مقادیر تابع زتایِ ریمان به‌ازای اعداد صحیح•

رومن دویلوویچ،* یان میناچ**

ترجمهٔ مونا نبیعی

۱. مقدمه

تابع زتای ریمان یکی از مهم‌ترین و جذاب‌ترین توابع در ریاضیات است که وقتی با سریهایی از توانهای طبیعی $\frac{1}{n}$ سر و کار دارد:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}, \tag{1}$$

بسیار طبیعی می‌نماید. اما این تابع در اصل به‌ازای متغیری حقیقی با ضابطهٔ زیر تعریف شده است

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} \qquad x > 1 \tag{2}$$

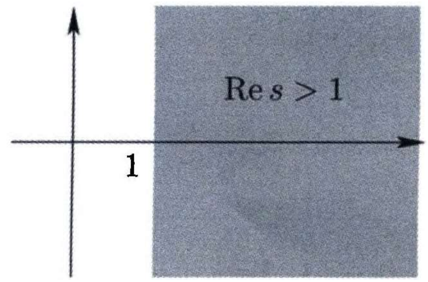
که همهٔ سریهایِ به شکل (۱) را به وسیلهٔ یک پارامتر پیوسته به هم مربوط می‌کند. در سال ۱۷۳۴، لئونهارت اویلر (۱۷۰۷-۱۷۸۳) نتیجهٔ شگفت‌آوری به‌دست آورد. یعنی همهٔ مقادیر $\zeta(2)$، $\zeta(4)$، $\zeta(6)$، ... را معین کرد که دستاورد واقعاً چشمگیری است. او همچنین رابطهٔ زیبایی بین اعداد اول و $\zeta(x)$ به‌دست آورد که در اهمیت آن برای ریاضیات امروز هرچه گفته شود کم است. برنهارد ریمان (۱۸۲۶-۱۸۶۶) بود که به اهمیت تعریف $\zeta(s)$ به‌عنوان تابعی از متغیر مختلط $s = x + iy$ به‌جای متغیر حقیقی x، پی برد. به‌علاوه، او در سال ۱۸۵۹ روشی ارائه داد که به کمک آن می‌توان دامنهٔ این تابع را به همهٔ صفحهٔ اعداد مختلط بجز نقطهٔ $s = 1$، به‌طور یکتا گسترش داد. ولی فرمول (۲) وقتی قسمت حقیقی s، یعنی $x = \mathrm{Re}(s)$ کمتر یا مساوی ۱ باشد، قابل تعریف نیست. این مطالب در بخش ۴ این مقاله به تفصیل بیان خواهد شد.

حتی با گذشت بیش از دویست سال از طرح این موضوع، همچنان تابع زتای ریمان اسرارآمیز به نظر می‌رسد. به‌عنوان مثال، صرف نظر از صفرهای بدیهی آن در نقاط ۲−، ۴−، ۶−، ...، به‌دست آوردن سایر صفرهای تابع زتای ریمان همچنان یک مسألهٔ حل‌نشده در ریاضیات و در واقع موضوع مورد نظر در فرضیهٔ ریمان است. بی‌گمان هیچ حدس حل نشده‌ای به اندازهٔ فرضیهٔ ریمان، مشهور و مورد توجه نیست.

مسألهٔ دیگری که در واقع هدف اصلی این نوشته است و آن را در ادامه بررسی می‌کنیم، ساختار مقادیر $\zeta(n)$ به‌ازای $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ است که بعضی از این مقادیر صریحاً قابل محاسبه‌اند و بعضی دیگر مثل $\zeta(2k + 1)$ به‌ازای $k = 1, 2, 3, \ldots$ هنوز مبهم هستند و حتی به این سؤال که آیا $\zeta(2k + 1)$ گویاست یا نه، تنها به‌ازای مقدار $\zeta(3)$ پاسخ داده شده است.

توضیح مختصری دربارهٔ منابع. نوشته‌های زیادی دربارهٔ تابع زتای ریمان موجود است. از جمله منابع بسیار خوب با پیشنیاز نسبتاً کم در این زمینه، مراجع [۳]، [۶]، [۸]، [۱۲]، [۱۴]، [۲۳]، و مقالات [۱۸] و [۲۲] است که شامل مطالب تکمیلی بسیار جالبی مرتبط با موضوعات مورد بحث در این نوشته، به زبانی مقدماتی، هستند. کتابهای [۱] و [۵]، گنجینه‌هایی واقعی هستند که به‌طور فشرده و آموزنده، اطلاعاتی دربارهٔ تابع زتا و توابع وابسته به آن به‌دست می‌دهند. مقالهٔ [۱۳]، مقاله‌ای کوتاه و کارامد است که نگاهی اجمالی به موضوعات پیشرفته‌تر ریاضیات جاری در ارتباط با مقادیر تابع زتا دارد. برای مطالعهٔ عمیق خواص تحلیلی تابع زتا، کتابهای [۱۵] و [۱۶] مراجع پایه‌ای مناسبی در حساب و آنالیز مختلط به شمار می‌آیند. مرجع [۲۱] یک کتاب کلاسیک به معنی واقعی دربارهٔ تابع زتاست که یادداشتهای آخر فصلهای آن را هیث-براون[1] نوشته است که چاپ دوم آن را روزآمد کرده است. البته این کتاب به پایه‌ای قوی در آنالیز نیاز دارد. امیدواریم این پیشنهادها دربارهٔ منابع مطالعهٔ تابع زتا، خواننده را در مطالعهٔ این مقاله و مطالعات بعدی او دربارهٔ موضوعات مورد بحث در آن، یاری کند.

1. D.R. Heath-Brown



شکل ۱ نیم‌صفحهٔ $\mathrm{Re}(s) > ۱$

۲. تعریف تابع زتای ریمان

در فرمول (۲)، متغیر x را می‌توان با متغیر مختلط $s = x + iy$ تعویض کرد:

$$\zeta(s) = \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n^s} \qquad \mathrm{Re}(s) = x > ۱ \qquad (۳)$$

مرسوم است که متغیر مختلط در تابع زتای ریمان باحرف s و در سایر توابع با z یا w نمایش داده شود. متغیرهای حقیقی را معمولاً با x و y نمایش می‌دهند و بنابراین، تجزیهٔ یک متغیر مختلط به قسمتهای حقیقی و موهومی آن به‌صورت $x + iy$ نمایش داده می‌شود. مجموعهٔ همهٔ اعداد مختلط $z = x + iy$ را با نماد $\mathbb{C}$ می‌نمایانند، که از دید هندسی می‌توان آن را یک صفحه در نظر گرفت.

برای تعریف توان مختلط یک عدد طبیعی، قدری توضیح لازم است. به‌ازای هر $s \in \mathbb{C}$، عبارت n^s به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$n^s = e^{s \log n}$$

که در آن لگاریتم، همان لگاریتم طبیعی در پایهٔ e است و به‌ازای هر $z \in \mathbb{C}$،

$$e^z = \sum_{k=۰}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

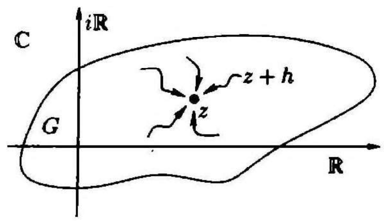
بنابراین

$$n^s = \sum_{k=۰}^{\infty} \frac{s^k (\log n)^k}{k!}.$$

رسماً تابع $\zeta(x)$ در فرمول (۳) تنها به‌ازای مقادیری از s که $\mathrm{Re}(s) > ۱$، تعریف می‌شود زیرا در سایر نقاط، قدرمطلق n^s بسیار کوچک و سری $\sum_{n=۱}^{\infty} |\frac{۱}{n^s}|$ واگراست. با این حال، تابع زتای ریمان روی نیم‌صفحهٔ $\mathrm{Re}(s) > ۱$، که در شکل ۱ نمایش داده شده، تحلیلی است.

بنا به تعریف، تابع مختلط‌مقدار $f = f(z)$ را که روی مجموعهٔ باز و همبند G از صفحهٔ مختلط تعریف شده است (یعنی G یک دامنه است) تحلیلی می‌نامیم اگر در G، به مفهوم مختلط، مشتق‌پذیر باشد. یعنی حد زیر به‌ازای هر $z \in G$ موجود باشد

$$f'(z) = \lim_{h \to ۰} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}.$$



شکل ۲ $z + h$ به z میل می‌کند

اگرچه تعریف مشتق برای متغیر مختلط، در ظاهر مشابه تعریف آن برای متغیر حقیقی است، اما تفاوت اصلی در این است که نقطهٔ $z + h$، همان‌طور که در شکل ۲ مشاهده می‌شود، می‌تواند از جهتهای مختلف به نقطهٔ z نزدیک شود که این شرط در مقایسه با حالت حقیقی، شرط بسیار قوی‌تری است.

