دو شکل در صفحهٔ هذلولوی*

ریفل رابینسن*
ترجمهٔ خداداد خسروی

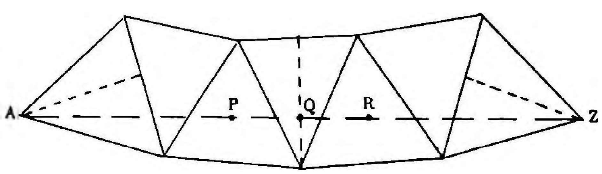
در صفحهٔ هذلولوی، زوایای درونی مثلث متساوی‌الاضلاع می‌توانند هر اندازه‌ای کمتر از شصت درجه داشته باشند. مثلاً به‌ازای هر عدد صحیح $n \geq ۷$، این زاویه‌ها می‌توانند $۳۶۰^\circ/n$ باشند. با کنار هم قراردادن n تا از این مثلثها حول یک رأس می‌توان صفحهٔ هذلولوی را آجرفرش کرد.

اگر n زوج باشد، خطی که یک ضلع را دربرگیرد، دنباله‌ای از اضلاع را شامل خواهد شد و خطی که یک ارتفاع را دربرگیرد، دنباله‌ای از ارتفاعها را دربر خواهد گرفت. اگر n فرد باشد، خطی که یک ضلع را دربرگیرد، متناوباً یک ضلع و یک جفت ارتفاع را شامل خواهد شد.

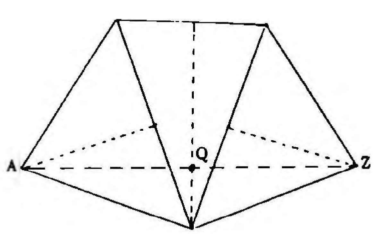
حال اگر خطی از یک رأس چنان رسم شود که بر یک ضلع عمود باشد چه می‌شود؟ اگر n مضربی از چهار باشد، این خط دنباله‌ای از اضلاع را دربر می‌گیرد. اگر n دوبرابر یک عدد فرد باشد، این خط دنباله‌ای از ارتفاعها را شامل می‌شود. اگر n فرد باشد، این خطّ زاویهٔ بین یک ضلع و ارتفاعی مارّ بر رأس اولیه را نصف خواهد کرد، اما رفتار بعدی آن روشن نیست.

در اینجا نشان خواهیم داد که در دو حالت $n = ۷$ و $n = ۹$، استدلال هندسی ساده‌ای مسیر خط را مشخص می‌کند. موضوع در شکلهای ۱ و ۲ نمایش داده شده است. در هر دو حالت، از نقطهٔ A شروع کرده خطی رسم می‌کنیم که زاویهٔ بین یک ضلع و ارتفاع را نصف کند و این خط را امتداد می‌دهیم تا به رأس دیگری چون Z برسد. در حالت $n = ۷$، A و Z با چهار ضلع به هم وصل می‌شوند ولی برای $n = ۹$، دو ضلع کافی است. در هر دو حالت، این خط یک ارتفاع را در نقطهٔ وسط آن، Q، قطع می‌کند و زاویه‌ای بین یک ضلع و یک ارتفاع مارّ بر رأس Z را نصف می‌کند. وقتی $n = ۷$، این خط از مرکزهای P و R از دو مثلث می‌گذرد.

تناسب ابعاد طبعاً تغییر می‌کند تا این شکلها در صفحهٔ اقلیدسی جا بیفتند. میزان تغییر ابعاد در شکلهای مختلف متفاوت است. اضلاع آجرها، و تنها همانها، با خط پر نشان داده شده‌اند. آجرها صرف‌نظر از ظاهرشان همه بر هم قابل انطباق‌اند. ارتفاعهایی که ترسیم شده‌اند با خط‌چینِ متشکل از پاره‌خطهای کوتاه رسم شده‌اند و نیمسازهای زاویهٔ بین یک ضلع و یک ارتفاع با خط‌چینِ مرکّب از پاره‌خطهای بلندتر.



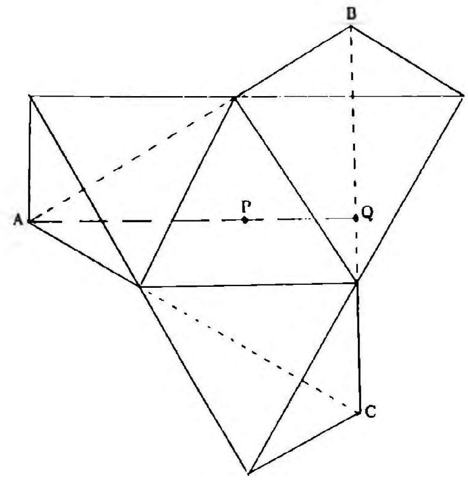
شکل ۱



شکل ۲

اگر در شکل ۱ یا ۲ نیمساز را در طرف چپ A یا طرف راست Z ادامه دهیم، این خط زاویهٔ دیگری بین یک ضلع و یک ارتفاع را نصف خواهد کرد. به این ترتیب، کل شکل تکرار می‌شود و این خطّ بینهایت رأس را دربر می‌گیرد که به فواصل مساوی از یکدیگر قرار دارند.

