,t-1}$ و یا $a_{i-1,t-1} = a_{i+3,t-1} + 1$. در هر دو حالت، مادامی که $i \neq 0$، شرط زوجیت در زمان $t - 1$ نقض می‌شود. چون نشان داده‌ایم که $a_{i,t-1} = 0$، حالت $i = 0$ را نیز به این ترتیب رد کرده‌ایم پس، می‌توانیم نتیجه بگیریم که $a_{i,t} \geq a_{i+2,t}$.

اکنون باید نشان دهیم که شرط زوجیت در زمان $t$ نیز برقرار است. فرض کنید برقرار نباشد. دو حالتی را، که ممکن است این شرط نقض شود در نظر می‌گیریم.

۱) $a_{i,t} = a_{i+2,t}$، $a_{i,t}$ زوج است و $a_{i+1,t} = 1$.

برای اینکه چنین حالتی رخ بدهد، لازم است که $a_{i,t+1} = a_{i+1,t-1}$. ولی در آن صورت $a_{i-1,t-1} = a_{i+1,t-1}$، وگرنه، لازم می‌آید که $a_{i,t}$ بزرگتر باشد. بنابراین، بایستی $a_{i,t} = 0$. این نتیجه به ازای $i = 0$ ممکن نیست، و به ازای $i > 0$ با شرط زوجیت سازگار نیست.

۲) $a_{i,t} = a_{i+2,t}$، $a_{i,t}$ فرد است و $a_{i+1,t} = 0$. در این صورت می‌توانیم نتیجه بگیریم که $a_{i+1,t-1} = a_{i,t} - 1$. مع‌الوصف، از این نتیجه می‌شود که، $a_{i+3,t-1} = a_{i+1,t-1}$ و $a_{i+2,t-1} = 1$، که متناقض با شرط زوجیت است.

بنابراین، در هر یک از دو حالت، نقض زوجیت در زمان $t$ ناشی از نقض زوجیت در زمان $t - 1$ است.

اکنون کران بالای بهتری برای تعداد حرکتهای لازم بازی ارائه می‌کنیم. این کران بالا نیز با استفاده از مجموع $\sum i a_i \mid i \mid$ به دست می‌آید و مبتنی است بر تحلیل دقیقتری از آهنگ رشد مجموع مزبور برای به دست آوردن یک کران بهتر.

**قضیهٔ ۳.** اگر آرایش اولیهٔ مهره‌ها متشکل از $2n + 1$ مهره در موضع صفر باشد، آنگاه تعداد مرحله‌های لازم برای نیل به آرایش نهایی حداکثر $(\pi^2/6 - 1)n^2 + O(n)$ است.

اثبات. فرض کنید $S^1 = \sum_{0 \leq i \leq n} a_i i$. در آغاز $S^1 = 0$ و در پایان $S^1 = (1/2)(n^2 + n)$. مقدار تغییر $S^1$ در زمان $t$ مساوی $[a_{0,t}/2]$ است. بنابراین، هرچه $a_0$ بزرگتر باشد، $S^1$ سریعتر رشد می‌کند. با نشان دادن این مطلب که این مجموع بایستی به میزانی معقول رشد کند، کران بالایی برای زمان کل به دست می‌آوریم.

یک کوچکترین مقدار ممکن برای $S^1$ وجود دارد به طوری که $a_0 = 2k - 1$ (با توجه به شرط غیر صعودی بودن ستونها). این مقدار، مقداری از $S^1$ است که در صورت پخش شدن "یکنواخت" مهره‌ها با استفاده از حداقل تعداد ممکن از ستونها به دست می‌آید. پس $a_0 = a_2 = \cdots = a_{2j} = 2k - 1$، $a_1 = a_3 = \cdots = a_{2j+1} = 1$، و به ازای $r$ی با ضابطهٔ $r \leq 2k - 1$، $a_{2j+2} = r$. این مقدار $S^1$ را به صورت $\hat{S}$ نشان می‌دهیم. مقدار $j$ مساوی $j = [n - k/2k]$ است.

$$
\begin{aligned}
S &= \sum_{i=0}^{j}(2i+1) + (2k-1)\sum_{i=1}^{j} 2j + (2j+2)r \\
&= 2kj^2 + (2k + 2r + 1)j + 2r + 1 \\
&\geq 2k\left(\frac{n-k}{2k} - 1\right)^2 \\
&\geq \frac{n^2}{2k} - 3n.
\end{aligned}
$$

بنابراین، اگر $S^1 < (n^2/2k) - 3n$، آنگاه $a_0 \geq 2k + 1$. در حالی که $n^2/(2n + 2) - 3n \leq S^1 < (n^2/2k) - 3n$، $S^1$ به ازای هر دو مرحله، حداقل به اندازهٔ $k$ افزایش می‌یابد، و بنابراین، زمان لازم میان $n^2/(2k + 2) - 3n$ و $(n^2/2k) - 3n$ حداکثر

$$
n^2\left(\frac{1}{2k} - \frac{1}{2k+2}\right)\frac{2}{k} = \frac{n^2}{k^2(k+1)}
$$