تعریف معادل دیگری هم برای توابع تحلیلی با استفاده از بسط آنها به سری توانی وجود دارد. تابع $f = f(z)$ را در دامنهٔ G تحلیلی گوییم اگر به‌ازای هر $a \in G$، عدد حقیقی $r > ۰$ و سری توانی همگرایی وجود داشته باشد به‌طوری که

$$f(z) = \sum_{n=۰}^{\infty} c_n (z-a)^n \qquad |z - a| < r$$

یعنی $f(z)$ در قرص باز $\{|z-a| < r\}$، طبق شکل ۳، برابر با این سری توانی، باشد.

۳. ضابطهٔ تابع زتای ریمان برحسب اعداد اول

همان‌طور که قبلاً اشاره کردیم، اویلر فرمول دیگری برای تابع زتا به‌صورت زیر یافت

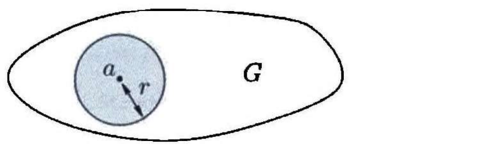
$$\zeta(s) = \prod_p (۱ - \frac{۱}{p^s})^{-۱} \qquad \mathrm{Re}(s) > ۱ \qquad (۴)$$

که در آن p روی همهٔ اعداد اول $p = ۲, ۳, ۵, ۷, ۱۱, \ldots$ تغییر می‌کند. بنابراین، او ثابت کرد که دو فرمول ارائه‌شده برای تابع زتا در (۳) و (۴) با هم معادل‌اند. ایدهٔ اصلی برهان او را در ادامه می‌آوریم. ابتدا از سمت راست شروع می‌کنیم.

$$\prod_p \left(۱ - \frac{۱}{p^s}\right)^{-۱} = \left(۱ - \frac{۱}{۲^s}\right)^{-۱} \left(۱ - \frac{۱}{۳^s}\right)^{-۱}$$

و هر عامل ضرب را به‌صورت زیر می‌نویسیم

$$\left(۱ - \frac{۱}{p^s}\right)^{-۱} = \frac{۱}{۱ - \frac{۱}{p^s}} = ۱ + \frac{۱}{p^s} + \frac{۱}{p^{۲s}} + \frac{۱}{p^{۳s}} + \ldots$$



شکل ۳ قرص همگرایی

در ادامهٔ محاسبات، از این ویژگی اساسی استفاده می‌کنیم که هر عدد طبیعی را می‌توان به‌طور یکتا (صرف نظر از ترتیب عوامل) به‌صورت حاصلضرب اعداد اول نوشت. اکنون حاصلضرب را فقط برای اعداد اول نابیشتر از N در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم بزرگ‌ترین عدد اولی که در این نابرابری صدق می‌کند P باشد. داریم

$$\begin{aligned}\prod_{p\leq N}&\left(۱+\frac{۱}{p^s}+\frac{۱}{p^{۲s}}\dots\right)\\ &=\left(۱+\frac{۱}{۲^s}+\frac{۱}{۲^{۲s}}+\dots\right)\dots\left(۱+\frac{۱}{P^s}+\frac{۱}{P^{۲s}}+\dots\right)\\ &=۱+\frac{۱}{۲^s}+\frac{۱}{۳^s}+\frac{۱}{۲^{۲s}}+\frac{۱}{۵^s}+\frac{۱}{۲^s۳^s}+\frac{۱}{۷^s}+\dots\\ &=۱+\frac{۱}{۲^s}+\frac{۱}{۳^s}+\dots+\frac{۱}{N^s}+R\end{aligned}$$

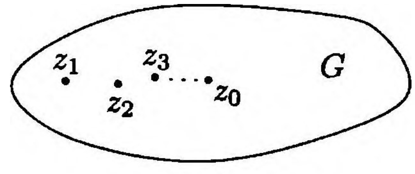
که در آن R به معنی باقیمانده است. از آنجا که $\mathrm{Re}(s)>۱$، محاسباتی ساده نشان می‌دهد که با انتخاب Nهای به قدر کافی بزرگ، باقیمانده را می‌توان به هر اندازهٔ دلخواه کوچک کرد. پس وقتی N به بینهایت میل می‌کند، فرمول ارائه‌شده در (۴) با فرمول ارائه شده در (۳) برابر می‌شود. بنابراین، برای تابع $\zeta(s)$ دو فرمول داریم: یکی به‌صورت مجموع نامتناهی و یکی به‌صورت حاصلضرب نامتناهی.

۴. گسترش توابع تحلیلی

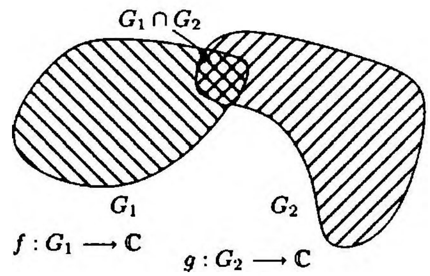
یکی از ویژگیهای اصلی توابع تحلیلی، یکتایی آنهاست، به این معنی که اگر دو تابع تحلیلی f و g روی دامنهٔ G در نقاط دنبالهٔ $z_n\in G$ که $\lim_{n\to\infty}z_n=z_۰\in G$، با هم برابر باشند، روی تمام نقاط دامنهٔ G با هم برابر خواهند بود. یعنی اگر به‌ازای هر $n=۱,۲,۳,\dots$، داشته باشیم $f(z_n)=g(z_n)$، (شکل ۴ را ببینید) آنگاه به‌ازای هر $z\in G$ خواهیم داشت $f(z)=g(z)$. بدیهی است که این ویژگی برای توابع حقیقی لزوماً برقرار نیست. .

به ویژه اگر تابع تحلیلی f روی دامنهٔ $G_۱\subseteq\mathbb{C}$ و تابع g روی دامنهٔ $G_۲\subseteq\mathbb{C}$ تعریف شده باشند که $G_۱\cap G_۲\neq\emptyset$ و دو تابع f و g روی اشتراک این دو مجموعه با هم برابر باشند، آنگاه تابع g به‌طور یکتا به وسیلهٔ تابع f مشخص می‌شود (شکل ۵ را ببینید).

اینکه تابع تحلیلی f به‌وسیلهٔ یک سری توانی تعریف شده باشد که در داخل یک قرص، همگرا و در خارج آن واگراست، بدین معنی نیست که تابع f را نمی‌توان به‌طور تحلیلی به خارج این قرص گسترش داد. مثال سادهٔ زیر



شکل ۴ دنبالهٔ نقاط



شکل ۵ گسترشهای تحلیلی

را در نظر بگیرید

$$f(z)=\sum_{n=۰}^{\infty}z^n\qquad |z|<۱$$

این سری به‌ازای مقادیر $|z|\geqslant ۱$ به وضوح واگراست. ولی تابع f را می‌توان به‌طور تحلیلی به تمام صفحهٔ مختلط، بجز نقطهٔ $z=۱$، با استفاده از فرمول زیر گسترش داد

$$f(z)=\frac{۱}{۱-z}.$$

سؤال طبیعی که اینجا به ذهن می‌رسد این است که آیا تابع زتای ریمان را می‌توان به‌طور تحلیلی به خارج از نیم‌صفحهٔ $\mathrm{Re}(s)>۱$ گسترش داد؟ پاسخ به این سؤال مثبت است، و این را در دو مرحله نشان خواهیم داد. مرحلهٔ اول ساده و مرحلهٔ دوم مشکل‌تر است.