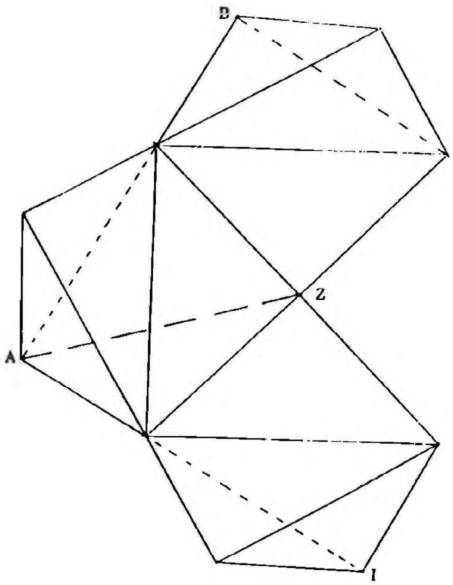
اثبات مطالب در حالت $n = ۷$ در شکل ۳ نمایش داده شده است. مجتمعی از هفت آجر مثلثی در این شکل دیده می‌شود. فراموش نکنید که آجرها همه بر هم قابل انطباق‌اند. پاره‌خط AB شامل دو ارتفاع و یک ضلع است که در یک امتداد قرار دارند. به این ترتیب، ABC یک مثلث



شکل ۳

متساوی‌الاضلاع است و به سبب تقارن، مرکز آن P باید بر مرکز مثلث مرکزی منطبق باشد. زاویهٔ مثلث ABC در نقطهٔ A زاویهٔ بین یک ضلع و ارتفاع یک آجر است. نیمساز این زاویه باید از P، مرکز مثلث، بگذرد و بر ضلع مقابل در نقطهٔ Q عمود باشد. به این ترتیب، نیمهٔ چپ شکل ۱ حاصل می‌شود. نیمهٔ راست با قرینه‌یابی به‌دست می‌آید.

اثبات مطلب برای $n = 9$ در شکل ۴ نمایش داده شده است. در اینجا یک مجتمع ۲۷ آجری در نظر می‌گیریم که ۹ آجر آن در رأس Z مشترک‌اند و یک نُه‌ضلعی منتظم پدید می‌آورند و یک جفت آجر دیگر به هر ضلع ۹ضلعی چسبیده‌اند. جادادن همهٔ این آجرها در یک شکل، به‌نحوی که قابل استفاده باشد، غیرممکن است. بنابراین، تنها یک قطاع ۱۲۰ درجه‌ای نشان داده شده است که در آن، برای روشن شدن موضوع، زوایای مرکزی در رأس Z بزرگتر کشیده شده‌اند. پاره‌خط AB از دو ارتفاع و یک ضلع تشکیل شده است که بر یک امتداد قرار دارند. با تصورکردن آن قسمت از شکل که رسم نشده است، می‌بینیم که ABCDEFGHI یک نُه‌ضلعی منتظم است که مرکز



شکل ۴

آن Z می‌باشد. زاویهٔ نُه‌ضلعی در A زاویهٔ بین ضلع و یک ارتفاع یک آجر است. نیمساز این زاویه باید از Z، مرکز نُه‌ضلعی، بگذرد. این منجر به شکل ۲ می‌شود. به سبب تقارن شکل، پاره‌خط AZ باید بر یک ارتفاع در نقطهٔ وسط آن Q عمود باشد و نیز باید زاویهٔ بین یک ضلع و یک ارتفاع در رأس Z را نصف کند، و به این ترتیب اثبات به انجام می‌رسد.

* * * * * *

• Raphael M. Robinson. "Two figures in the hyperbolic plane", *International Journal of Mathematics*, (3) 5 (1994) 421-423.

* ریفل رابینسن، دانشگاه کالیفرنیا (برکلی)، آمریکا

دربارهٔ نویسندهٔ این مقاله

ریفل رابینسن نویسندهٔ مقالهٔ بالا که در هنگام نوشتن این مقاله استاد دانشگاه کالیفرنیا (برکلی) بوده است، در هفتم بهمن‌ماه سال گذشته درگذشت. در اینجا برای یادکرد او مطلبی را که در مجلهٔ *مانتلی*، شمارهٔ مه ۱۹۹۵، صفحهٔ ۴۶۹ (به‌نقل از مقاله‌ای در شمارهٔ فوریهٔ همان سال) دربارهٔ یکی از کارهای رابینسن آورده شده، بازگو می‌کنیم:

> باناخ و تارسکی توانستند این حکم جالب، و مغایر با ادراک شهودی، را ثابت کنند که، مثلاً کرهٔ زمین را می‌توان به تعدادی متناهی قطعه تجزیه کرد به‌طوری که اگر قطعات حاصل را دوباره کنار هم بگذاریم یک تیله [گوی بسیار کوچک] یا حتی دو کره به همان اندازهٔ کرهٔ زمین به‌دست آید. جان فون نویمان حکم دیگری را به این حکم شگفت‌انگیز افزود و آن اینکه فقط نُه قطعه برای تجزیهٔ یک کره به دو کره با همان شعاع، کافی است. ریفل رابینسن از این هم جلوتر رفت و در سال ۱۹۴۷ نشان داد که پنج قطعه برای این منظور کفایت می‌کند!