است.می‌توانیم به کمک جمع نسبت به $k$، کران بالایی به دست آوریم.بایستی $7n$ را نیز اضافه کنیم زیرا دامنهٔ از $3n - (n^2/2)$ تا $3n + (n^2/2)$ را به حساب نیاورده‌ایم.بنابراین، کران $b$ برابر است با

$$n^2\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k^2(k+1)} + 7n = n^2\sum_{k\geq 1}\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{k(k+1)}\right) + 7n$$

$$= \left(\frac{\pi^2}{6} - 1\right)n^2 + 7n < 0{,}645n^2 + 7n$$

■

## ۴.یک تعبیر فیزیکی

اکنون به بیان رابطه‌ای میان این بازی و یک معادلهٔ دیفرانسیل می‌پردازیم.با استفاده از این رابطه خواهیم توانست نشان دهیم که اگر $n$ به بینهایت میل کند، به ازای ثابت $c$ ی معیّنی، تعداد حرکتها مساوی $cn^2 + o(n^2)$ است.این رابطه را می‌توان به منظور استخراج کرانهای بهتری برای ثابت $c$ به کار برد.این معادلهٔ دیفرانسیل از بررسی الگویی که پس از تقریباً $n$ مرحلهٔ بازی حاصل می‌شود، به دست می‌آید.با تقریب زدن رفتار این الگو با یک معادلهٔ دیفرانسیل، می‌توانیم تقریبی از تعداد مرحله‌ها به دست آوریم که با افزایش $n$ بهتر می‌شود.

این الگو را می‌توان به سادگی توصیف کرد.گرچه تعیین نقطهٔ دقیق ظهور آن مشکل است، ولی تا زمانی که تفاضل تعداد مهره‌های ستونهای همجوار فعّال، حداکثر ۳ نشود، این الگو حاصل نخواهد شد، و اندکی پس از آن ظاهر می‌شود.به خاطر داشته باشید که بنا به لم ۶، تعداد مهره‌های واقع در ستونهای فعّال با افزایش فاصله از مبدأ کاهش می‌یابد.وقتی تعداد مهره‌های واقع در مبدأ کم می‌شود، باید ستونهای متعدّدی با تعداد مساوی مهره موجود باشند.اثبات لم ۶ نشان می‌دهد که اگر تعداد مهره‌ها در دو ستون فعّال همجوار یکی باشد، آنگاه، برحسب فرد یا زوج بودن تعداد مهره‌های این دو ستون، ستون غیر فعّال واقع در میان آنها داری یک یا صفر مهره خواهد بود.بنابراین، بایستی ناحیه‌های طویلی حاوی ستونهای فعال با تعداد مهرهٔ یکسان موجود باشند، و بنابراین یک وضعیّت نمونه‌وار به صورت

$$\ldots, 2k+1, 1, 2k+1, 1, 2k+1, \ldots, 2k, 0, 2k, 0, 2k, \ldots,$$
$$2k-1, 1, 2k-1, 1, 2k-1, \ldots$$

خواهد بود.