۱.۴ گسترش تابع $\zeta(s)$ از $\{\mathrm{Re}(s)>۱\}$ به $\{\mathrm{Re}(s)>۰\}$

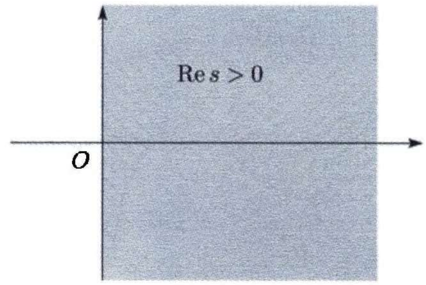
محاسبات زیر را در نظر می‌گیریم

$$\begin{aligned}(۱-۲^{۱-s})\zeta(s)&=\left(۱-۲\cdot\frac{۱}{۲^s}\right)\left(\frac{۱}{۱^s}+\frac{۱}{۲^s}+\frac{۱}{۳^s}+\dots\right)\\ &=\frac{۱}{۱^s}+\frac{۱}{۲^s}+\frac{۱}{۳^s}\dots\\ &\qquad-۲\left(\frac{۱}{۲^s}+\frac{۱}{۴^s}+\frac{۱}{۶^s}+\dots\right)\\ &=\frac{۱}{۱^s}-\frac{۱}{۲^s}+\frac{۱}{۳^s}-\frac{۱}{۴^s}+\frac{۱}{۵^s}-\frac{۱}{۶^s}+\dots\\ &=\sum_{n=۱}^{\infty}(-۱)^{n-۱}\frac{۱}{n^s}\end{aligned}$$

فرمول دیگری برای تابع $\zeta(s)$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.[۱]

$$\zeta(s)=\frac{۱}{۱-۲^{۱-s}}\sum_{n=۱}^{\infty}(-۱)^{n-۱}\frac{۱}{n^s}\qquad \mathrm{Re}(s)>۰,\quad s\neq ۱$$

۱. واضح است که چون سری مشخص‌شده در بالا به‌طور مطلق همگراست، تغییر آرایش اعضای آن امکان‌پذیر است.ـ م.



شکل ۶ سری متناوب به‌ازای $\operatorname{Re}(s) > ۰$

لذا این سریِ متناوب روی نیم‌صفحهٔ بزرگ‌تری (شکل ۶ را ببینید) نسبت به نیم‌صفحه‌ای که $\zeta(s)$ در فرمول(۳) روی آن تعریف شده بود، همگرا می‌شود. البته باید نقطهٔ $s = ۱$ را از این نیم‌صفحه حذف کنیم زیرا مخرج ضریب سری، یعنی $۲^{۱-s} - ۱$، در این نقطه صفر می‌شود. این گسترش سادهٔ تابع $\zeta(s)$ از نیم‌صفحهٔ $\operatorname{Re}(s) > ۱$ به نیم‌صفحهٔ $\operatorname{Re}(s) > ۰$ و $s \neq ۱$، بسیار مهم است زیرا ما را قادر می‌سازد تا فرضیهٔ ریمان دربارهٔ صفرهای تابع $\zeta(s)$ روی این نوار بحرانی را صورت‌بندی کنیم (زیربخش ۳.۴ را ببینید).

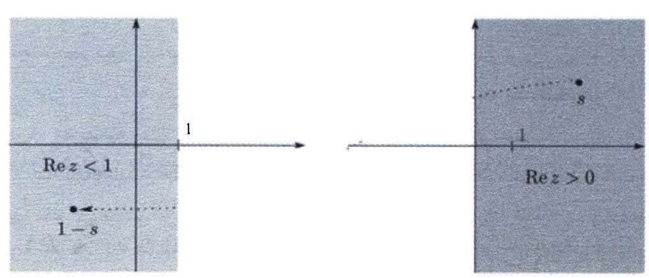
۲.۴ معادلهٔ تابعی برای تابع زتای ریمان

مرحلهٔ دوم که گسترش تحلیلی تابع $\zeta(s)$ از $\{\operatorname{Re}(s) > ۰,\ s \neq ۱\}$ به $\{\operatorname{Re}(s) < ۰\}$ است (شکل ۷ را ببینید) توسط ریمان در سال ۱۸۵۹ اثبات شده است. اثبات این معادلهٔ تابعی را نمی‌آوریم. برای ملاحظهٔ این اثبات می‌توانید به کتاب تیچمارش [۲۱] مراجعه کنید. ما در ابتدا تابع $\zeta(s)$ را گام‌به‌گام به نیم‌صفحه‌های $\{\operatorname{Re}(s) > k,\ s \neq ۱\}$، به‌ازای هر عدد صحیح منفی k، به‌طور تحلیلی گسترش می‌دهیم. برای مشاهدهٔ جزئیات این روش می‌توانید به‌عنوان مثال به مقالات [۱۱] و [۱۲] مراجعه کنید.

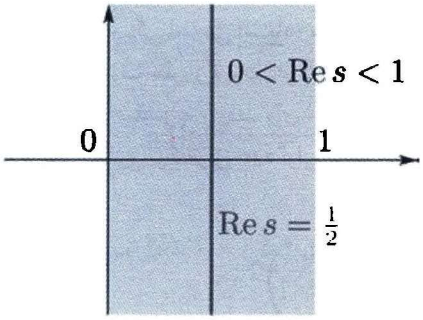
چند صورت برای معادلهٔ تابعی وجود دارد که در اینجا دو تا از آنها را می‌آوریم:

$$\zeta(۱-s) = ۲(۲\pi)^{-s}\cos(\pi s/۲)\Gamma(s)\zeta(s), \qquad \operatorname{Re}(s) > ۰, \tag{۵}$$

$$\zeta(s) = ۲(۲\pi)^{s-۱}\sin(\pi s/۲)\Gamma(۱-s)\zeta(۱-s), \qquad \operatorname{Re}(s) < ۱, \tag{۶}$$



شکل ۷ دامنهٔ گسترش تحلیلی از نیم‌صفحهٔ راست به نیم‌صفحهٔ چپ



شکل ۸ خط بحرانی

که در آن

$$\Gamma(s) = \int_۰^\infty x^{s-۱}e^{-x}dx \qquad \operatorname{Re}(s) > ۰. \tag{۷}$$

قبل از اینکه اطلاعات بیشتری دربارهٔ تابع $\Gamma(s)$ ارائه دهیم، یادآور می‌شویم که، طبق شکل ۷، هر یک از معادلات (۵) و (۶) یک گسترش تحلیلی برای تابع $\zeta(s)$ به تمام صفحهٔ مختلط $\mathbb{C}$، بجز نقطهٔ $s = ۱$، به دست می‌دهند.

تابع گاما از قبل بر اویلر معلوم بود. این تابع در واقع به نوعی تعمیم تابع فاکتوریل است:

$$\Gamma(n) = (n-۱)! \qquad n = ۱, ۲, ۳, \ldots$$

از جمله ویژگیهای اساسی تابع $\Gamma(z)$ این است که در تمام صفحهٔ $\mathbb{C}$ بجز در نقاط $z = ۰, -۱, -۲, \ldots$ تحلیلی است و در این نقاط، تکینه‌های ساده‌ای، به نام قطب، وجود دارند که در آنها حد زیر را داریم

$$\lim_{z \to -k}(z+k)\Gamma(z) = \frac{(-۱)^k}{k!}, \qquad k = ۰, ۱, ۲, \ldots$$

از تعریف تابع گاما که در (۷) آمده، واضح نیست که تابع گاما ناصفر و دارای گسترش تحلیلی به کل صفحهٔ مختلط بجز نقاط $z = ۰, -۱, -۲, -۳, \ldots$ است. خوشبختانه، تعاریف معادل دیگری برای $\Gamma(z)$ وجود دارند که به کمک آنها این ویژگیها ساده‌تر استنتاج می‌شوند. (ر.ک. [۱۶]) داریم.

$$\Gamma(z) = e^{-\gamma z}\left[z\prod_{n=۱}^{\infty}(۱+\frac{z}{n})e^{-\frac{z}{n}}\right]^{-۱},$$

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty}\frac{n!n^z}{z(z+۱)\cdot\ldots\cdot(z+n)}$$

از فرمول دوم نتیجه می‌شود که تابع گاما تحلیلی و برای zهایی که $\operatorname{Re}(z) > ۰$، ناصفر است.

۳.۴ فرضیهٔ ریمان

فرضیهٔ ریمان یکی از معروف‌ترین مسائل حل‌نشده در ریاضیات است. این فرضیه را در اصل برنهارد ریمان مطرح کرد. در کنگرهٔ بین‌المللی ریاضیدانان در سال ۱۹۰۰، دیوید هیلبرت آن را جزو مهم‌ترین مسائل حل‌نشدهٔ ریاضی نام برد، و در سال ۲۰۰۰ نیز موسسهٔ ریاضی کلی[1] برای آن به‌عنوان یکی از هفت مسألهٔ حل‌نشدهٔ مهم جایزه تعیین کرد.