به سادگی می‌توان تحقیق کرد که هر ناحیه‌ای که در آن، ستونها متناوباً $2k+1$ مهره‌ای و ۱ مهره‌ای (یا $2k$ مهره‌ای و ۰ مهره‌ای) باشند، ثابت می‌ماند؛ بنابراین کّل فعالیّت بایستی به مرزهای ناحیه‌ها محدود شود.معلوم می‌شود که در هر مرحله، بسته به زوجیتهای نسبی در مرزهای ناحیه‌ها، مرز به اندازهٔ یک موضع به سمت چپ یا به سمت راست حرکت خواهد کرد، یا ساکن خواهد ماند.در مثال زیر، قسمتی از وضعیّت به ازای $n = 175$ را نشان می‌دهیم.

```
9 1 9 1 9 1 9 1 9 1 9 1 9 1 8 0 8 0 7 1 7 1 7 1 6 0 6 0 6 0 6 0 5 0 4 0 4 0 4 0 4 1 3 0 2 0 2 0 2 0 2
1 9 1 9 1 9 1 9 1 9 1 9 1 9 0 8 0 7 1 7 1 7 1 7 0 6 0 6 0 6 0 5 1 4 0 4 0 4 0 4 0 4 1 2 0 2 0 2 0 2 0
9 1 9 1 9 1 9 1 9 1 9 1 9 1 8 0 7 1 7 1 7 1 7 1 6 0 6 0 6 0 5 1 5 0 4 0 4 0 4 0 4 0 4 0 2 0 2 0 2 0 2
1 9 1 9 1 9 1 9 1 9 1 9 1 9 0 7 1 7 1 7 1 7 1 7 0 6 0 6 0 5 1 5 1 4 0 4 0 4 0 4 0 4 0 3 0 2 0 2 0 2 0
9 1 9 1 9 1 9 1 9 1 9 1 9 1 7 1 7 1 7 1 7 1 7 1 6 0 6 0 5 1 5 1 5 0 4 0 4 0 4 0 4 0 3 1 2 0 2 0 2 0 2
1 9 1 9 1 9 1 9 1 9 1 9 1 8 1 7 1 7 1 7 1 7 1 7 0 6 0 5 1 5 1 5 1 4 0 4 0 4 0 4 0 3 1 3 0 2 0 2 0 2 0
9 1 9 1 9 1 9 1 9 1 9 1 9 0 8 1 7 1 7 1 7 1 7 1 6 0 5 1 5 1 5 1 5 0 4 0 4 0 4 0 3 1 3 1 2 0 2 0 2 0 1
1 9 1 9 1 9 1 9 1 9 1 9 1 8 0 8 1 7 1 7 1 7 1 7 0 5 1 5 1 5 1 5 1 4 0 4 0 4 0 3 1 3 1 3 0 2 0 2 0 1 1
9 1 9 1 9 1 9 1 9 1 9 1 9 0 8 0 8 1 7 1 7 1 7 1 5 1 5 1 5 1 5 1 5 0 4 0 4 0 3 1 3 1 3 1 2 0 2 0 1 1 1
1 9 1 9 1 9 1 9 1 9 1 9 1 8 0 8 0 8 1 7 1 7 1 6 1 5 1 5 1 5 1 5 1 4 0 4 0 3 1 3 1 3 1 3 0 2 0 1 1 1 1
9 1 9 1 9 1 9 1 9 1 9 1 9 0 8 0 8 0 8 1 7 1 7 0 6 1 5 1 5 1 5 1 5 0 4 0 3 1 3 1 3 1 3 1 2 0 1 1 1 1 1
1 9 1 9 1 9 1 9 1 9 1 9 1 8 0 8 0 8 0 8 1 7 1 6 0 6 1 5 1 5 1 5 1 4 0 3 1 3 1 3 1 3 1 3 0 1 1 1 1 1 1
9 1 9 1 9 1 9 1 9 1 9 1 9 0 8 0 8 0 8 0 8 1 7 0 6 0 6 1 5 1 5 1 5 0 3 1 3 1 3 1 3 1 3 1 1 1 1 1 1 1 1
1 9 1 9 1 9 1 9 1 9 1 9 1 8 0 8 0 8 0 8 0 8 1 6 0 6 0 6 1 5 1 5 1 3 1 3 1 3 1 3 1 3 1 2 1 1 1 1 1 1 1
9 1 9 1 9 1 9 1 9 1 9 1 9 0 8 0 8 0 8 0 8 0 8 0 6 0 6 0 6 1 5 1 4 1 3 1 3 1 3 1 3 1 3 0 2 1 1 1 1 1 1
1 9 1 9 1 9 1 9 1 9 1 9 1 8 0 8 0 8 0 8 0 8 0 7 0 6 0 6 0 6 1 5 0 4 1 3 1 3 1 3 1 3 1 2 0 2 1 1 1 1 1
9 1 9 1 9 1 9 1 9 1 9 1 9 0 8 0 8 0 8 0 8 0 7 1 6 0 6 0 6 0 6 1 4 0 4 1 3 1 3 1 3 1 3 0 2 0 2 1 1 1 1
1 9 1 9 1 9 1 9 1 9 1 9 1 8 0 8 0 8 0 8 0 7 1 7 0 6 0 6 0 6 0 6 0 4 0 4 1 3 1 3 1 3 1 2 0 2 0 2 1 1 1
9 1 9 1 9 1 9 1 9 1 9 1 9 0 8 0 8 0 8 0 7 1 7 1 6 0 6 0 6 0 6 0 5 0 4 0 4 1 3 1 3 1 3 0 2 0 2 0 2 1 1
1 9 1 9 1 9 1 9 1 9 1 9 1 8 0 8 0 8 0 7 1 7 1 7 0 6 0 6 0 6 0 5 1 4 0 4 0 4 1 3 1 3 1 2 0 2 0 2 0 2 1
9 1 9 1 9 1 9 1 9 1 9 1 9 0 8 0 8 0 7 1 7 1 7 1 6 0 6 0 6 0 5 1 5 0 4 0 4 0 4 1 3 1 3 0 2 0 2 0 2 0 2
1 9 1 9 1 9 1 9 1 9 1 9 1 8 0 8 0 7 1 7 1 7 1 7 0 6 0 6 0 5 1 5 1 4 0 4 0 4 0 4 1 3 1 2 0 2 0 2 0 2 0
9 1 9 1 9 1 9 1 9 1 9 1 9 0 8 0 7 1 7 1 7 1 7 1 6 0 6 0 5 1 5 1 5 0 4 0 4 0 4 0 4 1 3 0 2 0 2 0 2 0 2
1 9 1 9 1 9 1 9 1 9 1 9 1 8 0 7 1 7 1 7 1 7 1 7 0 6 0 5 1 5 1 5 1 4 0 4 0 4 0 4 0 4 1 2 0 2 0 2 0 2 0
9 1 9 1 9 1 9 1 9 1 9 1 9 0 7 1 7 1 7 1 7 1 7 1 6 0 5 1 5 1 5 1 5 0 4 0 4 0 4 0 4 0 4 0 2 0 2 0 2 0 2
1 9 1 9 1 9 1 9 1 9 1 9 1 7 1 7 1 7 1 7 1 7 1 7 0 5 1 5 1 5 1 5 1 4 0 4 0 4 0 4 0 4 0 3 0 2 0 2 0 2 0
9 1 9 1 9 1 9 1 9 1 9 1 8 1 7 1 7 1 7 1 7 1 7 1 5 1 5 1 5 1 5 1 5 0 4 0 4 0 4 0 4 0 3 1 2 0 2 0 2 0 2
1 9 1 9 1 9 1 9 1 9 1 9 0 8 1 7 1 7 1 7 1 7 1 6 1 5 1 5 1 5 1 5 1 4 0 4 0 4 0 4 0 3 1 3 0 2 0 2 0 2 0
9 1 9 1 9 1 9 1 9 1 9 1 8 0 8 1 7 1 7 1 7 1 7 0 6 1 5 1 5 1 5 1 5 0 4 0 4 0 4 0 3 1 3 1 2 0 2 0 2 0 2
1 9 1 9 1 9 1 9 1 9 1 9 0 8 0 8 1 7 1 7 1 7 1 6 0 6 1 5 1 5 1 5 1 4 0 4 0 4 0 3 1 3 1 3 0 2 0 2 0 2 0
9 1 9 1 9 1 9 1 9 1 9 1 8 0 8 0 8 1 7 1 7 1 7 0 6 0 6 1 5 1 5 1 5 0 4 0 4 0 3 1 3 1 3 1 2 0 2 0 2 0 2
```