از فرمول $\zeta(s)$ که به‌صورت حاصلضرب در (۴) ارائه شد، نتیجه می‌شود که این تابع به‌ازای sهایی که $\operatorname{Re}(s) > ۱$ نمی‌تواند صفر شود. حال با استفاده از معادلهٔ تابعی (۶) و این واقعیت که برای zهایی که $\operatorname{Re}(z) > ۰$، داریم $\Gamma(z) \neq ۰$، به راحتی مشاهده می‌شود که $\zeta(s)$ روی نیم‌صفحهٔ $\operatorname{Re}(s) < ۰$ تنها در نقاطی می‌تواند صفر شود که سینوس در آن نقاط صفر باشد. از فرمول (۶) داریم

$$\zeta(-۲k) = ۲(۲\pi)^{-۲k-۱}\underbrace{\sin(\pi(-۲k)/۲)}_{=۰}$$
$$\Gamma(۱+۲k)\zeta(۱+۲k) = ۰, \quad k = ۱, ۲, \ldots. \quad (۸)$$

این تأملات هیچ اطلاعی دربارهٔ صفرهای تابع $\zeta(s)$ روی نوار $۰ < \operatorname{Re}(s) < ۱$ به دست نمی‌دهد. فقط می‌دانیم تابع $\zeta(s)$ در نقاطی از این نوار صفر می‌شود. این نقاط را صفرهای غیربدیهی تابع زتا می‌گویند. محاسبهٔ تعدادی از این صفرها نشان می‌دهد که دقیقاً روی خط $\operatorname{Re}(s) = \frac{۱}{۲}$ قرار دارند که به آن، خط بحرانی می‌گویند (شکل ۸). امروزه با استفاده از رایانه، تعداد زیادی، حدوداً $۱۰^{۱۳}$ (ده تریلیون)، از این صفرها مشخص شده‌اند. نکتهٔ جالب این است که قبل از عهد رایانه، در واقع تا اواسط قرن بیستم، تنها حدود هزار صفر از صفرهای غیربدیهی تابع زتا محاسبه شده بودند. با وجودی که همهٔ این صفرها که با دقت بسیار زیادی محاسبه شده‌اند، روی خط بحرانی قرار دارند، اما همچنان هیچ اثبات دقیقی برای این مطلب که همهٔ صفرهای غیربدیهی تابع زتا روی این خط قرار دارند، ارائه نشده است و این حدس به نام فرضیهٔ ریمان معروف است.

فرضیهٔ ریمان. همهٔ صفرهای غیربدیهی تابع زتا روی خط $\operatorname{Re}(s) = \frac{۱}{۲}$ قرار دارند.

تاکنون بسیاری از ریاضیدانهای بزرگ برای درک بهتر فرضیه ریمان تلاش کرده‌اند که نام همهٔ آنها در این نوشته نمی‌گنجد. لذا برای نمونه تنها چهار نفر از آنها را نام می‌بریم: آندره ویل[2] (۱۹۰۶-۱۹۹۸)، اتله سلبرگ[3] (۱۹۱۷-۲۰۰۷)، انریکو بومبیری[4] (۱۹۴۰-) و آلن کُن[5] (۱۹۴۷-). سه نفر اخیر به ترتیب در سالهای ۱۹۵۰، ۱۹۷۴، ۱۹۸۲ [به‌خاطر دستاوردهای دیگری] موفق به دریافت نشان فیلدز شده‌اند که از لحاظ اعتبار، معادل جایزهٔ نوبل در ریاضیات به حساب می‌آید. این نشان تنها به ریاضیدانان زیر چهل سال اهدا می‌شود و چنانچه کسی بتواند فرضیهٔ ریمان را در این سنین ثابت کند، یقیناً این جایزه را دریافت خواهد کرد.

1. Clay mathematics Institute 2. André Weil 3. Atle Selberg
4. Enrico Bombieri 5. Alain Connes

۵. دربارهٔ مقادیر $\zeta(s)$ به‌ازای اعداد صحیح چه می‌دانیم؟

در این بخش اطلاعات موجود دربارهٔ مقادیر تابع زتای ریمان در اعداد صحیح را خلاصه‌وار می‌آوریم. در بخش ۷، این مطالب با دقت بیشتری مورد بحث قرار می‌گیرند.

- به‌ازای $k = ۱, ۲, \ldots$، داریم $\zeta(-۲k) = ۰$، که اینها صفرهای بدیهی هستند و در (۸) مشخص شدند.
- مقادیر $\zeta(۲k)$ به‌ازای $k = ۱, ۲, \ldots$ را لئونهارت اویلر در سال ۱۷۳۴ تعیین کرد. در بخش ۷ اثبات این فرمولها را می‌آوریم.
- مقادیر $\zeta(-۲k+۱)$ به‌ازای $k = ۱, ۲, \ldots$، وقتی مقادیر $\zeta(۲k)$ را داشته باشیم، به‌صورت زیر محاسبه می‌شوند

$$\begin{aligned}\zeta(-۲k+۱) &= ۲(۲\pi)^{-۲k}\sin(\pi(-۲k+۱)/۲)\Gamma(۲k)\zeta(۲k)\\ &= ۲(۲\pi)^{-۲k}(-۱)^k(۲k-۱)!\zeta(۲k).\end{aligned}$$

- به‌ازای $k = ۱, ۲, \ldots$، دربارهٔ مقادیر $\zeta(۲k+۱)$ چیز زیادی نمی‌دانیم. یکی از نتایج معدودی که به دست آمده، این است که $\zeta(۳)$ گنگ است [۲] و نیز تعداد نامتناهی از این مقادیر گنگ هستند [۱۹].
- از (۹) و (۶) نتیجه می‌شود که $\zeta(۰) = -\frac{۱}{۲}$.
- مقدار $\zeta(۱)$ وجود ندارد. ولی ثابت اویلر، γ، را می‌توان به‌صورت زیر محاسبه کرد

$$\zeta(s) = \frac{۱}{s-۱} + \gamma + g(s-۱) \qquad (۹)$$

که وقتی $s \to ۱$ داریم $g(s-۱) \to ۰$. نکتهٔ جالب این است که نمی‌دانیم ثابت اویلر گنگ است یا گویا.

۶. اعداد برنولی

۱.۶ روش اولیهٔ محاسبهٔ اعداد برنولی

برای بحث دربارهٔ مقادیر تابع زتای ریمان در اعداد صحیح باید به عقب برگشت و به مطالعهٔ اعداد برنولی پرداخت که نام خود را از یاکوب برنولی (۱۶۵۴-۱۷۰۵) گرفته‌اند. هدف برنولی، یافتن فرمولی برای مجموع متناهی توانهای اعداد صحیح متوالی بود:

$$S_k(n) = ۱^k + \cdots + (n-۱)^k$$

که در آن $k = ۱, ۲, \ldots$ و $n = ۲, ۳, \ldots$. او دریافت که $S_k(n)$ یک چندجمله‌ای برحسب n از درجهٔ $k+۱$ است، واقعیتی که ما امروز آن را بلافاصله نتیجه می‌گیریم. برنولی موفق به یافتن فرمولی کلی برای این چندجمله‌ایها شد و همان‌طور که درکتاب خود فن حدس زدن[1] نوشته است، «توانست درکمتر از نصف ربع ساعت، مجموع توانهای دهم هزار عدد صحیحِ نخستین را به‌دست آورد.» (ر.ک. [۱۴]).

نوشته‌های زیادی دربارهٔ اعداد برنولی و روابط آنها با زمینه‌های مختلف ریاضیات وجود دارد (کتابشناسی این موضوع در فاصلهٔ سالهای ۱۷۱۳ تا ۱۹۹۰ در مرجع [۹] آمده است).