به طوری که ملاحظه می‌شود، مرزهای متحرّک الگوی زیبایی از مثلثها به وجود می‌آورند.برای توضیح این الگو لازم است رفتار دقیق همهٔ مرزهای میان ناحیه‌ها را بدانیم.به آسانی می‌توان همهٔ حالتها را بررسی کرد زیرا تعدادشان زیاد نیست.نتیجه می‌گیریم که مرز میان هر دو ناحیه که شامل ستونهای فعالی به اندازهٔ $2k+1$ و $2k$ هستند ساکن است، و مرز میان ناحیه‌های شامل ستونهایی به اندازهٔ $2k$ و $2k-1$، برحسب اینکه ستون غیر فعّال میان آنها شامل صفر یا یک مهره باشد، به‌ترتیب به مبدأ نزدیک یا از مبدأ دور خواهد شد.وقتی مرز متحرکّی با مرزی ساکن برخورد کند، منعکس می‌شود و مرز ساکن به اندازهٔ یک ستون آن طرفتر می‌رود.به عنوان مثال، در زیر مرز متحرکّی میان $2k$ و $2k-1$ که با مرز ساکنی میان $2k+1$ و $2k$ برخورد می‌کند، ملاحظه می‌شود.آرایهٔ سمت چپی نمایشگر یک آرایش نمونه‌وار به ازای $k = 4$، و آرایهٔ دست راستی نمایشگر مرز حرکت یافته است.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 9 | 1 | 9 | 1 | 8 | 0 | 8 | 0 | 7 |
| 1 | 9 | 1 | 9 | 0 | 8 | 0 | 7 | 1 |
| 9 | 1 | 9 | 1 | 8 | 0 | 7 | 1 | 7 |
| 1 | 9 | 1 | 9 | 0 | 7 | 1 | 7 | 1 |
| 9 | 1 | 9 | 1 | 7 | 1 | 7 | 1 | 7 |
| 1 | 9 | 1 | 8 | 1 | 7 | 1 | 7 | 1 |
| 9 | 1 | 9 | 0 | 8 | 1 | 7 | 1 | 7 |
| 1 | 9 | 1 | 8 | 0 | 8 | 1 | 7 | 1 |
| 9 | 1 | 9 | 0 | 8 | 0 | 8 | 1 | 7 |

```
—  —  —  — | —  —  —  <  —
—  —  —  — | —  —  <  —  —
—  —  —  — | —  <  —  —  —
—  —  —  —   <  —  —  —  —
—  —  — |  >  —  —  —  —  —
—  —  — |  —  >  —  —  —  —
—  —  — |  —  —  >  —  —  —
—  —  — |  —  —  —  >  —  —
—  —  — |  —  —  —  —  >  —
```

اگر به مرزها به چشم "توپ" و"دیوار" نگاه کنیم، می‌توانیم این الگو را به طریقی "فیزیکی" تعبیر کنیم.فرض کنید هر مرز متحرّک یک توپ و هر مرز ساکن یک دیوار باشد.در این صورت، یک توپ همیشه به اندازهٔ یک موضع در هر مرحله حرکت می‌کند.اگر توپی به دیواری برخورد کند، دیوار به اندازهٔ یک موضع عقب‌نشینی می‌کند، و توپ تغییر جهت داده از دیوار دور می‌شود.به‌آسانی معلوم می‌شود که اگر دو توپ به طور همزمان با دیواری برخورد کنند، آنچه که باید بشود، می‌شود:هردوی توپها تغییر جهت می‌دهند و دیوار تکان نمی‌خورد.اگر الگوها را بهناحیه‌های میان دیوارها تجزیه کنید، ناحیهٔ مرکزی تنها ناحیه‌ای است که توپی در آن نیست.از اینجا قاعدهٔ دیگری برای تعیین کامل وضعیت بازی به دست می‌آید:اگر دو دیوار در مرکز به هم برسند، هر دو ناپدید می‌شوند (عین رفتاری که توپهای واقع در ناحیه‌های همجوار دارند).

اکنون تعداد معیّنی دیوار داریم که توپهایی میان آنها در حال برخورد با دیوارها هستند.اگر فاصلهٔ میان دو دیوار مجاور $d$ باشد، توپ محبوس میان این دو دیوار در هر $۲d$ مرحله با هر دیوار یک بار برخورد می‌کند و با "فشاری" که به این ترتیب وارد می‌کند، در هر $۲d$ مرحله، دیوار را به‌اندازهٔ یک موضع حرکت می‌دهد.این را می‌توانیم به کمک معادلهٔ دیفرانسیلی که نشان می‌دهد دیوار با آهنگ $۱/۲d$ حرکت می‌کند، تقریب بزنیم.

هر دیوار در معرض اصابت یک یا دو توپ است.به دیوارهای انتهایی و میانی فقط یک توپ برخورد می‌کند، ولی به دیوارهای دیگر دو توپ اصابت می‌کند.کافی است فقط به یک طرف مبدأ، مثلاً، طرف راست (مثبت)، نگاه کنیم.فرض کنید $k$ دیوار داشته باشیم، و موضع $i$امین دیوار نسبت به مرکز را با $w_i$ نشان دهیم.در این صورت معادله‌های دیفرانسیل زیر را به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}
\frac{dw_۱}{dt} &= \frac{-۱}{۲(w_۲ - w_۱)},\\
\frac{dw_i}{dt} &= \frac{۱}{۲(w_i - w_{i-۱})} - \frac{۱}{۲(w_{i+۱} - w_i)}, \qquad ۱ < i < k,\\
\frac{dw_k}{dt} &= \frac{۱}{۲(w_k - w_{k-۱})}
\end{aligned}$$

تا زمانی که دیوار میانی ($w_۱$) با مبدأ برخورد نکرده و حذف نشده باشد، جریان این بازی را می‌توان براساس رفتار این دستگاه معادله‌های دیفرانسیل تقریب زد.سپس به جای این معادله‌های دیفرانسیل، مجموعهٔ معادله‌های متناظری را که فقط شامل $k-۱$ دیوارند به کار می‌گیریم.