به‌ازای مقادیر کوچک k، می‌توان به راحتی فرمولهایی برای $S_k(n)$ به‌دست آورد:

1. *Ars Conjectandi*

$$
\begin{aligned}
S_1(n) &= \tfrac{1}{2}n^2 - \tfrac{1}{2}n \\
S_2(n) &= \tfrac{1}{3}n^3 - \tfrac{1}{2}n^2 + \tfrac{1}{6}n \\
S_3(n) &= \tfrac{1}{4}n^4 - \tfrac{1}{2}n^3 + \tfrac{1}{4}n^2 \\
S_4(n) &= \tfrac{1}{5}n^5 - \tfrac{1}{2}n^4 + \tfrac{1}{3}n^3 - \tfrac{1}{30}n \\
S_5(n) &= \tfrac{1}{6}n^6 - \tfrac{1}{2}n^5 + \tfrac{5}{12}n^4 - \tfrac{1}{12}n^2 \\
S_6(n) &= \tfrac{1}{7}n^7 - \tfrac{1}{2}n^6 + \tfrac{1}{2}n^5 - \tfrac{1}{6}n^3 + \tfrac{1}{42}n \\
S_7(n) &= \tfrac{1}{8}n^8 - \tfrac{1}{2}n^7 + \tfrac{7}{12}n^6 - \tfrac{7}{24}n^4 + \tfrac{1}{12}n^2 \\
S_8(n) &= \tfrac{1}{9}n^9 - \tfrac{1}{2}n^8 + \tfrac{2}{3}n^7 - \tfrac{7}{15}n^5 + \tfrac{2}{9}n^3 - \tfrac{1}{30}n \\
S_9(n) &= \tfrac{1}{10}n^{10} - \tfrac{1}{2}n^9 + \tfrac{3}{4}n^8 - \tfrac{7}{10}n^6 + \tfrac{1}{2}n^4 - \tfrac{3}{20}n^2 \\
S_{10}(n) &= \tfrac{1}{11}n^{11} - \tfrac{1}{2}n^{10} + \tfrac{5}{6}n^9 - n^7 + n^5 - \tfrac{1}{2}n^3 + \tfrac{5}{66}n \\
& \Downarrow \quad \Downarrow \quad \Downarrow \quad \Downarrow \quad \Downarrow \quad \Downarrow \\
& \frac{1}{k+1} \quad -\frac{1}{2} \quad \frac{k}{12} \qquad -\frac{k(k-1)(k-2)}{720}
\end{aligned}
$$

بنابراین داریم

$$
S_k(n) = \frac{1}{k+1}n^{k+1} - \frac{1}{2}n^k + \frac{k}{12}n^{k-1} + 0\,n^{k-2} - \frac{k(k-1)(k-2)}{720}n^{k-3} + \dots .
$$

به دلایل فنی بهتر است ضرایب چندجمله‌ای $S_k(n)$ را با استفاده از عامل $\frac{1}{k+1}\binom{k+1}{j}$ به‌صورت زیر مرتب کنیم

$$
\begin{aligned}
S_k(n) &= \frac{1}{k+1}\left[B_0 n^{k+1} + \binom{k+1}{1}B_1 n^k + \dots + \binom{k+1}{k}B_k n\right] \\
&= \frac{1}{k+1}\sum_{j=0}^{k}\binom{k+1}{j}B_j n^{k+1-j}.
\end{aligned} \tag{10}
$$

و روابطی بازگشتی برای B_kها به‌دست آوریم:

$$
\begin{aligned}
B_0 &= 1, \\
B_0 + 2B_1 &= 0, \\
B_0 + 3B_1 + 3B_2 &= 0 \\
B_0 + 4B_1 + 6B_2 + 4B_3 &= 0,
\end{aligned}
$$

$$
\sum_{j=0}^{k}\binom{k+1}{j}B_j = 0, \qquad k \geqslant 1
$$

این اعداد گویای زیبا، اعداد برنولی هستند.

۲.۶ روشی تحلیلی برای محاسبهٔ اعداد برنولی

موضوع بسیار جالب این است که اعداد برنولی را می‌توان به روشی کاملاً متفاوت محاسبه کرد. تابع تحلیلی زیر را در نظر بگیرید

$$
\frac{z}{e^z - 1} \qquad |z| < 2\pi.
$$

این تابع را به‌صورت زیر به سری توانی بسط می‌دهیم

$$
\begin{aligned}
\frac{z}{e^z-1} &= 1 - \frac{1}{2}z + \frac{1}{2!}\frac{1}{6}z^2 + \frac{1}{4!}\left(-\frac{1}{30}\right)z^4 + \cdots \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{z^n}{n!}.
\end{aligned} \tag{11}
$$

همان‌طور که ملاحظه می‌شود، ضرایب B_n در سری بالا دقیقاً اعداد برنولی هستند که به روش کاملاً متفاوتی تعریف شدند.

نخستین اعداد برنولی این تصور گمراه‌کننده را در ذهن ایجاد می‌کنند که این اعداد به صفر همگرا هستند:

n	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
B_n	۱	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	۰	$-\frac{1}{30}$	۰	$\frac{1}{42}$	۰	$-\frac{1}{30}$	۰	$\frac{5}{66}$	۰	$-\frac{691}{2730}$

در واقع عکس این تصور درست است. وقتی $k \to \infty$، داریم

$$
(-1)^{k+1}B_{2k} > 0, \qquad (-1)^{k+1}B_{2k} \sim \frac{2(2k)!}{(2k)^k}
$$

گزارهٔ اخیر معادل است با اینکه

$$
\lim_{k\to\infty}\frac{(-1)^{k+1}(2\pi)^{2k}B_{2k}}{2(2k)!} = 1.
$$

۳.۶ چندجمله‌ایهای برنولی

چندجمله‌ایهای برنولی را می‌توان برحسب اعداد برنولی

$$
B_k(x) = \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}B_j x^{k-j},
$$

و یا به کمک بسط تابع تحلیلی مختلط زیر تعریف کرد

$$
\frac{ze^{xz}}{e^z-1} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{B_k(x)}{k!}z^k \qquad |z| < 2\pi. \tag{12}
$$

اثبات اینکه چندجمله‌ایهای برنولی در روابط بازگشتی زیبای زیر صدق می‌کنند چندان سخت نیست

$$
\begin{aligned}
B_k(x+1) - B_k(x) &= kx^{k-1} \qquad k \geqslant 1, \\
B_k(0) &= B_k(1) \qquad k \geqslant 2.
\end{aligned}
$$

از تعریف اعداد برنولی(۱۱) و چندجمله‌ایهای برنولی (۱۲)، بی‌واسطه نتیجه می‌شود که

$$
B_k = B_k(0) \qquad k \geqslant 1
$$

با استفاده از این ویژگیها درمی‌یابیم که مجموع $S_k(n)$ در (۱۰) را می‌توان برحسب چندجمله‌ایهای برنولی بیان کرد:

$$S_k(n) = \frac{B_{k+۱}(n) - B_{k+۱}}{k+۱} = \frac{B_{k+۱}(n) - B_{k+۱}(۰)}{k+۱} = \frac{B_{k+۱}(n) - B_{k+۱}(۱)}{k+۱}.$$

۷. دربارهٔ بعضی از مقادیر به‌ازای اعداد صحیح چه می‌دانیم؟

۱.۷ محاسبات اویلر برای به‌دست آوردن مقادیر $\zeta(۲k)$

لئونهارت اویلر بعد از سالها تلاش در سال ۱۷۳۴ فرمول بسیار خوبی برای $\zeta(۲k)$ به‌دست آورد. به‌ازای $|z| < \pi$ داریم

$$\begin{aligned} z\cot z &= z\frac{\cos z}{\sin z} = ۱ - ۲\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{z^۲}{n^۲\pi^۲ - z^۲} \\ &= ۱ - ۲\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{z^۲}{n^۲\pi^۲}\frac{۱}{۱-(\frac{z}{n\pi})^۲} \\ &= ۱ - ۲\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{z^۲}{n^۲\pi^۲}\sum_{k=۰}^{\infty}(\frac{z}{n\pi})^{۲k} \\ &= ۱ - ۲\sum_{k=۰}^{\infty}(\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n^{۲k+۲}})\frac{z^{۲k+۲}}{\pi^{۲k+۲}} \\ &= ۱ - ۲\sum_{k=۱}^{\infty}(\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n^{۲k}})\frac{z^{۲k}}{\pi^{۲k}}. \end{aligned}$$

فرمول دیگر $z\cot z$ چنین است:

$$\begin{aligned} z\cot z &= z\frac{\cos z}{\sin z} = iz\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{e^{iz}-e^{-iz}} \\ &= iz + \frac{۲iz}{e^{۲iz}-۱} = ۱ + \sum_{k=۲}^{\infty}B_k\frac{(۲iz)^k}{k!}, \end{aligned}$$

که در آن B_kها اعداد برنولی هستند. از مقایسهٔ ضرایب توانهای z^k در دو بسط فوق، فرمول معروف زیر به‌دست می‌آید

$$\zeta(۲k) = (-۱)^{k+۱}\frac{(۲\pi)^{۲k}}{۲(۲k)!}B_{۲k}.$$

که چند مقدار نخستینِ آن عبارت‌اند از

$$\zeta(۲) = \frac{\pi^۲}{۶},\quad \zeta(۴) = \frac{\pi^۴}{۹۰},\quad \zeta(۶) = \frac{\pi^۶}{۹۴۵},\quad \zeta(۸) = \frac{\pi^۸}{۹۴۵۰}.$$

۲.۷ آیا روابط میان $\zeta(s)$ و B_k تصادفی‌اند؟

مجموعهای زیر چه هستند؟ اگر، فقط به‌طور صوری، در فرمول (۳) برای $\zeta(s)$ مقادیر $s = ۰, -۱, -۲, \ldots$ را قرار دهیم، با چشم‌پوشی از اینکه سری حاصل واگراست، خواهیم داشت

$$\begin{aligned} ۱+۱+۱+\ldots &= \quad = \zeta(۰) = -\frac{۱}{۲} \\ ۱+۲+۳+\ldots &= \quad = \zeta(-۱) = -\frac{۱}{۱۲} \\ ۱^۲+۲^۲+۳^۲+\ldots &= \quad = \zeta(-۲) = ۰ \end{aligned}$$

$$۱^k+۲^k+۳^k+\ldots = \quad = \zeta(-k) = -\frac{B_{k+۱}}{k+۱}.$$

روابط میان $\zeta(k)$ و B_k تصادفی نیست! در مقالهٔ [۱۷] محاسبات زیر را می‌بینیم که در آن به‌جای متغیر n در $S_k(n)$ متغیر x قرارگرفته و سپس عمل جمع به انتگرال‌گیری روی بازهٔ $[۰,۱]$ تبدیل شده است:

$$۱+\cdots+۱ = n-۱ \rightsquigarrow x-۱ \rightsquigarrow \int_۰^۱(x-۱)dx = -\frac{۱}{۲} = \zeta(۰)$$

$$\begin{aligned} ۱+\cdots+(n-۱) &= \frac{n(n-۱)}{۲} \rightsquigarrow \frac{x(x-۱)}{۲} \\ &\rightsquigarrow \int_۰^۱\frac{x(x-۱)}{۲}dx = -\frac{۱}{۱۲} = \zeta(-۱), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ۱^۲+\cdots+(n-۱)^۲ &= \frac{n(n-۱)(۲n-۱)}{۶} \\ &\rightsquigarrow \frac{x(x-۱)(۲x-۱)}{۶} \rightsquigarrow \\ &\int_۰^۱\frac{x(x-۱)(۲x-۱)}{۶}dx = ۰ = \zeta(-۲), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_k(n) &= ۱^k+\cdots+(n-۱)^k \rightsquigarrow S_k(x) \rightsquigarrow \int_۰^۱ S_k(x)dx \\ &= -\frac{B_{k+۱}}{k+۱} = \zeta(-k). \end{aligned}$$

روش متفاوتِ زیبا و بسیار ساده‌ای برای استنتاج رابطهٔ فوق در [۱۸] و [۱۲] آمده است.

۳.۷ درباره $\zeta(۲k+۱)$ چه می‌دانیم؟

یکی از چشمگیرترین کشفیات دربارهٔ $\zeta(۲k+۱)$ اثبات گنگ بودن $\zeta(۳)$ توسط آپری در سال ۱۹۷۸ است (ر.ک. [۲]). آپری فرمول دیگری برای محاسبهٔ این مقدار برحسب یک سری ارائه داد که به سرعت همگراست.

$$\zeta(۳) = \sum_{k=۱}^{\infty}\frac{۱}{k^۳} = \frac{۵}{۲}\sum_{k=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^k}{k^۳\binom{۲k}{k}}. \qquad (۱۳)$$

بنابر قضیه‌ای در نظریهٔ اعداد، اگر سری‌ای از اعداد گویا «با سرعت کافی» همگرا باشد، مقدار آن سری یک عدد گنگ خواهد بود. سری سمت راست

(۱۳) در فرض این قضیه صدق می‌کند و بنابراین گنگ بودن $\zeta(3)$ از آن نتیجه می‌شود.

همین‌طور فرمولهای زیر را برای $\zeta(2)$ و $\zeta(4)$ داریم

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=3\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2\binom{2k}{k}},\qquad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4}=\frac{36}{17}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4\binom{2k}{k}},$$

ولی اویلر قبلاً فرمولهای صریحی برای این مقادیر، یعنی، به‌ترتیب، $\frac{\pi^2}{6}$ و $\frac{\pi^4}{90}$ را به‌دست آورده بود. متأسفانه فرمولهای مشابهی برای سایر مقادیر $\zeta(n)$ به‌ازای $n=5,6,7,\ldots$ وجود ندارد تا بتوانیم حداقل گنگ بودن آنها را نتیجه بگیریم. برای ملاحظهٔ گونهٔ ساده‌ای از اثبات آپری، ر.ک. [۲۲].

اخیراً نتایج اساسی و جالب دیگری توسط تانگی ریووال و دیگران به‌دست آمده است:

قضیهٔ ۱ (ریووال، ۲۰۰۰، [۱۹]). مقدار تابع زتای ریمان در تعداد نامتناهی عدد طبیعی فرد، گنگ است. به‌علاوه اگر $N(n)$ تعداد اعداد گنگ موجود در میان $\zeta(3)$، $\zeta(5)$، ...، $\zeta(2n+1)$ باشد، برای nهای به قدر کافی بزرگ داریم $N(n)\geqslant C\log n$ که در آن C عدد ثابتی است که با فرمول $\frac{1}{2(1+\log 2)}$ مشخص می‌شود.

قضیهٔ ۲ (ریووال، ۲۰۰۲، [۲۰]). حداقل یکی از نه عدد $\zeta(5)$، $\zeta(7)$، ...، $\zeta(21)$ گنگ است.

یکی از ناقدان مجلهٔ متمتیکال ریویوز به نام زادیلین این حکم را به‌صورت زیر اصلاح کرد.

قضیهٔ ۳ (زادیلین، ۲۰۰۱، [۲۴]). حداقل یکی از چهار عدد $\zeta(5)$، $\zeta(7)$، $\zeta(9)$، $\zeta(11)$ گنگ است.

۸. روابط میان مقادیر تابع زتا

ارائهٔ فرمولهایی صریح برای مقادیر $\zeta(2k+1)$، $k=1,2,\ldots$، مشابه فرمولهای $\zeta(2k)$، بهترین نتیجه‌ای خواهد بود که انتظار داریم. ولی این مسأله در حال حاضر بسیار مشکل به نظر می‌رسد. نتیجهٔ مهم دیگر، ارائهٔ روابطی متناهی بین مقادیر $\zeta(2k+1)$ خواهد بود، یعنی فرمولی که فقط شامل تعداد متناهی از این مقادیر باشد و یا اینکه نشان دهد چنین روابطی برقرار نیست که این هم مسالهٔ بسیار مشکلی به نظر می‌رسد.

در بخش پایانی این نوشته، نتیجه‌ای را که نویسندگان این مقاله در [۱۰] به‌دست آورده‌اند، بیان می‌کنیم که روابطی نامتناهی بین مقادیر $\zeta(2k+1)$ به‌دست می‌دهد. در نوشتگان موجود، روابط نامتناهی زیادی بین این مقادیر می‌توان یافت. اهمیت نتیجهٔ مذکور در [۱۰] عمومیت آن است: با قرار دادن تابعی تحلیلی از یک خانوادهٔ نسبتاً بزرگ از توابع، روابطی بین تعداد نامتناهی از مقادیر $\zeta(2k+1)$، $k=1,2,\ldots$، برقرار می‌کنیم.

۱.۸ مقادیر $\zeta(n)$ برحسب انتگرالها

فرمولهای معروف زیر را در نظر می‌گیریم

$$\frac{1}{j^{2k}}=\frac{(-1)^{k-1}(2\pi)^{2k}}{(2k)!}\int_0^1 B_{2k}(t)\cos(2\pi jt)dt,$$

$$\frac{1}{j^{2k+1}}=\frac{(-1)^{k-1}(2\pi)^{2k+1}}{(2k+1)!}\int_0^1 B_{2k+1}(t)\sin(2\pi jt)dt,$$

که در آنها $j,k=1,2,\ldots$ و در فرمول دوم k می‌تواند صفر هم باشد.