این دستگاه معادله‌ها مستقل از مقیاس‌بندی است و این استقلال بسیار مفید است.اگر هر یک از ناحیه‌ها را با ضریب $\alpha$ منبسط کنیم و زمان را با ضریب $\alpha^۲$ تقلیل دهیم، به طوری که $w'_k = \alpha w_k$ و $t' = t/\alpha^۲$، آنگاه هر جواب دستگاه معادله‌ها به جواب دیگری از آن تبدیل می‌شود.به نظر می‌رسد که این نکته دربارهٔ بازی ما نیز صادق باشد.یعنی اگر با $\alpha$ برابر مهره‌ها آغاز کنیم، جواب به این طریق مقیاس‌بندی خواهد شد.یعنی، $\alpha$ برابر مهره‌ها در عرض $\alpha^۲$ برابر زمان قبلی در محدوده‌ای $\alpha$ برابر محدودهٔ قبلی توزیع خواهد شد.البته، به دو دلیل، نمی‌توان فوراً چنین حکمی داد:در وضعیت آغازی یک نقطهٔ تکین وجود دارد، یعنی، همهٔ "دیوارها" مبدأ را در $t = ۰$ اشغال می‌کنند، و الگوی "توپهای برخوردکننده با دیوارها" تا زمان $O(n)$ ظاهر نمی‌شود.این اشکالها را می‌توان با تغییر وضعیت آغازی و اثبات لمی مبنی بر استقلال نتیجه از وضعیت آغازی رفع کرد.

می‌توانیم این بازی را تقریبی از معادلهٔ دیفرانسیل به حساب آوریم.اگر وضعیت آغازی ثابتی برای معادلهٔ دیفرانسیل اختیار کنیم، و بگذاریم $n$ به بینهایت میل کند، و اگر معادلهٔ دیفرانسیل را از طریق بازی مقیاس‌بندی شدهٔ خود تقریب بزنیم، آنگاه جریان بازی به رفتار معادلهٔ دیفرانسیل میل خواهد کرد.به عنوان مثال، اگر مقیاس را با ضریب $\alpha = ۲$ تغییر دهیم، آنگاه تعداد دفعات برخورد توپ به دیوار دوبرابر قبل است، و مقدار گسستهٔ حرکت دیوار به نصف قبل تقلیل می‌یابد.درست مثل این است که معادلهٔ دیفرانسیل را در مرحله‌هایی با اندازهٔ نصف و به تعداد دوبرابر تقریب بزنیم.

اکنون به لمی نیازمندیم که در اصل یک نابرابری مثلثی است.این لم می‌گوید که اگر بتوانیم با $m$ حرکت از وضعیت $s$ به وضعیت $s'$ برسیم به طوری که در هر حرکت مجاز به حرکت دادن هر زیرمجموعه از مهره‌ها باشیم، به شرطی که تعداد مهره‌های حرکت داده شده از یک ستون به راست و چپ همیشه یکسان باشد، آنگاه تفاضل حرکتهای لازم برای اینکه از $s$ به پایان بازی برسیم با تعداد حرکتهای لازم از $s'$ تا پایان بازی حداکثر به اندازهٔ $m$ اختلاف دارد.بنابراین، اگر $m$ را کوچک کنیم، تعداد حرکتهای لازم برای رسیدن به پایان بازی از $s$ و از $s'$ تقریباً مساوی است.تعداد حرکتهایی را که لازم است تا از وضعیت آغازی $s$ به پایان بازی برسیم با $M(s)$ نشان می‌دهیم.

**لم ۱.۷** اگر منظور از یک حرکت، اختیار کردن یک عدد صحیح نامنفی $r_i$ به ازای هر ستون $i$ و انتقال $۲r_i$ مهره از ستون $i$، $r_i$ مهره به ستون $i-۱$ و $r_i$ مهره به ستون $i+۱$ باشد، و اگر بتوان با $m$ حرکت از وضعیت $s$ به وضعیت $s'$ رسید، آنگاه $M(s') \le M(s) \le M(s') + m$.

اثبات.هر قسمت نابرابری را جداگانه ثابت خواهیم کرد.اثبات هر دو قسمت مشابه اثبات قضیهٔ ۱ و به استقراست.

بنا به قضیهٔ ۱، در صورتی که ناچار به انتقال همهٔ مهره‌ها نباشید، این بازی همیشه به وضعیت یکسانی ختم می‌شود.نخست نشان می‌دهیم که در این بازی، سریعترین راه ممکن برای اتمام بازی، انتقال همهٔ مهره‌های ممکن در هر حرکت است، یعنی به همان صورتی که در بازی اوّلیهٔ ما عمل می‌شود.بنابراین، $M(s') + m \ge M(s)$، زیرا می‌توانیم از وضعیت $s$، نخست با $m$ حرکت به $s'$ برسیم و بازی را با $M(s') + m$ حرکت به پایان برسانیم.به این ترتیب قسمت دوّم نابرابری ما ثابت می‌شود.

فرض کنید همهٔ مهره‌های قابل انتقال را در مرحلهٔ نخست انتقال ندهیم.به طور مشخص فرض کنید که همهٔ مهره‌های ممکن را از ستون $i$ انتقال ندهیم.چون بازی وقتی پایان می‌یابد که در هیچ ستونی بیش از یک مهره نمانده باشد، بایستی سرانجام مهره‌های بیشتری از ستون $i$ام انتقال یابند.فرض کنید این امر نخستین‌بار در مرحلهٔ $j$ام رخ دهد.بدون تغییر هیچ حرکت دیگری، می‌توانیم از مهره‌های ستون $i$ در مرحلهٔ $j$ام دو مهره کمتر و در مرحلهٔ نخست دو مهره بیشتر انتقال دهیم.با تکرار این فرایند راندن انتقالها به مرحلهٔ نخست، بالاخره در مرحلهٔ نخست، همهٔ مهره‌های ممکن را انتقال می‌دهیم، و حداکثر همان تعداد مرحله طول می‌کشد.به طوری که ملاحظه می‌شود، بنا به استقرا، انتقال حداکثر مهره‌ها در هر مرحله به سرعت هر روش دیگری موجب پایان رسیدن بازی می‌شود.

اکنون باید ثابت کنیم که $M(s) \ge M(s')$.نشان خواهیم داد که اگر $M(s) < M(s')$، آنگاه چنانچه از $s'$ شروع کنیم، راهی برای خاتمهٔ بازی با $M(s)$ حرکت وجود دارد، که یک تناقض است.

فرض کنید که وضعیت بعد از نخستین حرکت از $s$ در بازی اوّلیه (انتقال همهٔ مهره‌های ممکن) عبارت از $s_۱$ باشد.با انتقال آن عدّه از مهره‌های انتقال‌یافته جهت نیل از $s$ به $s_۱$ که در نیل از $s$ به $s'$ منتقل نشدند، از $s'$ به $s'_۱$ می‌رسیم.سپس نشان می‌دهیم که می‌توانیم با $m-۱$ حرکت از $s_۱$ به $s'_۱$ برسیم، که در این صورت قضیهٔ به استقرا ثابت می‌شود.

فرض کنید تعداد کلّ مهره‌های برداشته شدهٔ در هنگام انتقال از وضعیت $s$ به $s'$ مساوی $۲d_i$ و تعداد مهره‌های ستون $i$ در وضعیت $s$ مساوی $p_i$ باشد.برای نیل به $s'_۱$ حداکثر $(۲[p_i/۲] - ۲d_i)$ مهره را از ستون $i$ در

وضعیت $s'$ منتقل کنید. واضح است که این تعداد مهره در ستون $i$ در وضعیت $s'$ وجود دارند، زیرا با $p_i$ مهره آغاز کردیم و $2d_i$ مهره را برداشتیم.

لازم است نشان دهیم که می‌توانیم از $s_1$ به $s'_1$ برسیم. نخست نشان خواهیم داد که می‌توانیم فرض کنیم در فرایند نخستین حرکت از $s$ به $s'$، $\max(2[p_i/2], 2d_i)$ مهره از ستون $i$، انتقال دهیم. این کار را با راندن حرکتها به مرحله‌های قبلی انجام می‌دهیم. اگر مهره‌هایی را از یک ستون در مرحلهٔ $j$، که حاوی همهٔ مهره‌های ممکن انتقال یافته در مرحلهٔ $j-1$ نباشد، انتقال دهیم، آنگاه می‌توانیم، بی‌آنکه چیزی تغییر کند، از آن ستون دو مهره بیشتر در مرحلهٔ $j-1$ و دو مهره کمتر در مرحلهٔ $j$ام انتقال دهیم. با تکرار این فرایند، بالاخره به آخر خط می‌رسیم، زیرا به این ترتیب فقط حرکتها را به مرحله‌های قبلی میل می‌دهیم. هرگاه با مشکلی مواجه شویم، آنگاه به ازای هر $i$، یا همهٔ مهره‌های ممکن را در مرحلهٔ نخست از ستون $i$ منتقل می‌کنیم، یا به هنگام نیل از $s$ به $s'$ پس از مرحلهٔ نخست، مهرهٔ دیگری از ستون $i$ برنمی‌داریم. حالت اول وقتی رخ می‌دهد که $[p_i/2] \leq d_i$، و دومی وقتی که $[p_i/2] \geq d_i$.

اکنون به آسانی می‌توان ملاحظه کرد که می‌توانیم با استفاده از فرایندی که کم و بیش مانند فرایند مورد استفاده برای نیل از $s$ به $s'$ است، از $s_1$ به $s'_1$ برسیم. اگر در نخستین حرکت از $s$ به $s'$ بیش از یک مهرهٔ انتقال نیافته در ستون $i$ وجود داشته باشد، آنگاه چنین مهره‌هایی را در نخستین حرکت انتقال می‌دهیم و سپس، تا زمانی که به $s'_1$ نرسیده‌ایم، به آنها دست نمی‌زنیم. به این ترتیب راهی $m$ مرحله‌ای از $s$ به $s'_1$ حاصل می‌شود به طوری که در حرکت نخست، $2[p_i/2]$ مهره از ستون $i$ برمی‌داریم، یعنی، بعد از مرحلهٔ نخست به $s_1$ می‌رسیم. چون $M(s_1) = M(s) - 1$، و چون حکم در حالت $M(s) = 1$ بدیهی است، حکم لم ۷ به استقرا نتیجه می‌شود. ■

اکنون با استفاده از این لم می‌توانیم ثابت کنیم ثابت $c$یی وجود دارد به طوری که تعداد حرکتهای لازم برای اتمام بازی مساوی $cn^2 + o(n^2)$ است. پیشتر نشان داده‌ایم که $1 - (\pi^2/6) \leq c \leq 1/3$. با استفاده از تکنیکهای عددی برای حل معادله‌های دیفرانسیل، می‌توان این مقدار ثابت را با هر تقریب دلخواهی به دست آورد.