حال از فرمولهای متعارف مجموع برای توابع سینوس و کسینوس استفاده می‌کنیم

$$\frac{1}{2}+\cos\theta+\cos(2\theta)+\cdots+\cos(n\theta)=\frac{\sin((n+1/2)\theta)}{2\sin(\theta/2)}$$

و

$$\sin(\theta)+\sin(2\theta)+\cdots+\sin(n\theta)=\frac{\cos(\theta/2)-\cos((n+1/2)\theta)}{2\sin(\theta/2)},$$

به‌ازای مقادیر زوج داریم

$$\begin{aligned}\zeta(2k)&=\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j^{2k}}\\&=\frac{(-1)^{k-1}(2\pi)^{2k}}{2(2k)!}\lim_{n\to\infty}\int_0^1 B_{2k}(t)\frac{\sin((2n+1)\pi t)}{\sin(\pi t)}dt\\&=\frac{(-1)^{k-1}(2\pi)^{2k}}{2(2k)!}B_{2k}\qquad(14)\end{aligned}$$

و به‌ازای مقادیر فرد

$$\begin{aligned}\zeta(2k+1)&=\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j^{2k+1}}\\&=\frac{(-1)^{k-1}(2\pi)^{2k+1}}{(2k+1)!}\\&\quad\lim_{n\to\infty}\int_0^1 B_{2k+1}(t)\frac{\cos(\pi t)-\cos((2n+1)\pi t)}{2\sin(\pi t)}dt\\&=\frac{(-1)^{k-1}(2\pi)^{2k+1}}{2(2k+1)!}\int_0^1 B_{2k+1}(t)\cot(\pi t)dt.\\&\qquad(15)\end{aligned}$$

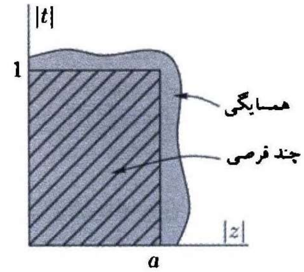
۲.۸ ردهٔ توابع $\mathscr{B}$

در ریاضیات، توابع را اغلب به‌صورت سری توانی یعنی نسبت به $\{(z-c)^n\}_{n=0}^{\infty}$ یا به‌صورت سری فوریه یعنی نسبت به $\{\sin(nz)\}_{n=1}^{\infty}$ و $\{\cos(nz)\}_{n=0}^{\infty}$، بسط می‌دهیم:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-c)^n$$

یا

$$f(z)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nz)+b_n\sin(nz)).$$



شکل ۹ چندقرصی و همسایگی‌اش

ولی در بسیاری از موارد، بسط یک تابع نسبت به خانواده‌ای از توابع دیگر هم مهم است.[1] با توجه به فرمولهای (۱۴) و (۱۵) برای مقادیر تابع زتا برحسب انتگرالها، بسط توابع نسبت به چندجمله‌ایهای برنولی مفید به نظر می‌رسد. هر تابع دلخواه لزوماً قابل بسط برحسب چندجمله‌ایهای برنولی نیست. محدودیتهایی برای ردهٔ چنین توابعی وجود دارد. در این مورد، کتاب [۷] مرجع مناسبی است.

ردهٔ $\mathscr{B}$ از توابع را به‌صورت زیر معرفی می‌کنیم. $\mathscr{B}$ را خانواده‌ای از توابع تحلیلی $f = f(z,t)$ از دو متغیر روی یک همسایگی باز از چندقرصی[2] بستهٔ $|z| \leqslant a$ $(a > 0)$، $|t| \leqslant 1$، در نظر می‌گیریم که برای آن عدد حقیقی به قدر کافی کوچک $\varepsilon > 0$ موجود است به‌طوری که برای $|z| < a + \varepsilon$، $|t| < 1 + \varepsilon$ داریم

$$f(z,t) = \sum_{n,k=0}^{\infty} a_{nk} z^n t^n,$$

به‌علاوه فرض می‌کنیم f دارای ویژگی زیر است:

$$f(z,t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t) z^n,$$

و به‌ازای هر $n = 0, 1, \ldots$ ثابتهای c_{nj} به‌ازای $j = 0, 1, \cdots$ وجود دارند به‌طوری که

$$f_n(t) = \sum_{j=0}^{\infty} c_{nj} B_j(t) \qquad |t| < 1 + \varepsilon$$

یعنی هر تابع f_n را می‌توان به‌صورت یک سری نسبت به چندجمله‌ایهای برنولی بسط داد.

همچنین زیرردهٔ $\mathscr{B}_0 \subset \mathscr{B}$ از توابع را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم. $\mathscr{B}_0$ را خانواده‌ای از توابع تحلیلی $f = f(z,t)$ از دو متغیر روی چندقرصی بستهٔ $|z| \leqslant a$ $(a > 0)$، $|t| \leqslant 1$، تعریف می‌کنیم که علاوه بر ویژگیهای بالا دارای ویژگی زیرند

$$f(z,t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t) z^n, \tag{16}$$

که در آن، $f_n(t)$ یک چندجمله‌ای از درجهٔ l_n است. از آنجا که

$$t^n = \frac{1}{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} B_k(t),$$

بنابر این، $\mathscr{B}_0 \subseteq \mathscr{B}$.

۳.۸ جمع‌بندی نتایج

فرض کنید

$$f(z,t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t) z^n, \qquad f_n(t) = \sum_{j=0}^{\infty} c_{nj} B_j(t)$$

به همان معنایی باشند که در زیربخش قبل بودند.

قضیهٔ ۴ ([۱۰]). اگر $f \in \mathscr{B}$ و به‌علاوه $f(z,0) = f(z,1) \equiv 0$، آنگاه

$$\int_0^1 f(z,t)\cot(\pi t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{k=1}^{\infty} a_{n,2k+1} \zeta(2k+1) \right] z^n,$$

که در آن

$$a_{n,2k+1} = \frac{2(-1)^{k+1}(2k+1)!}{(2k)^{2k+1}} c_{n,2k+1}.$$

تذکر. این نتایج برای هر تابع $f \in \mathscr{B}$ بدون فرض $f(z,0) = f(z,1) \equiv 0$ نیز برقرار است. کافی است به جای $f = f(z,t)$ تابع زیر را در نظر بگیریم

$$\tilde{f}(z,t) = f(z,t) - f(z,0) - t(f(z,1) - f(z,0)).$$

نتیجهٔ ۱ ([۱۰]). اگر $f \in \mathscr{B}_0$ و به‌علاوه $f(z,0) = f(z,1) \equiv 0$، آنگاه به‌ازای هر n ثابتهای مختلط $a_{n,2k+1}$ به‌ازای $3 \leqslant 2k+1 \leqslant l_n$، وجود دارند که در آن $l_n = \deg f_n$، به‌طوری که

$$\int_0^1 f(z,t)\cot(\pi t)\,dt$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{3 \leq 2k+1 \leq l_n} a_{n,2k+1} \zeta(2k+1) \right] z^n.$$

یک سؤال طبیعی: چه توابعی به‌طور بدیهی در شرایط قضیهٔ ۴ و نتیجهٔ ۱ صدق می‌کنند؟ در موارد زیر

۱. هر تابع را می‌توان در همسایگی یک نقطه، در صورت برقراری شرایط لازم، به کمک سری تیلر حول آن نقطه نمایش داد. همچنین می‌توان هر تابع را با توجه به ویژگیهای آن تابع و در صورتِ برقراری شرایط لازم، نسبت به دنباله‌ای از توابع متعامد یکه بسط داد. معروف‌ترین آنها توابع مثلثاتی که در بالا مطرح شد، هستند که به سری حاصل از آنها سری فوریه گفته می‌شود. اما توابع دیگری نظیر چندجمله‌ایهای چبیشف، لژاندر، برنولی، و غیره نیز برای بسط توابع به کار برده می‌شوند. در موارد مختلف، هر یک از این خانواده‌ها، با توجه به ویژگیهای تابع مورد نظر و بهتر بودن تقریبی که به‌دست می‌دهند، مورد استفاده قرار می‌گیرند.ــم.

2. polydisc

- $f=f(z,t)$ چند جمله‌ای بر حسب (z,t) باشد؛
- $f=f(z,t)=g(z)h(t)$، که در آن g و f توابعی تحلیلی باشند؛

قضیهٔ ۴ و نتیجهٔ ۱، بجز چند اتحاد بدیهی، حکم دیگری را نتیجه نمی‌دهند. ولی در موارد زیر

- $f(z,t)=f(zt)$، که در آن f تابعی تحلیلی روی قرص یکهٔ بسته است (در اینجا f معنای دوگانه‌ای دارد) و دارای نمایشی به‌صورت سری توانی زیر با تعداد نامتناهی ضریب ناصفر است، یعنی

$$f(z,t)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n z^n, \tag{17}$$

که در آن برای تعداد نامتناهی n داریم $a_n \neq 0$؛
- تعمیم حالت قبل: $f=f(z,t)$ تابعی از ردهٔ $\mathscr{B}$ باشد، یعنی در رابطهٔ (۱۶) صدق کند که در آن $f_n(t)$ها چندجمله‌ای هستند. به‌علاوه درجه‌های این چندجمله‌ایها کراندار نباشند، یعنی $\max_n(\deg f_n)=\infty$؛
- اغلب توابع ردهٔ $\mathscr{B}$؛

روابط غیر بدیهی به‌دست می‌آوریم.