**قضیهٔ ۴.** اگر وضعیت آغازی متشکل از ستونی $2n+1$ مهره‌ای و $M(n)$ تعداد حرکتهای لازم برای به پایان رساندن بازی باشد آنگاه ثابت $c$یی وجود دارد به طوری که

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{M(n)}{n^2} = c$$

اثبات. از این نکته استفاده می‌کنیم که بازی، معادلهٔ دیفرانسیل را تقریب می‌کند. رفتار معادلهٔ دیفرانسیل را در حالتی که دیوارها در موضعهای $w = (w_1, w_2, \cdots, w_k)$ باشند، در نظر بگیرید. اگر از $w$ آغاز کنیم، معادلهٔ دیفرانسیل زمان معین $c_w$یی لازم دارد تا به جواب برسد. اگر بازی خود را در حالتی که دیوارها در موضعهای $[\alpha w] = (\pm[\alpha w_1], \pm[\alpha w_2], \cdots + [\alpha w_k])$ باشند شروع کنیم، می‌توانیم معادلهٔ دیفرانسیل را به وسیلهٔ بازی خودمان تقریب بزنیم. در اینجا، $\alpha$ عدد حقیقی دلخواه بزرگی است، و $[\alpha w_i]$ گرده شدهٔ $\alpha w_i$ به صورت یکی از عددهای صحیح مجاور خود می‌باشد. گرد کردن به هر طریق مناسب را مجاز می‌شماریم. این وضعیت آغازی را که دیوارها در $[\alpha w]$ هستند با $s_{\alpha w}$ نشان می‌دهیم. با استفاده از ویژگی معادلهٔ دیفرانسیل در مورد مقیاسبندی، ملاحظه می‌کنیم که $\alpha$ اثری بر رفتار معادلهٔ دیفرانسیل ندارد، یعنی، رفتار معادلهٔ دیفرانسیل در حالتی که با $\alpha w$ آغاز کنیم، عین رفتار آن در حالتی است که با $w$ شروع کنیم. به علاوه، اگر اجازه دهیم که $\alpha$ در بازی به بینهایت میل کند، و به بازی به چشم تقریبی برای معادلهٔ دیفرانسیل با وضعیت آغازی $w$ نگاه کنیم، ملاحظه می‌کنیم که، تعداد دفعه‌های برخورد توپها به دیوارها افزایش می‌یابد و دیوارها در نتیجهٔ برخورد با توپها کمتر حرکت می‌کنند. بنابراین، رفتار بازی به سمت رفتار معادلهٔ دیفرانسیل میل می‌کند، و $(1/\alpha^2)M(s_{\alpha w}) \to c_w$.

اکنون به رابطه‌ای میان $n$ و $\alpha$ نیازمندیم. به آسانی می‌توان تعداد مهره‌ها در $s_{\alpha w}$ را حساب کرد. به ازای هر جفت از ستونهای همجوار، بجز احتمالاً یکی از این جفتها (مکان "توپ")، ناحیهٔ میان $[\alpha w_i]$ و $[\alpha w_{i+1}]$ حاوی $2(k-i)$ مهره است. بنابراین، تعداد کل مهره‌ها در یک طرف مبدأ مساوی

$$\begin{aligned} &k.([\alpha w_1] - 0) + (k-1).([\alpha w_2] - [\alpha w_1] + \cdots \\ &+ 1.([\alpha w_k] - [\alpha w_{k-1}]) \\ &+ O(1) = \sum_{i=1}^{k} [\alpha w_i] + O(1), \end{aligned}$$

است که در آن، ثابت موجود در نماد $O$ی بزرگ می‌تواند وابسته به $k$ و $w$ باشد، ولی مستقل از $\alpha$ است. بنابراین، $n$ مناسب برای $s_{\alpha w}$، $n = \sum_{i=1}^{k} [\alpha w_i]$ است.

اکنون لم ۷ را به کار می‌بریم. برای این کار، باید نشان دهیم که اگر با تعداد مناسبی از مهره‌ها در مبدأ آغاز کنیم، می‌توانیم با استفاده از بازی توصیف شده در لم ۷، بی‌آنکه نیازی به انتقال همهٔ مهره‌های ممکن باشد، سریعاً به $s_{\alpha w}$ برسیم. اگر با $2n + 1 = \sum_{i=1}^{k}(2[\alpha w_i] + 1)$ مهره آغاز کنیم، و به ازای هر $i$، بازی اوّلیه را با $2[\alpha w_i] + 1$ مهره در مبدأ آغاز کرده و جداگانه اجرا کنیم، آنگاه در پایان کار، $k - i$ مهره در هر ستون میان $[\alpha w_i]$ و $[\alpha w_{i+1}]$ خواهیم داشت. اگر سپس همهٔ مهره‌های ممکن در ستونهای واقع در موضعهای زوج را انتقال دهیم، مشابه مثال زیر، به وضعیت $s_{\alpha w}$ با توپهای مستقر در دیوارهای حایل $2j - 1$ و $2j$ دست می‌یابیم:

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 0 | 4 | 0 | 4 | 0 | 5 | 1 | 5 | 1 | 5 | 0 | 4 | 0 | 4 | 0 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 |

اگر با $2[\alpha w_i] + 1$ در مبدأ آغاز کنیم، به‌ازای $1 \leq i \leq k$، تعداد مرحله‌های لازم برای نیل به $s_{\alpha w}$ یک واحد بیشتر از حداکثر زمان لازم برای اتمام بازی است. این تعداد، بنا به لم ۵، حداکثر $\alpha^2 w_k^2 + \alpha w_k + 1$ است. بنا به لم ۷ داریم

$$\frac{1}{\alpha^2} \mid M(s_{\alpha w}) - M(n) \mid \leq w_k^2 + \frac{w_k}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2}$$