و بالاخره، نتیجهٔ دیگری از قضیهٔ ۴ را برای توابعی که در (۱۷) ذکر شد، ارائه می‌دهیم.

نتیجهٔ ۲. فرض کنید $f(z,t)=f(zt)$ مشابه (۱۷) باشد و به‌علاوه $f(0)=0$. در این صورت

$$\int_0^1 [f(zt)-tf(z)]\cot(\pi t)dt=\sum_{n=3}^{\infty} a_n \times \left[\sum_{3\le 2k+1\le n} \frac{2(-1)^{k+1}(2k+1)!}{(2\pi)^{2k+1}}\binom{n+1}{2k+1}\zeta(2k+1)\right] z^n. \tag{18}$$

اینک توضیحاتی در مورد نتیجهٔ بالا می‌آوریم. اگر بتوانیم تابعی چون f در (۱۷) بیابیم و بتوانیم مقدار انتگرال سمت چپ در (۱۸) را به‌طور صریح محاسبه کنیم، یعنی

$$\int_0^1 [f(zt)-tf(z)]\cot(\pi t)dt=\sum_{n=3}^{\infty} c_n z^n,$$

آنگاه از (۱۸) روابط زیر را میان تعداد متناهی از مقادیر $\zeta(2k+1)$، وقتی $a_n\neq 0$، به‌دست می‌آوریم

$$\sum_{3\le 2k+1\le n} \frac{2(-1)^{k+1}(2k+1)!}{(2\pi)^{2k+1}}\binom{n+1}{2k+1}\zeta(2k+1)=c_n/a_n$$

که نتیجهٔ جالبی خواهد بود، ولی این مسأله که آیا می‌توان چنین تابع fای یافت یا نه، حل نشده است. ملاحظات مشابهی در مورد هر تابع از ردهٔ $\mathscr{B}$ می‌توان مطرح کرد.

۴.۸ کاربردها

برای بیان کاربردی از نتایج ذکر شده در بالا، تابع زیر را در نظر می‌گیریم

$$f(z,t)=-\frac{\pi z e^{2\pi i z t}}{e^{2\pi i z}-1},$$

که با استفاده از تعریف چندجمله‌ایهای برنولی در (۱۲)، به‌دست می‌آید:

$$\frac{ze^{zt}}{e^{z}-1}=\sum_{k=0}^{\infty} B_k(t)\frac{z^k}{k!}$$

با قرار دادن مقدار $2\pi i z$ به جای z در رابطهٔ بالا، تقسیم کردن عبارت حاصل بر $(-2i)$ و استفاده از نتیجهٔ ۱، بعد از کمی محاسبه (ر.ک. [۱۰]) فرمول زیر به‌دست می‌آید

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty}\zeta(2k+1)z^{2k} &= -\frac{\pi}{e^{2\pi i z}-1}\int_0^1 [e^{2\pi i z t}-1 \\ &\quad - t(e^{2\pi i z}-1)]\cot(\pi t)dt \\ &= \frac{2z}{\sin(2\pi z)}\int_0^{\pi}\cos(2zt)\ln(\sin t)dt+\ln 2 \\ &= \frac{2z}{1-\cos(2\pi z)}\int_0^{\pi}\sin(2zt)\ln(\sin t)dt+\ln 2.\end{aligned}$$

به‌عنوان کاربردی دیگر، با معرفی تابع ψ

$$\psi(z):=\frac{d}{dz}[\ln\Gamma(z)]=\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}.$$

فرمول زیر را [با استفاده از خواص تابع Γ] می‌توان به‌دست آورد

$$-\frac{1}{2}[2\gamma+\psi(z)+\psi(-z)]=\sum_{k=1}^{\infty}\zeta(2k+1)z^{2k}, \tag{19}$$

که در آن γ ثابت اویلر است. توجه می‌کنیم که سمت راست رابطهٔ (۱۹) با نتیجهٔ قبلی که به‌دست آوردیم تطبیق می‌کند، و در نتیجه برابری زیر به‌دست می‌آید

$$-\frac{1}{2}[2\gamma+\psi(z)+\psi(-z)]=\frac{2z}{\sin(2\pi z)}\int_0^{\pi}\cos(2zt)\times \ln(\sin t)dt+\ln 2.$$

مراجع

1. M. Abramowitz, I.A. Stegun(eds), *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, Dover Publication Inc., New York 1972.
2. R. Apéry, *Irrationalité de $\zeta(2)$ et $\zeta(3)$*, Astérisque **61**(1979), 11-13.

3. T.M. Apostol, *Introduction to Analytic Number Theory*, Springer Verlag, New York - Heidelberg - Berlin 1976.

4. K. Ball, T. Rivoal, *Irrationalité d'une infinité de valeurs de la fonction zeta aux entiers impairs*, Invent. Math. **146**(2001), no. 1, 193-207.

5. H. Bateman(A. Erdelyi ed.), *Higher Transcendental Functions*, Vol. 1, McGraw-Hill Book Company 1953.

6. B.C. Berndt, *Elementary evaluation of* $\zeta(2n)$, Mathematics Magazine **48**(1975), 148-154.

7. R.P. Boas, R.C. Buck, *Polynomial Expansions of Analytic Functions*, Springer - Verlag, Berlin - Göttingen - Heidelberg 1964.

8. J. Bruna, *Euler, sèries i funció zeta de Riemann*, Preprint (2007).

9. K. Dilcher, L. Skula, I.S. Slavutskii, *Bernoulli Numbers. Bibliography (1713-1990)*, Queen's Papers in Pure and Applied Mathematics, 87. Queen's University, Kingston, ON, 1991. iv+175 pp.

10. R. Dwilewicz, J. Mináč, *An introduction to relations between the values of* $\zeta(s)$ *in terms of holomorphic functions of two variables*, Proceedings of Hayama Symposium on Several Complex Variables, Japan, Dec. 2000. pp. 28-38(2001).

11. R. Dwilewicz, J. Mináč , *The Hurwitz zeta function as a convergent series*, Rocky Mountain J. Math. **36**(2006), 1191-1219.

12. G. Everest, C. Röttger, T. Ward, *The continuing story of zeta*, The Math. Intelligencer **31**(2009), 13-17.

13. A.B. Goncharov, *The classical polylogarithms, algebraic K-theory and* $\zeta_F(n)$, The Gel'fand Mathematical Seminars, 1990-1992, Birkhäuser Boston, Boston, MA, (1993), 113-135.

14. K. Ireland, M. Rosen, *A Classical Introduction to Modern Number Theory*, Springer-Verlag (GTM), **84** (1990).

15. E. Landau, *Differential and Integral Calculus*, Chelsea Publishing Company 1960.

16. A.I. Markushevich, *Theory of Functions of a Complex Variable*, Vol.I, II, III. Prentice-Hall, Inc., 1965.

17. J. Mináč, *A remark on the values of the Riemann zeta function*, Exposition. Math. **12** (1994), no. 5, 459-462.

18. M.R. Murty and M. Reece, *A simple derivation of* $\zeta(1-K) = -B_K/K$, Funct. Approx. Comment. Math. **28** (2000), 141-154.

19. T. Rivoal, *La fonction zeta de Riemann prend une infinité de valeurs irrationnelles aux entier impairs*, C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **331**(2000), 267-270.

20. T. Rivoal, *Irrationalité d'au moins un des neuf nombres* $\zeta(5), \zeta(7), ..., \zeta(21)$, Acta Arith. **103**(2002), no. 2, 157-167.

21. E.C. Titchmarsh, *The Theory of the Riemann Zeta Function*, Claredon Press, Oxford 1986.

22. A. Van der Poorten, *A proof that Euler missed ... Apéry's proof of the irrationality of* $\zeta(3)$*. An informal report.* Math. Intelligencer **1** (1978/79). no. 4, 195-203.

23. A. Weil, *Number Theory. An Approach Through History From Hammurapi to Legendre.* Birkhäuser, Boston 1984.

24. V.V. Zudilin, *One of the numbers* $\zeta(5)$, $\zeta(7)$, $\zeta(9)$, $\zeta(11)$ *is irrational.* (Russian) Uspekhi Mat. Nauk **56** (2001), no. 4(340), 149-150; translation in Russian Math. Surveys **56** (2001), no. 4, 774-776.

* * * * * *

• Roman J. Dwilewicz, Ján Mináč, "Values of the Riemann zeta function at integers", *MATerials MATemàtics*, (6)(2009) 1-26.

*رومن دویلوویچ، دانشگاه علوم و فنون میسوری، آمریکا

romand@mst.edu

**یان میناچ، دانشگاه آنتاریای غربی، کانادا

minac@uwo.ca