به‌ازای $\alpha$ی به‌اندازهٔ کافی بزرگ، به دست می‌آوریم

$$\left| \frac{1}{\alpha^2} M(s_{\alpha w}) - c_w \right| \le \varepsilon$$

بنابراین از ترکیب این معادله‌ها نتیجه می‌شود

$$\left| \frac{1}{\alpha^2} M(n) - c_w \right| \le w_k^2 + \varepsilon$$

توجه داشته باشید که $n/a \simeq \sum_{i=1}^{k} w_i$، و بنابراین، به ازای $n$های به‌اندازهٔ کافی بزرگ،

$$\left| \frac{1}{n^2} M(n) - \frac{c_w}{\left(\sum_1^k w_i\right)^2} \right| \le 2\left(\frac{w_k}{\sum_1^k w_i}\right)^2$$

با بزرگ کردن $k$ و انتخاب $w_i$های هم‌فاصله، می‌توانیم $w_k/\sum_{i=1}^{k} w_i$ را به اندازهٔ دلخواه کوچک نماییم. چون هیچ یک از $c_w$ و $w_i$ به $n$ بستگی ندارند، نتیجه می‌شود که $M(n)/n^2$ به سمت یک ثابت میل می‌کند.

■

در واقع، می‌توان نشان داد رفتار دقیقی برای دیوارها وجود دارد که، وقتی $w_k/\sum_{i=1}^{k} w_i$ به صفر میل کند، معادلهٔ دیفرانسیل به آن میل می‌نماید. به این منظور می‌توان نشان داد که اگر یک بازی تقریبی را در وضعیتی نزدیک به وضعیت آغازی واقعی با $2n+1$ مهره در مبدأ شروع بکنید (یعنی، اگر بتوان مطابق لم ۷، در $m$ مرحله به آن رسید)، آنگاه در هر لحظهٔ $t$، وضعیت بازی تقریبی به وضعیت بازی واقعی نزدیک خواهد بود (باز یعنی در $m$ مرحله می‌توان به آن رسید). از این واقعیت که جریان بازی مهره، وقتی $w_k/\sum_{i=1}^{k} w_k \to 0$، به سمت یک حد میل می‌کند، نتیجه می‌شود که رفتار معادلهٔ دیفرانسیل نیز، وقتی $w_k/\sum_{i=1}^{k} w_i \to 0$، به سمت حدی میل می‌کند. به‌ازای $t > 0$، این رفتار حدّی در معادلهٔ دیفرانسیل صدق می‌کند. به ازای $t = 0$، یک نقطهٔ تکین وجود دارد؛ وضعیت در $t = 0$ را می‌توان به صورت بینهایت دیوار در مبدأ در نظر گرفت. در این صورت، "مهبانگی" رخ می‌دهد: دیوارهایی شروع به ناپدید شدن می‌کنند و میان بقیهٔ دیوارها فاصله به وجود می‌آید. بنابراین، به ازای $t$های خیلی کوچک، تعدادی بسیار زیاد (ولی متناهی) دیوار وجود دارند که همگی خیلی به مبدأ نزدیک‌اند (ولی در مبدأ نیستند).

## ۵. نتیجه‌گیری

در این مقاله ثابت کرده‌ایم که تعداد حرکتهای لازم برای نیل به وضعیت نهایی بازی، $cn^2 + o(n^2)$، $0{,}33 \le c \le 0{,}65$ است. می‌توان با استفاده از استدلالهای پیچیده‌تر فاصلهٔ میان کرانها را کمتر کرد. روش دیگر برای تعیین مقدار $c$ استفاده از شبیه‌سازی کامپیوتری است. زمان اجرای الگوریتم شبیه‌سازی ساده که در آن، وضع هر ستون در هر واحد زمانی مشخص می‌شود، مساوی $\Omega(n^3)$ است و بنابراین، این الگوریتم فقط برای $n$های نسبتاً کوچک مناسب است. شبیه‌سازی بهتری را می‌توان بر اساس نظرگاه فیزیکی توپهای در حال حرکت میان دیوارها پایه‌ریزی کرد. براساس این مدل، می‌توان برنامه‌ای نوشت که وضعیت بازی را هر بار که توپی به دیواری برخورد می‌کند، مشخص کند. این امر موجب صرفه‌جویی قابل توجهی در زمان می‌شود و در نتیجه موجب افزایش محدوده‌ای می‌شود که می‌توان شبیه‌سازی نمود. اما بازی را به ازای مقدارهای تا $n = 10000$ شبیه‌سازی کرده‌ایم. به ازای $n = 10000$، تعداد مرحله‌ها مساوی ۵۹۷۳۰۵۳۳ است، و در نتیجه، $c \simeq 0{,}5973$.

*********

• Richard Anderson, Lászlo' Lovász, Peter Shor, Joel Spencer, Eva Tardos, Shmuel Winograd, " Disks, balls, and walls: analysis of a combinatorial game", *Amer.Math.Monthly*,(6) **96**(1989)481-493.

* ریچارد اندرسن، دانشگاه واشینگتن آمریکا
جوئل اسپنسر، مؤسسهٔ کورانت آمریکا
شموئل وینوگراد، مرکزپژوهشی واتسن آی.بی.ام در آمریکا
پیترشور، آزمایشگاههای بل در آمریکا
لاسلولواش، دانشگاه اوتووش لورانت مجارستان و دانشگاه پرینستن آمریکا
اوا تاردوش، دانشگاه ام.آی.تی امریکا